Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 427, 2014 г.

А. В. Пастор

О СТРУКТУРЕ C_3-КРИТИЧЕСКИХ МИНИМАЛЬНЫХ 6-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

§1. Введение

1.1. Основные обозначения. Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Количество вершин и ребер графа G мы будем обозначать через $v(G)$ и $e(G)$, соответственно. Степень вершины v обозначается через $d_G(v)$, а наименьшая из степеней вершин графа G – через $\delta(G)$.

Пусть $A \subset V(G)$. Через $G(A)$ обозначается индуцированный подграф графа G на множестве A, а через $G - A$ – граф, полученный из G удалением всех вершин множества A и всех инцидентных им ребер (т. е. $G - A = G(V(G) \setminus A)$). Для $v \in V(G)$ положим $G - v{=}G - \{v\}$. Подграфы, получаемые из G удалением некоторых ребер, обозначаются аналогично: если $B \subset E(G)$, то через $G - B$ обозначается граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$. Для $e \in E(G)$ положим $G - e = G - \{e\}$.

Определение 1. Вершинной связностью *графа G называется мощность наименьшего подмножества $T \subset V(G)$, такого, что граф $G - T$ является несвязным или тривиальным (то есть состоящим из одной вершины). Вершинная связность графа G обозначается $\kappa(G)$. Граф G называется k-*связным*, если $\kappa(G) \geqslant k$.*

Очевидно, что $\delta(G) \geqslant \kappa(G)$. Пусть теперь $\kappa(G) = k$. Множество вершин графа G, имеющих степень k, мы обозначим через $V_k(G)$, а множество вершин, степень которых больше k – через $V_{k+1}(G)$. Также мы будем использовать следующие обозначения: $v_k(G) = |V_k(G)|$, $v_{k+1}(G) = |V_{k+1}(G)|$, $G_k = G(V_k(G))$, $G_{k+1} = G(V_{k+1}(G))$, $e_k(G) =$

Ключевые слова: k-связность, минимальный k-связный граф, C_3-критический k-связный граф.

Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1 и гранта РФФИ No. 14-01-00545-а.

$|E(G_k)|$, $e_{k+1}(G) = |E(G_{k+1})|$, $e_{k,k+1}(G) = e(G) - e_k(G) - e_{k+1}(G)$. Для вершины $v \in V_k(G)$ обозначим через $d_k(G)$ ее степень в графе G_k.

Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, *окрестностью* множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A. *Окрестностью* подграфа H мы будем называть окрестность его множества вершин (т. е. $N_G(H) = N_G(V(H))$). Через $\overline{H}$ мы будем обозначать подграф $G - (V(H) \cup N_G(H))$. Другими словами, $\overline{H}$ – это подграф графа G, индуцированный множеством вершин, не входящих в H и не смежных с вершинами из H.

1.2. Разделяющие множества и фрагменты.

Определение 2. *Множество $T \subset V(G)$ называется* разделяющим, *если граф $G - T$ несвязен. Разделяющее множество, содержащее ровно k вершин, называется также k-*разделяющим. *Множество всех k-разделяющих множеств графа G мы будем обозначать $\mathfrak{T}_k(G)$. При $k = \kappa(G)$ мы будем писать $\mathfrak{T}(G)$ вместо $\mathfrak{T}_k(G)$.*

Будем говорить, что разделяющее множество T отделяет *подграф H графа G, если подграф H представляется в виде объединения не менее чем одной, но не всех компонент связности графа $G - T$. В этом случае мы будем также говорить, что множество T* отделяет *множество $V(H)$.*

Замечание 1. Заметим, что множество $N_G(H)$ отделяет подграф H в том и только в том случае, если $V(\overline{H}) \neq \varnothing$. В частности это означает, что для любого подграфа H графа G выполнено хотя бы одно из следующих двух утверждений: либо $V(\overline{H}) = \varnothing$, либо $|N_G(H)| \geqslant \kappa(G)$.

Определение 3. *Подграф H графа G называется* фрагментом, *если существует множество $T \in \mathfrak{T}(G)$, отделяющее подграф H. Фрагмент, отделяемый множеством T, называется также T-*фрагментом. *Связные T-фрагменты мы будем также называть T-*компонентами.

Дополнением *T-фрагмента H мы будем называть подграф $\overline{H}$.*

Замечание 2. Очевидно, что для любого T-фрагмента H его дополнение также будет T-фрагментом. Более того, дополнением фрагмента $\overline{H}$ будет H.

В дальнейшем, для удобства изложения, вместо “компонента связности” будем говорить просто “компонента”.

