

Г. В. Ненашев

О ПРОБЛЕМЕ ТИПА ХИВУДА ДЛЯ КАРТ С КАСАНИЯМИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о том, как связаны между собой возможность нарисовать граф на различных типах поверхностей без пересечения ребер и хроматические характеристики графа, являются одними из самых старых в теории графов. Самая известная задача подобного рода – проблема четырех красок. В общей постановке задачи основные результаты – это найденная в [5] верхняя оценка хроматического числа графа, который можно изобразить без пересечений на поверхности рода g ($g \geq 1$). П. Дж. Хивуд доказал, что хроматическое число такого графа не превосходит $\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$. Наиболее сложная часть этой теории сделана была в [7], где показано, что эти оценки точные.

Как известно, изначальная формулировка проблемы 4-х красок была про покраску стран на карте, а формулировка с графом – это всего лишь двойственная задача. Теперь вспомним изначальную проблему Хивуда в терминах карт и стран: дана поверхность рода g , нам надо найти минимальное число цветов в которое заведомо можно покрасить любое разбиение поверхности на связные области так, чтобы не было двух областей одного цвета, имеющих общую часть границы, гомеоморфную отрезку. Эта задача, очевидно, эквивалентна следующей: мы рассматриваем разбиения, в которых в каждой точке сходятся максимум 3 области и красим их так, чтобы все касающиеся области были разного цвета. Мы обобщим этот результат на случай, когда в каждой точке сходятся не более k областей.

Определение 1. *В разбиении поверхности на области две области называются касающимися, если их границы имеют общую точку. Эта точка является точкой касания.*

Ключевые слова: хроматическое число, плоские графы, графы на поверхностях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No. 14-01-00156 А и стипендии им. В. А. Рохлина.

Определение 2. Пусть k, g – неотрицательные целые числа. Тогда $B_{k,g}$ – это множество всех таких разбиений поверхности рода g на области, что в каждой точке касаются не более k областей.

Для случаев $k = 4$ и мы также будем иметь “двойственную” формулировку, а для случая $k = 5$ – почти “двойственную”.

Определение 3. Пусть k – неотрицательное целое число. Назовём граф k -планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более чем k других.

Для случая 1-планарных графов точную верхнюю оценку на хроматическое число нашёл Бородин в работе [4]: он доказал, что хроматическое число не превосходит 6 (пример с ровно 6-ю строится легко, достаточно изобразить K_6).

Следующее определение обобщает определение k -планарного графа на случай поверхности рода g .

Определение 4. Пусть k, g – неотрицательные целые числа. Тогда класс графов $A_{k,g}$ – это графы без петель и кратных ребер, которые можно изобразить на поверхности рода g так, что каждое ребро пересекает не более чем k других.

Определение 5. 1-изображением графа называется его изображение на поверхности такое, что любое ребро имеет максимум одно пересечение.

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Количество вершин графа G мы будем обозначать через $v(G)$, количество рёбер – через $e(G)$. Сокращённые обозначения e и v обозначают количество ребер и вершин для графа понятного из контекста (обычно это граф, полученный после добавления всех ребер в изображении).

$\chi(G)$ – хроматическое число графа G , то есть минимальное возможное число цветов в правильной раскраске его вершин. Пусть \mathcal{C} – некоторый класс графов или набор разбиений поверхности на области. Обозначим через $\chi(\mathcal{C})$ минимальное число цветов, в которое можно покрасить правильным образом любой граф (области) из класса \mathcal{C} .

Определение 6. Ребро в изображении называем простым, если оно не пересекает другие ребра.

Гранями мы называем области, на которые делят нашу поверхность простые ребра.

Пара кратных ребер в изображении называется эквивалентными, если существует гомотопия, переводящая одно ребро в другое и не задевающая вершины графа.

В части 2 получена верхняя оценка для $\chi(\mathcal{A}_{1,g})$ и $\chi(\mathcal{B}_{4,g})$. Мы предполагаем, что эта оценка точна. В части 4 написано об идее построения примеров. В частности, построены несколько примеров, для которых верхняя оценка точна. В части 3 получена оценка для общего случая.

Замечание. По мнению автора 4-я часть статьи наиболее интересна в идейном плане.

§2. СЛУЧАИ $\mathcal{A}_{1,g}$ И $\mathcal{B}_{4,g}$

Теорема 1. *Для любого $g \geq 0$ выполнено равенство $\chi(\mathcal{A}_{1,g}) = \chi(\mathcal{B}_{4,g})$*

Доказательство. Рассмотрим любое разбиение поверхности рода g из класса $\mathcal{B}_{4,g}$. Теперь построим по нему граф: в каждой области ставим точку, соединяем области по кратчайшей через их общую границу. Очевидно, получится граф из $\mathcal{A}_{1,g}$.

