Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 427, 2014 г.

**К. С. Савенков**

# ПОЧТИ РЕГУЛЯРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ГРАФА

## §1. Введение

Объект, который будет нас интересовать в этой статье – это граф $G$ на $n$ вершинах, степени всех вершин которого не меньше $\frac{k-1}{k}n$. Сильное предположение про такие графы выдвинул Сеймур: он предположил, что граф, обладающий таким условием, имеет $(k-1)$-ую степень гамильтонова цикла. Существенное продвижение в доказательстве этого предположения было сделано в 1998 году группой математиков (Szemerédi, Sárközy и Komlós [1]). Они доказали гипотезу в предположении того, что $n$ достаточно велико. Недостаток этого результата в том, что порог $n_0$, начиная с которого утверждение доказано, чрезвычайно велик.

Нас будет больше интересовать не степень гамильтонова цикла в графе $G$, а его разбиение на клики размера $k$. Из гипотезы Сеймура легко следует, что граф $G$ можно разбить на $[\frac{n}{k}]$ клик размера $k$ и одну клику размера $n-[\frac{n}{k}]k$. Для этого достаточно выбирать группы вершин соответствующего размера поряд из цикла. Мы будем стремиться к подобному результату: будем пытаться разбить граф $G$ на клики так, чтобы как можно больше клик имели размер именно $k$.

Будем использовать стандартные обозначения:

$d_G(v)$ обозначает степень вершины $v$ в графе $G$;

$e(G)$, $v(G)$ обозначают количество ребер и вершин соответственно в графе $G$;

$e_G(A,B)$ обозначает количество ребер в графе $G$ между множествами вершин $A$ и $B$;

$G(M)$ обозначает индуцированный подграф графа $G$ на множестве вершин $M$.

Основным результатом работы является следующая теорема:

**Теорема.** *Пусть $G$ – граф на $n$ вершинах, $k \leqslant 8$ – натуральное число, и $d_G(v) \geqslant \frac{k-1}{k}n$ для любой вершины $v$ графа $G$. Тогда вершины графа $G$ можно разбить на несколько клик размера не более $k$, при*

---

*Ключевые слова*: клика, разбиение.

*этом для любого натурального $k_0 < k$ клика размера $k_0$ будет присутствовать в разбиении не более одного раза.*

Перейдем к дополнительному графу $G'$. Ограничение на минимальную степень графа $G$ превратится в условие о том, что все степени вершин графа $G'$ не превосходят $n - 1 - \frac{k-1}{k}n = \frac{n}{k} - 1$. Если раньше мы хотели разбивать вершины графа $G$ на клики, то теперь будем разбивать вершины графа $G'$ на независимые множества. Подобную ситуацию изучал Эрдеш. Он выдвинул предположение о том, что если степени всех вершин графа $G$ меньше $d$, то вершины графа $G$ можно разбить на $d$ независимых множеств, размеры которых отличаются не более чем на 1. Гипотеза была доказана Hajnal и Szemerédi в 1970 году [2]. Попробуем применить этот результат.

Предположим, $n = kc + r$, где $0 < r < k$. Тогда в графе $G'$ степени всех вершин не превосходят $c-1$, то есть строго меньше $c$. Значит, вершины графа $G'$ можно разбить на $c$ независимых множеств, размеры которых отличаются не более чем на 1. Вычислим размеры независимых множеств. Несложно понять, что в случае $c > r$ это будет $k$ и $k+1$, а в случае $c \leqslant r$ и вовсе все независимые множества будут иметь размер строго больше $k$. Доказанная в этой статье теорема позволяет избежать независимые множества размера больше $k$ полностью.

Добиться того, чтобы размеры клик не превосходили $k$, можно, если сказать, что все вершины графа $G'$ имеют степень меньше $c + 1$. Действительно, тогда граф разобьется на $k - r$ клик размера $k - 1$, а остальные клики будут иметь размер $k$. Однако, $k - r$ может быть существенно больше единицы.