Определение 4. *Будем говорить, что разделяющее множество T графа G* разделяет *множество $X \subset V(G)$, если существуют вершины $u, v \in X \setminus T$, принадлежащие разным компонентам графа $G - T$. Также будем говорить, что множество T разделяет вершины x и y, если оно разделяет множество $\{x, y\}$.*

1.3. Минимальные и минимальные относительно стягивания k-связные графы. При исследовании структуры k-связных графов важную роль играют две элементарные операции: удаление и стягивание ребра (при стягивании ребра e из графа G удаляются оба его конца и вместо них добавляется новая вершина, смежная с теми и только с теми вершинами, которые были смежны хотя бы с одним из концов ребра e). Граф, получаемый из G стягиванием ребра e мы обозначим $G \cdot e$.

Определение 5. 1) *k-связный граф G называется* минимальным, *если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k-связным.*

2) *k-связный граф G называется* минимальным относительно стягивания, *если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G \cdot e$ не является k-связным.*

Замечание 3. Пусть G – минимальный k-связный граф, $xy \in E(G)$ и T – $(k-1)$-разделяющее множество графа $G - xy$. Тогда очевидно, что граф $G - xy - T$ состоит ровно из двух компонент связности, одна из которых содержит вершину x, а другая – y.

Одним из важнейших результатов в теории минимальных k-связных графов является следующая теорема.

Теорема 1 (W. Mader, [9])**.** *Пусть G – минимальный k-связный граф и C – множество вершин произвольного цикла в G. Тогда $C \cap V_k(G) \neq \varnothing$.*

Фактически это означает, что граф G_{k+1} является лесом (напомним, что через G_{k+1} мы обозначили индуцированный подграф графа G на множестве вершин, степени которых больше k).

Интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после того, как W. T. Tutte в работе [13] дал описание структуры трехсвязного графа в терминах удаления и стягивания ребер.

R. Halin в работе [7] доказал, что в любом минимальном k-связном графе есть вершина степени k и поставил вопрос об оценке количества таких вершин. Ответ на этот вопрос дал W. Mader в работе [10], где было доказано, что для любого минимального k-связного графа выполнено неравенство

$$v_k(G) \geqslant \frac{k-1}{2k-1}v(G) + \frac{2k}{2k-1}. \qquad (1)$$

Более того, эта оценка точная, что подтверждается бесконечной серией примеров.

С минимальными по стягиванию графами ситуация несколько сложнее. При $k \leqslant 3$ минимальным по стягиванию k-связным графом является только полный граф. Минимальные по стягиванию 4-связные графы были полностью классифицированы в работах M. Fontet [6] и Н. Мартинова [12]. В этих работах, в частности, было доказано, что все вершины любого такого графа имеют степень 4. Структура минимальных по стягиванию 5-связных графов исследовалась в большом числе работ. Заключительной в этом исследовании стала работа [2], в которой K. Ando и T. Iwase доказали, что для любого минимального по стягиванию 5-связного графа G выполнено неравенство $v_5(G) \geqslant \frac{1}{2}v(G)$, причем константу $\frac{1}{2}$ нельзя заменить на большую. Для минимальных по стягиванию 6- и 7-связных графов известные результаты значительно скромнее. В работе [3] K. Ando, A. Kaneko и K. Kawarabayashi доказали, что для любого минимального по стягиванию 6-связного графа G выполнено $v_6(G) \geqslant \frac{1}{7}v(G)$. В этой же работе приведена серия примеров минимальных по стягиванию 6-связных графов, в которых $v_6(G) = \frac{1}{2}v(G)$. Для 7-связных графов лучшим продвижением, по-видимому является результат M. Li, X. Yuan и J. Su, которые в работе [8] доказали, что для любого минимального по стягиванию 7-связного графа выполнено $v_7(G) \geqslant \frac{1}{22}v(G)$. При $k \geqslant 8$ на данный момент не доказано существование в минимальном по стягиванию k-связном графе даже одной вершины степени k.

Исследовались также и графы, одновременно обладающие обоими свойствами: минимальности и минимальности по стягиванию. Для таких графов долгое время лучшей нижней оценкой количества вершин степени k при $k > 4$ являлось неравенство (1), верное для всех минимальных k-связных графов. Однако недавно появились работы, в которых для минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов при $5 \leqslant k \leqslant 10$ были доказаны более сильные оценки. При

$k = 5$ лучшей на данный момент является оценка $v_5(G) \geqslant \frac{2}{3}v(G)$, полученная в работе [4]. Для $6 \leqslant k \leqslant 10$ в работах [15–17] было доказано, что $v_k(G) > \frac{1}{2}v(G)$. Бесконечные серии примеров, дающие нетривиальные верхние оценки при всех $k \geqslant 5$, были построены в работе [18].