Теперь построим по графу из $\mathcal{A}_{1,g}$ разбиение из $\mathcal{B}_{4,g}$ с неменьшим хроматическим числом. В работе [6] доказано, что граф из $\mathcal{A}_{1,g}$ имеет изображение без самопересечений ребер такое, что в нем каждая пара ребер пересекается максимум один раз. Отметим на каждом ребре точку: если ребро с кем-то пересекалось, то точку пересечения, а иначе – любую точку. Будем строить области: возьмем вершину и ее полуребра (ребра до отмеченных точек), теперь возьмем окрестность этой звезды, так, чтобы отмеченные точки по-прежнему лежали на границе.

Мы получили набор областей на поверхности с тем же графом (вершины – области, ребра – касание областей). Остальные области этого разбиения могут только увеличить его хроматическое число. \square

Теорема 2 (см. [6]). *Пусть граф $G \in \mathcal{A}(1,g)$, $g \geq 1$. Тогда выполняется неравенство $\chi(G) \leq \frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}$.*

Отметим, что доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 5.

Введем функцию \mathcal{F} :

- $\mathcal{F}(n) = \frac{n^2-9n+16}{16}$, для n нечетного.

- $\mathcal{F}(n) = \frac{3n^2 - 26n + 48}{48}$, для n четного.

Теорема 3. Если K_n ($n \geq 5$) можно 1-изобразить на поверхности рода $g \geq 1$, то выполнено неравенство $g \geq \mathcal{F}(n)$.

Доказательство. Если n – нечетное, то утверждение теоремы следует из теоремы 2. Поскольку количество вершин в случае полного графа равно хроматическому числу, что в свою очередь не более чем $\frac{9 + \sqrt{17 + 64g}}{2}$, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - 9n + 16}{16} &\leq \frac{\left(\frac{9 + \sqrt{17 + 64g}}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{9 + \sqrt{17 + 64g}}{2}\right) + 16}{16} \\ &= \frac{\frac{81 + 17 + 64g}{4} - \frac{81}{2} + 16}{16} = g. \end{aligned}$$

Случай n четного. Рассмотрим наше 1-изображение, и проведем все возможные ребра, так чтобы не появилось эквивалентных, и по-прежнему на каждом ребре было максимум одно пересечение, пусть всего ребер теперь e .

Пусть Δ – количество граней-треугольников в полученном изображении. Грани, отличные от треугольников, являются четырехугольниками с диагоналями (в остальных гранях мы, очевидно, можем провести еще ребра). Пусть e' – количество ребер после стирания одной диагонали в каждом четырехугольнике, тогда $e' = 3(n - 2 + 2g)$ по формуле Эйлера.

Заметим, что $\frac{4}{3}e' = e + \frac{\Delta}{2}$. Это можно понять из формулы Эйлера. После умножения на $4/3$ равенства на e' мы получим:

$$e + \frac{\Delta}{2} = \frac{4}{3}e' = 4(n - 2 + 2g).$$

Разделим каждую $\frac{1}{2}$ из $\frac{\Delta}{2}$ поровну между вершинами соответствующего треугольника, а каждую 1, соответствующую ребру, мы разделим между вершинами. В каждую вершину мы отправили хотя бы $\frac{n-1}{2} + \frac{1}{6}$, так как степень хотя бы $n - 1$, а если она ровно $n - 1$, то вершина попала хотя бы в один треугольник (иначе простые и непростые ребра чередуются, а $n - 1$ – число нечетное). Следовательно:

$$\frac{n(n - 1 + \frac{1}{3})}{2} \leq e + \frac{\Delta}{2} \leq 4(n - 2 + 2g).$$

А из этого очевидно следует наше неравенство. \square

Гипотеза 1. Пусть g – минимальное такое, что K_n можно 1-изобразить на поверхности рода g . Тогда выполнено равенство $g = \lceil \mathcal{F}(n) \rceil$.

Гипотеза 2. $\chi(\mathcal{A}_{1,g})$ (где $g \geq 1$) равно максимальному числу n такому, что $g \geq \mathcal{F}(n)$.

Теорема 4. $\chi(\mathcal{A}_{1,g})$ (где $g \geq 1$) не больше максимального n такого, что $g \geq \mathcal{F}(n)$.