## §2. Доказательство основного результата

**Определение.** *$(a, b, c)$-разбиением графа $G$ будем называть тройку попарно непересекающихся множеств $A, B, C \subset V(G)$ таких, что $A \cup B \cup C = V(G), |A| = a, |B| = b, |C| = c$, при этом на множествах вершин $A, B, C$ граф $G$ образует клики.*

**Лемма 1.** *Пусть $G$ – граф, $(A_1, A_2, B)$ – его $(a, a, b)$-разбиение, $a < b \leqslant 2(b - a + 1)^2$. Через $G'$ обозначим граф на тех же вершинах, что и граф $G$, со следующим набором ребер. Ребра графа $G'$ между $A_1 \cup A_2$ и $B$ соответствуют антиребрам $G$, между $A_1$ и $A_2$ ребер в* *графе $G'$ нет. Пусть $e(G') \leqslant 2a-1$. Тогда для некоторого натурального $k$ такого, что $a+k \leqslant b$ и $a-k \geqslant 0$, существует $(a+k, a-k, b)$-разбиение графа $G$.*

**Доказательство.** От противного. Пусть такого разбиения нет. Для $y \in B$ будем через $D_{G'}(y)$ обозначать пару чисел $(a_1, a_2)$, где $a_i = d_{G'(A_i \cup B)}(y)$. В обозначении пар будем использовать регулярные выражения. Например, говоря, что $D_{G'}(y) = (*, \geqslant 1)$, будем иметь в виду, что $D_{G'}(y) = (a_1, a_2)$, где $a_1$ – любое, а $a_2 \geqslant 1$.

**Часть 1.**

Не умаляя общности, считаем, что $e_{G'}(B, A_1) \leqslant e_{G'}(B, A_2)$. Тогда $e_{G'}(B, A_1) \leqslant a-1$, а значит, существует вершина $v \in A_1$ такая, что $d_{G'}(v) = 0$ и вершина $u \in B$ такая, что $D_{G'}(u) = (0, *)$ (на самом деле существует даже хотя бы $b-a+1$ таких вершин). Пусть существует такая вершина $x \in A_2$, что $d_{G'}(x) = 0$. Тогда тройка

$$(A_1 \cup \{u\}, \quad A_2 \setminus \{x\}, \quad (B \cup \{x\}) \setminus \{u\})$$

является $(a+1, a-1, b)$-разбиением, противоречие. Если же существует такая вершина $x \in B$, что $D_{G'}(x) = (*, 0)$, то противоречие дает тройка

$$(A_2 \cup \{x\}, \quad A_1 \setminus \{v\}, \quad (B \cup \{v\}) \setminus \{x\}),$$

являющаяся также $(a+1, a-1, b)$-разбиением. Значит, для каждой вершины $x \in B$ справедливо утверждение $D_{G'}(x) = (*, \geqslant 1)$, а тогда $e_{G'}(B, A_2) \geqslant b$, из чего следует $e_{G'}(B, A_1) \leqslant 2a-1-b$. Поэтому количество вершин $v \in A_1$ таких, что $d_{G'}(v) = 0$, хотя бы

$$a - (2a - b - 1) = b - a + 1,$$

а количество таких вершин $x \in B$, что $d_{G'}(x) = (0, *)$, хотя бы

$$b - (2a - b - 1) = 2b - 2a + 1.$$

Результаты части 1 можно сформулировать так:

1) $e_{G'}(B, A_2) \geqslant b$, $e_{G'}(B, A_1) \leqslant 2a-1-b$;

2) в $A_2$ нет таких вершин $v$, что $d_{G'}(v) = 0$, в $B$ нет таких вершин $x$, что $D_{G'}(x) = (*, 0)$;

3) в $A_1$ существует хотя бы $b-a+1$ таких вершин $v$, что $d_{G'}(v) = 0$, в $B$ существует хотя бы $2b-2a+1$ таких вершин $x$, что $D_{G'}(x) = (0, *)$.