1.4. C_3-критические минимальные 6-связные графы. W. Mader в работе [11] предложил следующее естественное обобщение понятия минимального по стягиванию графа.

Определение 6. *k-связный граф G называется C_m-критическим, если для любого полного подграфа H графа G, такого, что $v(H) \leqslant m$, существует k-разделяющее множество, содержащее $V(H)$.*

Пусть k-связный граф G не является полным. Тогда он является минимальным по стягиванию тогда и только тогда, когда он является C_2-критическим. Таким образом, обсуждавшийся выше вопрос о количестве вершин степени k в минимальном по стягиванию k-связном графе эквивалентен аналогичному вопросу для C_2-критических графов. В данной работе мы делаем первый шаг в исследовании вопроса о количестве вершин степени k в C_m-критических графах при $m > 2$.

Замечание 4. Отметим, что C_1-критические k-связные графы – это графы, которые перестают быть k-связными при удалении любой вершины. Такие графы обычно называют просто *критическими*. В работе [5] было показано, что при $k > 3$ существуют критические k-связные графы, не содержащие ни одной вершины степени k.

В работе [11] доказано, что C_3-критические k-связные графы могут существовать только при $k \geqslant 6$. Так что целью данной работы будет исследование структуры C_3-критических минимальных 6-связных графов. Основным объектом исследований будет подграф G_6 (индуцированный подграф на множестве вершин степени 6) C_3-критического минимального 6-связного графа G. Мы докажем, что каждая компонента подграфа G_6 содержит цикл и выведем из этого следующее неравенство: $v_6(G) > \frac{5}{9}v(G)$.

§2. Некоторые вспомогательные леммы

В этом разделе мы перечислим доказанные ранее леммы, которые понадобятся нам в данной работе, и докажем несколько новых лемм.

2.1. Зависимые и независимые разделяющие множества.

Определение 7. *Назовем разделяющие множества R и T графа G* независимыми*, если R не разделяет T, и T не разделяет R. В противном случае мы будем называть эти множества* зависимыми*.*

Лемма 1 (см. [14])**.** *Пусть k-разделяющие множества R, T таковы, что R не разделяет T. Тогда T не разделяет R (то есть, эти множества независимы).*

2.2. Лемма о кресте. Пусть T_1, T_2 – пара зависимых k-разделяющих множеств k-связного графа G. Рассмотрим T_1-фрагменты H_{21} и $H_{22} = \overline{H_{21}}$, а также T_2-фрагменты H_{11} и $H_{12} = \overline{H_{11}}$. Введем следующие обозначения для пересечений множеств вершин этих фрагментов друг с другом и с множествами T_1, T_2 (см. рисунок 1)

- $P = T_1 \cap T_2$;
- $T_{ij} = T_i \cap V(H_{ij})$;
- $S_{ij} = V(H_{1i}) \cap V(H_{2j})$;
- $R_{ij} = T_{1i} \cup P \cup T_{2j}$.

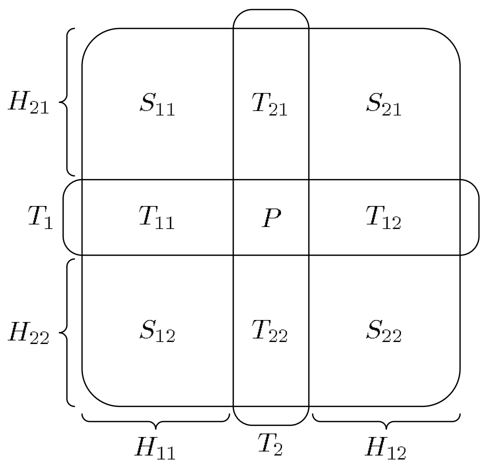

Рис. 1. стандартные обозначения для пересечений фрагментов друг с другом и с разделяющими множествами.

Эти обозначения мы будем считать стандартными и использовать в дальнейших рассуждениях. Отметим, что для любых $i, j \in \{1, 2\}$ если

$S_{ij} \neq \varnothing$, то $N_G(S_{ij}) \subset R_{ij}$. Множества S_{ij} и S_{kl} мы будем называть *соседними*, если они отличаются заменой ровно одного индекса (т.е. либо $i = k, j \neq l$, либо $i \neq k, j = l$.

Лемма 2 (о кресте)**.** *Пусть* $R_{11}, R_{21} \notin \mathfrak{T}_k(G)$. *Тогда существуют* $i, j \in \{1, 2\}$, *такие, что* $T_{ij} = V(H_{ij})$ *и* $|T_{ij}| \leqslant \frac{k-|P|}{2}$.