Доказательство. Пусть не так, то есть $\chi(\mathcal{A}_{1,g}) = n$ и $g < \mathcal{F}(n)$. Из теоремы 2 следует, что $g \geq \frac{n^2 - 9n + 16}{16}$, так как подставив в неравенство вместо g выражение $\frac{n^2 - 9n + 16}{16}$ мы получим равенство. Значит, n – четное и

$$\frac{3n^2 - 26n + 48}{48} > g \geq \frac{3n^2 - 27n + 48}{48}.$$

Рассмотрим минимальный по количеству вершин контрпример. Пусть в нем v вершин. Тогда

$$\frac{nv}{2} \leq e \leq 4(v - 2 + 2g) < 4 \left(v - 2 + \frac{3n^2 - 26n + 48}{24} \right).$$

Очевидно, что $n \neq v$, значит $v = n + k$ для некоторого $k > 0$. Преобразуем неравенство:

$$\frac{n(n+k)}{2} < 4 \left(n+k-2 + \frac{3n^2 - 26n + 48}{24} \right),$$

$$n(n+k) < 8(n+k-2) + \frac{3n^2 - 26n + 48}{3},$$

$$nk < 8(n+k) - \frac{26n}{3},$$

$$0 < -nk + 8k - \frac{2n}{3},$$

$$0 < \left(k + \frac{2}{3} \right) (8 - n) - \frac{16}{3}.$$

Так как уже для тора будет $n = 9$, правая часть последнего неравенства меньше 0, противоречие. \square

§3. СЛУЧАЙ $k > 4$

Теорема 5. Выполняется неравенство

$$\chi(\mathcal{B}_{k,g}) \leq \frac{2k + 1 + \sqrt{4k^2 - 12k + 16gk + 1}}{2}$$

при $k \geq 3$ и $g \geq 1$.

Сначала докажем лемму.

Лемма 1. Для разбиения $P \in \mathcal{B}_{k,g}$ (где $k \geq 3, g \geq 1$) выполнено неравенство:

$$e(P) \leq k \cdot (v(P) - 2 + 2g).$$

Доказательство. Рассмотрим граф, соответствующий разбиению, поставим в каждой области вершину (\otimes , см. рисунок 1). Сначала проведем все ребра через границы областей (на рисунке пунктирно-точечная линия), а потом в получившихся косых многоугольниках проведем все диагонали (пунктирные). Мы получим граф, соответствующий касаниям этих областей, возможно с кратными ребрами (но без эквивалентных). Это не повлияет на хроматическое число.

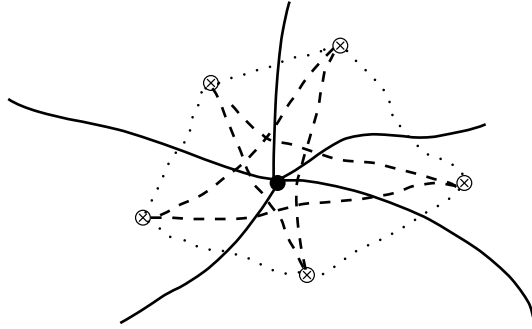


Рис. 1

Разобьем все проведенные ребра по граням полученного графа. Простые ребра идут в два “многоугольника” с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Сотрем некоторые диагонали в каждой грани так, чтобы получилась полная триангуляция.

Рассмотрим некоторый t -угольник. В изначальном графе у нас в этом t -угольнике $t/2 + t(t-3)/2$ ребра, после стирания до триангуляции стало $t/2 + t - 3$ ребер.

Просуммировав последние числа, мы получим $3(v - 2 + 2g)$ (число ребер в триангуляции поверхности рода g с v вершинами), а просуммировать первые числа, получим e (с учетом кратности). Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{e}{3(v - 2 + 2g)} &\leq \max \left(\frac{t/2 + t(t-3)/2}{t/2 + t - 3} \right) = \max \left(\frac{t(t-2)}{3t-6} \right) \\ &= \max \left(\frac{t}{3} \right) \leq \frac{k}{3}, \end{aligned}$$