**Часть 2.**

Обозначим через $H$ множество таких вершин $x \in B$, что $d_{G'}(x) = (\geqslant 1, *)$. Сразу стоит отметить, что $H$ непусто. Пусть это не так. Рассмотрим такую вершину $x \in A_2$, что $d_{G'}(x)$ минимально. Если $d_{G'}(x) \geqslant 2$, то степени всех вершин из $A_2$ в графе $G'$ не меньше двух, а тогда $e_{G'}(A_2, B) \geqslant 2|A_2| = 2a > 2a - 1$, противоречие. Тогда $d_{G'}(x) \leqslant 1$. Пусть вершина $y$ – единственный сосед вершины $x$ в графе $G'$, если он есть, и произвольная вершина части $B$, если соседа нет. Покажем, что следующая тройка будет $(a+1, a-1, b)$-разбиением:

$$(A_1 \cup \{y\}, \quad A_2 \setminus \{x\}, \quad (B \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$

Действительно, за счет того, что $y$ – единственная возможная смежная с $x$ вершина, множество $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ является независимым множеством в графе $G'$ (соответственно, кликой в графе $G$), а множество $A_1 \cup \{y\}$ является независимым множеством в графе $G'$, поскольку из предположения о том, что множество $H$ пусто, следует, что $D_{G'}(y) = (0, *)$, то есть вершина $y$ не смежна ни с одной вершиной из $A_1$. Таким образом получили противоречие, а значит, множество $H$ непусто.

Обозначим через $F$ множество вершин всех компонент связности графа $G'(B \cup A_2)$, содержащих хотя бы одну вершину из $H$. Очевидно, этих компонент не более $|H|$. Через $D$ обозначим множество $(B \cup A_2) \setminus F$. Отметим, что в графе $G'$ есть:

– хотя бы $|H|$ ребер между $H$ и $A_1$;

– хотя бы $|F| - |H|$ ребер внутри $F$, поскольку граф $G'(F)$ имеет $|F|$ вершин и не более $|H|$ компонент связности;

– $e_{G'}(D)$ ребер внутри $D$.

Поскольку количество ребер в графе $G'$ не превосходит $2a - 1$, получаем неравенство:

$$|H| + |F| - |H| + e_{G'}(D) \leqslant e(G') \leqslant 2a - 1.$$

Сокращая $|H|$, а также добавляя и вычитая $|D|$, получаем неравенство

$$|F| + |D| + e_{G'}(D) - |D| \leqslant 2a - 1.$$

Пользуясь тем, что $F \cup D = A_2 \cup B$, получаем неравенство

$$|D| - e_{G'}(D) \geqslant 1 - 2a + |F| + |D| = 1 - 2a + b + a = b - a + 1.$$

Это значит, что в графе $G'(D)$ хотя бы $b - a + 1$ компонента связности, являющаяся деревом (у любой компоненты связности $K$ с хотя бы одним циклом $v(K) - e(K) \leqslant 0$). Важным следствием этого факта является то, что компонент связности графа $G'(D)$, являющихся деревом, хотя бы две, поскольку $b - a + 1 \geqslant 2$. Это и будет основным результатом части 2.

**Часть 3.**

Будем пытаться исследовать компоненты связности без циклов графа $G'(D)$. Говорим, что компонента связности $C$ имеет тип $(x, y)$, если она содержит $x$ вершин в $A_2$ (их множество мы обозначим за $C_A$ и будем называть $A$-частью) и $y$ вершин в $B$ (их множество мы обозначим за $C_B$ и будем называть $B$-частью). Рассмотрим компоненту $C$ с минимальной $B$-частью. Пусть она имеет тип $(x, y)$.