Доказательство. Заметим, что $|R_{11}| + |R_{22}| = 2k$. Пусть $S_{11} \neq \varnothing$. Тогда, поскольку множество R_{11} отделяет S_{11}, но не является k-разделяющим, имеем $|R_{11}| > k$, следовательно, $|R_{22}| < k$, откуда $S_{22} = \varnothing$. Таким образом, хотя бы одно из множеств S_{11} и S_{22} пусто. Аналогично, хотя бы одно из множеств S_{12} и S_{21} пусто. Тогда среди множеств S_{ij} найдутся два соседних пустых множества.

Не умаляя общности будем считать, что $S_{11} = S_{12} = \varnothing$ (с этого момента мы не будем пользоваться тем, что множества R_{11} и R_{21} не являются k-разделяющими: мы будем пользоваться только тем, что среди S_{ij} есть два соседних пустых множества, а это свойство сохраняется при смене нумерации). Тогда $T_{11} = V(H_{11})$. Далее мы рассмотрим следующие три случая: среди множеств S_{ij} есть 2, 3 или 4 пустых.

1. Пусть $S_{21} \neq \varnothing$ и $S_{22} \neq \varnothing$. Тогда

$$2k \leqslant |R_{21}| + |R_{22}| = |T_2| + |P| + 2|T_{12}| = k + |P| + 2|T_{12}|,$$

откуда $|P| + 2|T_{12}| \geqslant k$, следовательно, $|P| + 2|T_{11}| \leqslant k$, то есть $|T_{11}| \leqslant \frac{k-|P|}{2}$, что и требовалось.

2. Пусть S_{22} – единственное непустое множество среди S_{ij}. Тогда $T_{11} = V(H_{11})$, $T_{21} = V(H_{21})$ и

$$|T_{11}| + |T_{21}| + |P| = |R_{11}| = 2k - |R_{22}| \leqslant k,$$

следовательно, $\min(|T_{11}|, |T_{21}|) \leqslant \frac{k-|P|}{2}$.

3. Пусть все множества вида S_{ij} пусты. Тогда $T_{11} = V(H_{11})$, $T_{12} = V(H_{12})$, и $|T_{11}| + |T_{12}| + |P| = k$, откуда

$$\min\left(|T_{11}|, |T_{12}|\right) \leqslant \frac{k - |P|}{2}.$$

□

2.3. Леммы о компонентах и окрестностях. Отметим, что любой C_3-критический граф является также и минимальным по стягиванию, то есть леммы, доказанные ранее для минимальных по стягиванию графов мы можем применять и к C_3-критическим графам.

Лемма 3 (см. [14]). *Пусть k-разделяющее множество R отделяет от k-связного графа G компоненту G_1. Тогда каждая из вершин множества R смежна хотя бы с одной из вершин компоненты G_1.*

Лемма 4 (см. [16, лемма 6]). *Пусть G – k-связный граф, T – k-разделяющее множество в G, H – произвольная компонента связности $G-T$. Тогда для любого $S \subset T$ верно либо $|S| \leqslant |N_G(S) \cap V(H)|$, либо $V(H) \subset N_G(S)$.*

Лемма 5 (см. [15, лемма 3]). *Пусть G – минимальный k-связный граф и $x, y \in V(G)$ – смежные вершины. Тогда если $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$, то степени всех вершин, входящих в $N_G(y) \setminus \{x\}$, равны k.*

Лемма 6 (см. [15, лемма 4]). *Пусть G – минимальный k-связный граф. Предположим, что k-разделяющее множество T, содержащее смежные вершины x и y, отделяет множество, состоящее из не более чем двух вершин. Тогда вершина x смежна хотя бы с одной вершиной степени k.*

Лемма 7 (см. [17, лемма 5]). *Пусть G – минимальный k-связный граф. Предположим, что множество $H \subset V(G)$ отделяется k-разделяющим множеством T. Тогда, если $|H| = 2$, то H содержит не более одной вершины степени больше k.*

Лемма 8 (см. [15, лемма 5]). *Пусть G – минимальный относительно стягивания k-связный граф. Степень вершины $a \in V(G)$ равна k. Тогда существует k-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, содержащую не более $\frac{k-1}{2}$ вершин.*

Замечание 5. 1) Строго говоря, в лемме 5 работы [15] было дополнительное условие $v(G) \geqslant 2k$, однако очевидно, что в случае $v(G) < 2k$ утверждение этой леммы также верно.