**1.** *Покажем, что* $y > x$. Пусть это не так. Пусть $y \leqslant x$. Тогда существует вершина $v \in C_A$: $d_C(v) = 1$, поскольку если степени всех вершин в части $C_A$ не меньше двух, то

$$e_{G'}(C) \geqslant 2|C_A| = 2x > x + y - 1 = |C| - 1,$$

противоречие. Пусть $u$ – единственная смежная с $v$ вершина. Покажем, что такая тройка является $(a+1, a-1, b)$-разбиением:

$$(A_1 \cup \{u\}, \quad A_2 \setminus \{v\}, \quad (B \setminus \{u\}) \cup \{v\}).$$

Поскольку $u \notin H$, множество $A_1 \cup \{u\}$ является кликой в графе $G$. Вершина $u$ является единственным соседом вершины $v$ в графе $G'$, поэтому множество $(B \setminus \{u\}) \cup \{v\})$ – клика в графе $G$.

**2.** *Покажем, что* $y - x > b - a$. Пусть это не так. Покажем, что существует такое множество $B_0 \subset B \setminus (H \cup C_B)$, что $|B_0| = b - a$. Разберем два случая.

Случай 1: пусть $y \geqslant b - a$. Значит, для любой другой компоненты связности без циклов графа $G'(D)$ её $B$-часть тоже не меньше $b - a$. Тогда множество $B_0$ можно набрать из второй компоненты связности без циклов графа $G'(D)$, которая существует по части 2.

Случай 2: пусть $y < b - a$. В силу вывода 3 части 1, мы имеем $|B \setminus H| \geqslant 2b - 2a + 1$. Поскольку $|C_B| < b - a$, справедливо

$$|B \setminus (H \cup C_B)| > b - a + 1.$$

Тогда выбрать $b - a$ вершин из этого множества легко.

Итак, множество $B_0$ выбрано. Тогда рассмотрим такую тройку:

$$((A_2 \cup C_B) \setminus C_A, \quad (B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup C_B), \quad A_1 \cup B_0).$$

Покажем, что эта тройка является $(a+(y-x), a-(y-x), b)$-разбиением. Поскольку $C = C_A \cup C_B$ является компонентой связности графа $G'$, множество $(A_2 \cup C_B) \setminus C_A$ является независимым множеством графа $G'$, а тогда и кликой графа $G$. То же самое можно сказать про множество $(B \cup C_A) \setminus C_B$, а тогда и про содержащееся в нем множество $(B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup C_B)$. Множество $B_0$ является подмножеством $B \setminus H$, поэтому множество $A_1 \cup B_0$ является кликой графа $G$. Поскольку $y - x \leqslant b - a$, получается $a + (y - x) \leqslant a + (b - a) = b$. Условие $a-(y-x) \geqslant 0$ получается автоматически, так как размер явно построенного множества неотрицателен. Это разбиение дает противоречие.

**3.** *Покажем, что даже* $y - x > 2(b - a)$. Пусть это не так. Выделим такое множество $B_0 \subset C_B$, что $|B_0| = x + b - a$.

Такое множество $B_0$ существует в силу уже доказанного неравенства $y - x > b - a$. Далее выделим такое множество $B_2 \subset B \setminus (C_B \cup H)$, что $|B_2| = b - a - |C_B \setminus B_0|$.

Заметим, что $0 \leqslant b - a - |C_B \setminus B_0| \leqslant b - a$. Первое неравенство получается из предположения о том, что $y - x \leqslant 2(b - a)$, а второе неравенство очевидно. Существование такого множества $B_2$ объясняется тем, что мы имеем $y > b - a$. Тогда $B$-часть любой компоненты связности без циклов графа $G'(D)$ имеет не менее $b - a$ вершин, а по части 2 существует еще хотя бы одна такая компонента, кроме $C$, из которой и можно набрать $B_2$. Пусть

$$B_1 = B_2 \cup (C_B \setminus B_0).$$

Заметим, что по построению получилось $|B_1| = b - a$.

Итак, множества построены. Теперь рассмотрим тройку:

$$((A_2 \cup B_0) \setminus C_A, \quad (B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup B_1), \quad A_1 \cup B_1).$$

Покажем, что эта тройка является $(a+(b-a), a-(b-a), b)$-разбиением. Поскольку $C = C_A \cup C_B$ является компонентой связности графа $G'$, множество $(A_2 \cup C_B) \setminus C_A$ является независимым множеством графа $G'$, то есть, кликой графа $G$. Поскольку $B_0 \subset C_B$, множество $(A_2 \cup B_0) \setminus C_A$ является кликой в графе $G$ (как подмножество клики $(A_2 \cup C_B) \setminus C_A$). Аналогично $(B \cup C_A) \setminus C_B$ является кликой в графе $G$, а поскольку $C_B \subset B_0 \cup B_1$, множество $(B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup B_1)$ будет кликой в графе $G$ как подмножество клики $(B \cup C_A) \setminus C_B$. Равенства

$$|(A_2 \cup B_0) \setminus C_A| = a + (x + b - a) - x = b,$$
$$|A_1 \cup B_1| = a + b - a = b$$

видны исходя из размеров выбранных множеств. Условие

$$|(B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup B_1)| = a - (b - a)$$

получается автоматически из соображений сохранения общего количества вершин. При этом $a - (b - a) \geqslant 0$, так как размер явно построенного множества неотрицателен. Значит, такое разбиение дает противоречие.

Из того, что $y - x > 2(b - a)$, легко следует, что $y \geqslant 2(b - a + 1)$. Таким образом, мы получили, что $B$-части компонент связности графа $G'(D)$, являющихся деревьями, имеют размер хотя бы $2(b - a + 1)$. Отметим, что таких компонент хотя бы $b - a + 1$ по части 2. Осталось вспомнить, что хотя бы одна вершина из части $B$ лежит в $H$, так как $H$ непусто. Итого,

$$|B| \geqslant 2(b - a + 1)^2 + 1.$$

Противоречие. □

**Доказательство теоремы.** Разобьем вершины графа $G$ на клики размера не более $k$ так, чтобы суммарное число ребер в этих кликах было максимальным. Покажем, что данное разбиение удовлетворяет требованиям теоремы.

**Лемма 2.** *Пусть $A$ – клика разбиения. Тогда*

$$e_G(A, V(G) \setminus A) \geqslant \frac{k-1}{k}|A||V(G) \setminus A|.$$

**Доказательство.** Пусть $a \in A$ – произвольная вершина. Покажем, что количество ребер, исходящих из $a$ в $V(G) \setminus A$, не меньше, чем $\frac{k-1}{k}|V(G) \setminus A|$. Действительно, для этого надо проверить неравенство

$$\frac{k-1}{k}n - (|A| - 1) \geqslant \frac{k-1}{k}\left(n - |A|\right), \tag{1}$$

которое эквивалентно следующему:

$$|A| - 1 \leqslant \frac{k-1}{k}|A|.$$

Последнее неравенство верно, так как $|A| \leqslant k$.

Просуммировав неравенство (1) по всем $a \in A$, получим, что

$$e_G(A, V(G) \setminus A) \geqslant \frac{k-1}{k}|A||V(G) \setminus A|.$$

□

**Лемма 3.** *Пусть* $A_1$ *и* $A_2$ *– клики разбиения размеров* $k_1 \leqslant k_2 < k$ *соответственно. Тогда* $e_G(A_1, A_2) < \frac{k-1}{k} k_1 k_2$.

**Доказательство.** От противного. Пусть между кликами $A_1$ и $A_2$ хотя бы $k_1 k_2 \frac{k-1}{k}$ ребер. Тогда антиребер между ними не более $\frac{k_1 k_2}{k} < k_1$. Значит, есть вершина $v \in A_1$, смежная со всеми вершинами из $A_2$. Тогда заменим клики $A_1$ и $A_2$ на клики $(A_1 \setminus \{v\})$ и $(A_2 \cup \{v\})$, отчего количество ребер в кликах строго увеличится, противоречие. $\square$