2) В нашем случае $k = 6$, то есть утверждение леммы 8 означает, что найдется 6-разделяющее множество, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, содержащую не более двух вершин.

Следующая лемма впервые была доказана С. А. Образцовой [15, лемма 6]. Позже ее независимо доказали K. Ando, S. Fujita и K. Kawarabayashi [1].

Лемма 9. *Пусть G – минимальный и минимальный относительно стягивания 6-связный граф и $a \in V_6(G)$. Тогда $N_G(a) \cap V_6(G) \neq \varnothing$.*

Замечание 6. Строго говоря, в лемме 6 работы [15] было дополнительное условие $v(G) \geqslant 12$. Однако единственным местом, где это условие использовалось, была ссылка на лемму 8 (легко видеть, что лемма 9 непосредственно следует из лемм 6 и 8), в которой, как уже отмечалось в замечании 5, можно обойтись без ограничения на число вершин.

Лемма 10. *Пусть G – C_3-критический k-связный граф, $x \in T \in \mathfrak{T}_k(G)$ и множество T отделяет компоненту, состоящую из двух вершин u и v. Тогда существует множество $R \in \mathfrak{T}_k(G)$, такое, что $\{u, v, x\} \subset R$.*

Доказательство. В случае, если вершина x смежна с обеими вершинами u и v, утверждение леммы очевидно следует из того, что граф G – C_3-критический. Поэтому предположим не умаляя общности, что вершина x смежна с u и несмежна с v (см. рисунок 2). Рассмотрим k-разделяющее множество R, такое, что $\{x, u\} \subset R$. Очевидно, что множества T и R зависимы, поскольку в противном случае $R = N_G(v) \not\ni x$. Предположим, что $v \notin R$. Тогда существует вершина $y \in T$, такая, что множество R разделяет v и y. Следовательно, вершина v не смежна с y. Поскольку v не смежна также и с x, это означает, что $d(v) \leqslant k-1$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

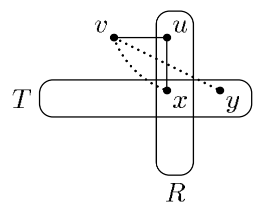

Рис. 2. пунктирными линиями обозначены заведомо отсутствующие в графе G ребра.

§3. О структуре подграфа G_6

В этом разделе мы докажем, что количество ребер подграфа G_6 не меньше, чем количество его вершин. Для этого достаточно доказать, что каждая компонента связности подграфа G_6 содержит цикл. Для компонент, в которых нет висячих вершин, это утверждение очевидно. Кроме того, по лемме 9 в подграфе G_6 нет изолированных вершин. Поэтому нам достаточно рассмотреть вершину $a \in V_6$, такую, что $d_6(a) = 1$ и доказать, что содержащая ее компонента связности A графа G_6 содержит цикл.

Лемма 11. *Пусть G – C_3-критический 6-связный граф и $a \in V_6(G)$ – такая вершина, что $d_6(a) = 1$. Тогда существует множество $T \in \mathfrak{T}_6(G)$, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с a вершин, которое отделяет компоненту, состоящую ровно из двух вершин.*

Доказательство. По лемме 8 существует 6-разделяющее множество, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, состоящую не более, чем из двух вершин. Если эта компонента состоит ровно из двух вершин, то мы получили требуемое. Пусть она состоит из единственной вершины b. Поскольку $d_6(a) = 1$, вершина b – единственная смежная с a вершина степени 6.

Пусть x – отличная от b вершина, смежная с a. Обозначим через $\mathfrak{S}_x$ множество таких $T \in \mathfrak{T}_6(G)$, что $\{a, x\} \subset T$ и, если вершины b и x смежны, то $b \in T$. Пусть также

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{x \in N_G(a) \setminus \{b\}} \mathfrak{S}_x.$$

Отметим, что поскольку граф G является C_3-критическим, все наборы $\mathfrak{S}_x$ непусты.

Для каждого множества $T \in \mathfrak{S}$ рассмотрим все T-компоненты, которые не содержат вершину b, и выберем из всех рассмотренных компонент наименьшую по числу вершин. Обозначим отделяющее ее 6-разделяющее множество через T_1, саму эту компоненту через H_{21}, а ее дополнение через $H_{22} = \overline{H_{21}}$. Пусть $T_1 \in \mathfrak{S}_{x_1}$. По лемме 3 вершина a смежна с некоторой вершиной $x_2 \in V(H_{21})$, причем $x_2 \neq b$, поскольку $b \notin V(H_{21})$. Рассмотрим произвольное множество $T_2 \in \mathfrak{S}_{x_2}$. Очевидно, что множества T_1 и T_2 зависимы, в противном случае получим противоречие с минимальностью компоненты H_{21}.