Пусть есть $k_0 < k$ такое, что клика размера $k_0$ встречается дважды. Назовем эти клики $A_1$ и $A_2$. Для каждой клики разбиения $B$, отличной от $A_1$ и $A_2$, определим следующую величину:

$$\phi(B) = \frac{e_G(A_1 \cup A_2, B)}{2k_0|B|}.$$

Пусть $B$ – произвольная клика разбиения, отличная от $A_1$ и $A_2$, размер которой строго меньше, чем $k$. Применим лемму 3 к паре клик $A_1$ и $B$ и к паре клик $A_2$ и $B$. Полученные неравенства сложим и получим, что $\phi(B) \leqslant \frac{k-1}{k}$.

Предположим, что $\phi(B)$ также не больше $\frac{k-1}{k}$ и для клик размера $k$. Тогда получим, что $e_G(A_1 \cup A_2, M) \leqslant \frac{k-1}{k}|A_1 \cup A_2||M|$ для всех отличных от $A_1$ и $A_2$ клик $M$. Просуммировав по $M$, получим, что

$$e_G(A_1 \cup A_2, V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)) \leqslant \frac{k-1}{k}|A_1 \cup A_2|\,|V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)|.$$

Значит, для одного из $i \in \{1, 2\}$ будет верно, что

$$e_G(A_i, V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)) \leqslant \frac{k-1}{k}|A_i|\,|V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)|. \qquad (2)$$

Однако, по лемме 2 справедливо неравенство

$$e_G(A_i, V(G) \setminus A_i) \geqslant \frac{k-1}{k}|A_i|\,|V(G) \setminus A_i.| \qquad (3)$$

Вычтя из неравенства (3) неравенство (2), получаем

$$e_G(A_1, A_2) \geqslant \frac{k-1}{k}|A_1||A_2|,$$

что противоречит лемме 3.

Итак, на данный момент в предположении существования двух клик $A_1, A_2$ размера $k_0 < k$ мы вывели существование такой клики $B$ размера $k$, что $e_G(A_1 \cup A_2, B) > 2kk_0 \frac{k-1}{k}$.

Найденная ситуация (клики $A_1$, $A_2$ и $B$) в точности соответствует лемме 1: $a = k_0 < b = k$. Условие $k \leqslant 2(b-a+1)^2$ верно, поскольку $b - a \geqslant 1$, а $k \leqslant 8$ по условию. Осталось определить граф $G'$, как в лемме 1, и оценить количество его ребер:

$$e(G') = 2kk_0 - e_G(A_1 \cup A_2, B) < 2kk_0 - 2kk_0\frac{k-1}{k} = 2k_0 = 2a.$$

Заменяя строгое неравенство на нестрогое, получаем в точности условие леммы 1. Тогда по лемме 1 существует $(a+c, a-c, b)$-разбиение. Заменив клики размеров $a, a$ и $b$ на клики размеров $a+c, a-c$ и $b$, мы можем строго увеличить число ребер внутри клик разбиения:

$$\frac{(a+c)(a+c-1)}{2} + \frac{(a-c)(a-c-1)}{2} = a^2 - a + c^2 > a^2 - a = 2\frac{a(a-1)}{2}$$

противоречие. □

## Литература


1. E. Szemerédi, G. Sárközy, J. Komlós, *Proof of the Seymour conjecture for large graphs.* — Ann. Comb. **2**, no. 1 (1998), 43–60.
2. E. Szemerédi, A. Hajnal, *Proof of a conjecture of P. Erdös.* — Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969), pp. 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.



Savenkov K. S. Almost regular partition of a graph.

Let $k \leqslant 8$ be a positive integer and $G$ be a graph on $n$ vertices such that each vertex degree of $G$ is at least $\frac{k-1}{k}n$. It is proved in the paper that the vertex set of $G$ can be partitioned into several cliques of size at most $k$, such that for each positive integer $k_0 < k$ there is at most one clique of size $k_0$ in this partition.



С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: ostrich@flyingsteps.org


Поступило 7 ноября 2014 г.