Обозначим через H_{11} и H_{12} два дополняющих друг друга T_2-фрагмента и обозначим стандартным образом пересечения множеств вершин фрагментов H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22} друг с другом и с множествами T_1 и T_2. Докажем, что если вершина b смежна с x_2, то $b \in P$. Действительно, в этом случае $b \in T_2$, поскольку $T_2 \in \mathfrak{S}_{x_2}$. Кроме того, $b \in T_1$ так как иначе x_2 и b находятся в разных компонентах графа $G - T_1$. (См. рисунок 3a; на рисунках 3b и 3c изображены возможные варианты расположения вершины b когда она не смежна с x_2). Далее, предположим, что $R_{i1} \in \mathfrak{T}_6(G)$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда по доказанному выше $R_{i1} \in \mathfrak{S}_{x_2}$, что противоречит минимальности компоненты H_{21}.

Таким образом, $R_{11}, R_{21} \notin \mathfrak{T}_6(G)$, откуда по лемме 2 одно из множеств T_i отделяет компоненту H, состоящую не более, чем из двух вершин. Заметим, что H не может состоять ровно из одной вершины: если $V(H) = \{b\}$, то b смежна с x_i и, следовательно, $b \in T_i$, если же $V(H) = \{v\}$ и $v \neq b$, то v — отличная от b вершина степени 6, смежная с a. Таким образом, $|H| = 2$ и мы нашли требуемую компоненту. $\square$

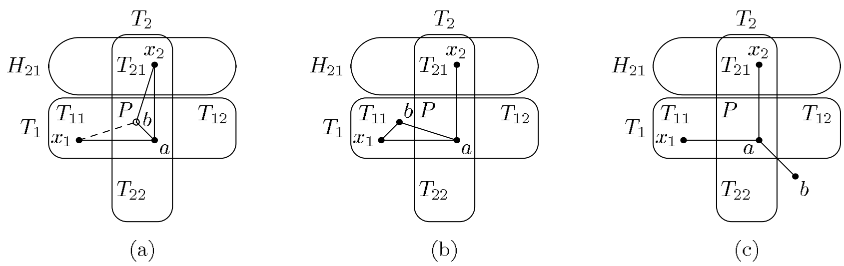

Рис. 3. Возможные варианты расположения вершины b.
(a) Вершина b смежна с x_2 и, возможно, с x_1, тогда $b \in P$;
(b) вершина b не смежна с x_2, но смежна с x_1, тогда $b \in T_1$, но, возможно, $b \notin T_2$;
(c) вершина b не смежна ни с x_1, ни с x_2, тогда она может не принадлежать ни T_1, ни T_2.

Лемма 12. *Пусть G – C_3-критический минимальный 6-связный граф и A – не содержащая циклов компонента его подграфа G_6 (т. е.*

индуцированного подграфа на множестве вершин степени 6*). Рассмотрим вершины* $b \in V(A)$, $c \in N_G(b)$, *множество* $T \in \mathfrak{T}_6(G)$ *и* T*-компоненту* H, *такие, что* $\{b,c\} \subset T$ *и* $v(H)=2$. *Тогда*

1) $V(H) \cap V(A) \neq \varnothing$;

2) *существуют множество* $S \in \mathfrak{T}_6(G)$ *и* S*-компонента* F, *такие, что* $V(H) \subset S$, $v(F)=2$ *и одна из вершин компоненты* F *имеет степень* 6, *а другая — степень* 7.

Доказательство. 1) Пусть $V(H)=\{u,v\}$. По лемме 7 хотя бы одна из вершин u и v имеет степень 6. Не умаляя общности, будем считать, что $d_G(u)=6$. Докажем, что $u \in V(A)$. Действительно, в случае, если $d_G(v)=6$, это очевидно следует из леммы 3, а если $d_G(v)=7$ и $bu \notin E(G)$, то по лемме 5 все вершины множества T, смежные с u, имеют степень 6, и тогда $d_G(c)=6$ и c смежна с b и u.

2) Пусть $x \in N_G(u) \cap T$. Обозначим через $\mathfrak{S}_x$ множество таких $S \in \mathfrak{T}_6(G)$, что $S \supset \{u,v,x\}$. Пусть также

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{x \in N_G(u) \cap T} \mathfrak{S}_x .$$

Заметим, что по лемме 10 все наборы $\mathfrak{S}_x$ непусты. Отметим также, что $N_G(u) \cap T = N_G(u) \setminus \{v\}$.

Рассмотрим множество $S \in \mathfrak{S}_x$ и S-компоненту F. Докажем, что $|V(F) \cap T| \geqslant 2$ и компонента F содержит вершину степени 7. Заметим сначала, что как минимум одна из вершин v и x имеет степень 6. Действительно, если $d_G(v)=7$, то вершины u и v удовлетворяют условию леммы 5, откуда $d_G(x)=6$. Тогда множество S содержит две смежные вершины подграфа A: одной из них будет u, а другой — v или x. По лемме 3 каждая из этих вершин смежна с вершиной компоненты F. Соединив полученные вершины путем в компоненте F, мы получим цикл, состоящий из вершин подграфа A и вершин компоненты F. Поскольку в подграфе A циклов нет, мы получаем, что в компоненте F есть вершина степени 7. Тогда $v(F) \geqslant 2$. Далее, применив лемму 4 к множеству S и его подмножеству $V(H)$, имеем $|V(F) \cap T| = |V(F) \cap N_G(H)| \geqslant 2$. Заметим также, что если $v(F)=2$, то по лемме 7 в компоненте F есть вершина степени 6, следовательно, множество S и компонента F нам подходят.

Итак, нам осталось доказать, что существуют множество $S \in \mathfrak{S}$ и S-компонента F, такие, что $v(F) \leqslant 2$. Рассмотрим произвольную вершину $x_1 \in N_G(u) \cap T$ и множество $T_1 \in \mathfrak{S}_{x_1}$. Очевидно, что одна из компонент графа $G - T_1$ содержит не более двух вершин множества T. Обозначим эту компоненту через H_{21}, а ее дополнение – через $H_{22} = \overline{H_{21}}$. По лемме 3 существует вершина $x_2 \in N_G(u) \cap V(H_{21}) \subset T$. Рассмотрим множество $T_2 \in \mathfrak{S}_{x_2}$. Очевидно, что оно зависимо с T_1, поскольку в противном случае компонента графа $G - T_2$, не содержащая вершин T_1, содержит не более одной вершины множества T. Обозначим через H_{11} и H_{12} два дополняющих друг друга T_2-фрагмента и обозначим стандартным образом пересечения множеств вершин фрагментов H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22} друг с другом и с множествами T_1 и T_2 (см. рисунок 4).

Пусть $n \in \{1, 2\}$. Заметим, что $|S_{n1} \cap T| \leqslant 1$, следовательно, $R_{n1} \notin \mathfrak{S}$. Тогда, учитывая что $\{u, v, x_2\} \subset R_{n1}$, мы получаем $R_{n1} \notin \mathfrak{T}_6(G)$. Следовательно, по лемме 2 существуют $i, j \in \{1, 2\}$, такие, что $T_{ij} = V(H_{ij})$ и $|T_{ij}| \leqslant 2$, что и требовалось. □

Лемма 13. *Пусть G – C_3-критический минимальный 6-связный граф, $a \in V_6(G)$ – такая вершина, что $d_6(a) = 1$, и A – компонента графа G_6, содержащая a. Тогда компонента A содержит цикл.*

Доказательство. Предположим противное. По лемме 11 существует множество $T \in \mathfrak{T}_6(G)$, содержащее a и смежную с a вершину b, которое отделяет компоненту H, такую, что $v(H) = 2$. Применив лемму 12 к вершинам a, b, множеству T и компоненте H мы получим, что $V(H) \cap V(A) \neq \varnothing$. Кроме того, существуют множество $S_1 \in \mathfrak{T}_6(G)$ и S_1-компонента H_1, такие, что $V(H) \subset S_1$, $v(H_1) = 2$ и одна из вершин

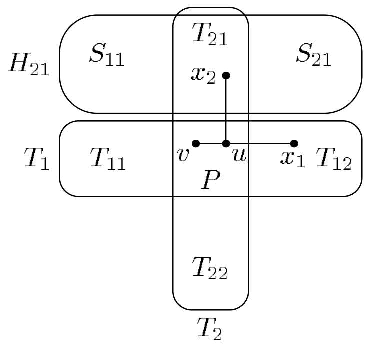

Рис. 4. разбиение графа парой зависимых множеств T_1 и T_2.

компоненты H_1 имеет степень 6, а другая — степень 7. Обозначим первую из этих двух вершин через u_1, а вторую — через v_1. Вершины компоненты H обозначим u и v, так, что $u \in V(A)$. Применив лемму 12 к вершинам u, v, множеству S_1 и компоненте H_1 мы получим, что существуют множество $S_2 \in \mathfrak{T}_6(G)$ и S_2-компонента H_2, такие, что $V(H_1) \subset S_2$, $v(H_2) = 2$ и одна из вершин компоненты H_2 имеет степень 7. Но тогда эта вершина должна быть смежна с u_1, а по лемме 5 единственной вершиной, смежной с u_1 и имеющей степень 7, является v_1. Противоречие. □

Следствие 1. *Пусть G – C_3-критический минимальный 6-связный граф. Тогда $e_6(G) \geqslant v_6(G)$.*

Доказательство. Из леммы 13 очевидно следует, что в каждой компоненте подграфа G_6 ребер не меньше чем вершин. Просуммировав эти неравенства по всем компонентам, получим требуемое. □

§4. Оценка количества вершин степени 6

Теорема 2. *Пусть G – C_3-критический минимальный 6-связный граф. Тогда $v_6(G) > \frac{5}{9}v(G)$.*

Доказательство. По следствию 1 мы имеем $e_6(G) \geqslant v_6(G)$. С другой стороны, по теореме 1 подграф G_7 является лесом, следовательно, $e_7(G) \leqslant v_7(G) - 1$. Далее мы двумя способами оценим величину $e_{6,7}(G)$. Отметим, что $e_{6,7}(G)$ – это количество ребер, один конец которых имеет степень 6, а другой – хотя бы 7. Заметим, что

$$e_{6,7}(G) = 6v_6(G) - 2e_6(G) \leqslant 4v_6(G). \tag{2}$$

С другой стороны,

$$e_{6,7}(G) \geqslant 7v_7(G) - 2e_7(G) \geqslant 5v_7(G) + 2. \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) немедленно следует, что

$$4v_6(G) \geqslant 5v_7(G) + 2 = 5v(G) - 5v_6(G) + 2,$$

откуда

$$v_6(G) \geqslant \frac{5}{9}v(G) + \frac{2}{9} > \frac{5}{9}v(G).$$

□

Литература

1. K. Ando, S. Fujita, K. Kawarabayashi, *Minimally contraction-critically* 6*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **312** no. 3 (2012), 671–679.
2. K. Ando, T. Iwase, *The number of vertices of degree* 5 *in a contraction-critically* 5*-connected graph.* — Discrete Mathematics **311** (2011), 1925–1939.
3. K. Ando, A. Kaneko, K. Kawarabayashi, *Vertices of degree* 6 *in a contraction critically* 6*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **273** (2003), 55–69.
4. K. Ando, C. Qin, *Some structural properties of minimally contraction-critically* 5*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **311** (2011), 1084–1097.
5. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically* n*-connected graphs.* — Proc. of the Amer. Math. Soc. **32** (1972), 63–68.
6. M. Fontet, *Graphes* 4*-essentiels.* — C. R. Acad. Se. Paris, 287, serie A (1978), 289–290.
7. R. Halin, *A theorem on* n*-connected graphs.* — J. Comb. Theory **7** (1969), 150–154.
8. M. Li, X. Yuan, J. Su, *The number of vertices of degree* 7 *in a contraction-critical* 7*-connected graph.* — Discrete Mathematics **308** (2008), 6262–6268.
9. W. Mader, *Ecken Vom Gard* n *in minimalen* n*-fach zusammenhangenden Graphen* (German). — Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
10. W. Mader, *Zur Struktur minimal* n*-fach zusammenhängender Graphen.* (German). — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 49–69.
11. W. Mader, *Generalization of critical connectivity of graphs.* — Discrete Mathematics **72** (1988), 267–283.
12. N. Martinov, *A recursive characterization of the* 4*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **84** (1990), 105–108.
13. W. T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
14. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре* k*-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
15. С. А. Образцова, *О локальной структуре* 5 *и* 6*-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 88–96.
16. С. А. Образцова, А. В. Пастор, *О локальной структуре* 7 *и* 8*-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 97–111.
17. С. А. Образцова, *О локальной структуре* 9 *и* 10*-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 157–197.
18. С. А. Образцова, А. В. Пастор, *О вершинах степени* k *минимальных и минимальных относительно стягивания* k*-связных графов: верхние оценки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 198–210.

Pastor A. V. About vertices of degree 6 of C_3-critical minimal 6-connected graph.

In this paper we research C_3-critical minimal 6-connected graphs, i.e. such 6-connected graphs, that lost there 6-connectivity when we delete any edge and in which any clique on at most 3 verticies is contained in a

6-cutset. We prove that more than $\frac{5}{9}$ of all verticies of a such graph has degree 6.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург;
Санкт-Петербургский
государственный политехнический
университет
E-mail: pastor@pdmi.ras.ru

Поступило 20 октября 2014 г.