то $e \leq k(v - 2 + 2g)$, лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 5. Пусть G – минимальный граф (по количеству вершин), который соответствует некоторому разбиению из $\mathcal{B}_{k,g}$ с хроматическим числом $n > 2k$ (если $n \leq 2k$, то неравенство из условия теоремы выполнено). По минимальности графа G ,

$$\frac{(n-1)v}{2} \leq e.$$

Из леммы 1 следует $e \leq k(v - 2 + 2g)$. Значит,

$$(n-1-2k)v \leq 2k(-2+2g).$$

Так как $n - 2k > 0$, а $v \geq n$, то

$$(n-1-2k)n \leq 2k(-2+2g),$$

отсюда получаем, что

$$n^2 + n(-1-2k) + 4k - 4gk \leq 0.$$

Это квадратное неравенство с положительным старшим коэффициентом, значит n не больше максимального корня

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{2k+1 + \sqrt{4k^2 + 4k + 1 - 16k + 16gk}}{2} \\ &= \frac{2k+1 + \sqrt{4k^2 - 12k + 16gk + 1}}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Теорема 6. *Выполняется неравенство $\chi(\mathcal{B}_{k,g}) \leq \chi(\mathcal{A}_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor, g})$.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение на области и построим по нему соответствующий граф (возможно с кратными ребрами, см. построение в теореме 5) с тем же хроматическим числом.

Теперь посчитаем, какое наибольшее количество ребер может пересекать ребро. Так как диагональ соединяющая вершины через l точек в x -угольнике, пересекает

$$l \cdot (x - 2 - l) \leq \left\lceil \frac{x-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor$$

других диагоналей, из этого очевидно следует наша теорема. \square

Теорема 7. *Выполняется неравенство*

$$\chi(\mathcal{B}_{5,g}) \leq \chi(\mathcal{A}_{2,g}) \leq \frac{11 + \sqrt{41 + 80g}}{2}$$

для $g > 0$.

Начнем с двух лемм.

Лемма 2. *Для графа $G \in \mathcal{A}_{2,g}$ ($g \geq 0$) выполнено следующее неравенство: $e(G) < 5 \cdot (v(G) - 2 + 2g)$.*

Доказательство. Пусть не так. Рассмотрим минимальный по количеству ребер контрпример и его изображение с минимальным количеством точек пересечения.

Очевидно, в этом изображении нет самопересекающихся ребер. Поймем, что нет двух ребер, пересекающихся больше одного раза. Пусть есть, рассмотрим два этих ребра и удалим их, разрезав поверхность по ним, а также удалим все ребра, их пересекающие. Мы удалили максимум 4 ребра. Либо наша поверхность разрезалась на несколько поверхностей, либо уменьшился род (так как мы разрезали хотя бы по какой-то самопересекающейся петле).

Просуммируем наши неравенства на количество ребер во всех полученных графах на соответствующих поверхностях (неравенства верны, так как в этих графах меньше ребер). Мы получаем, что

$$e - 4 \leq e' \leq 5(v - 2) \sum (1 - g_i) \leq 5(v - 4 + 2g) = 5(v - 2 + 2g) - 10,$$

где e' – количество оставшихся ребер, а g_i – рода поверхностей. Последнее неравенство верно, так как либо суммарный род уменьшился, либо поверхностей стало хотя бы две с тем же суммарным родом.

Теперь добавим максимальное возможное количество неэквивалентных простых ребер (возможно, появятся неэквивалентные кратные ребра или нестягиваемые петли).

Лемма 3. *В полученном изображении у каждого непростого ребра есть хотя бы два соседа, являющихся простыми ребрами (соседнее ребро – это ребро, которое выходит из вершины либо следующим, либо предыдущим по часовой стрелке).*

Доказательство. См. рисунок 2, пунктиром отмечены простые ребра, они не петли, иначе в нашем изначальном изображении (до добавления простых ребер) было два ребра, выходящих из одной вершины, причем первые их пересечения – друг с другом. Но в этом случае легко уменьшить количество пересечений.

Значит, изображенные пунктиром ребра есть в нашем изображении (после добавления простых ребер), так как простых ребер – максимальное число.

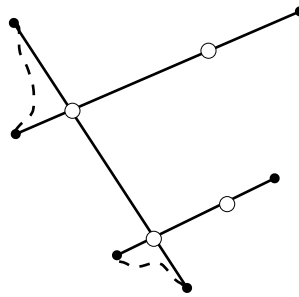


Рис. 2

□

Вернемся к доказательству леммы 2. Рассмотрим грани разбиения поверхности простыми ребрами. Длинной грани мы называем суммарную длину ее границы. Так как каждое простое ребро границы грани – соседнее максимум для двух непростых ребер внутри грани, а каждое непростое ребро внутри грани граничит хотя бы с двумя простыми ребрами на границе, то количество ребер внутри грани не превосходит длины ее границы.

Теперь рассмотрим следующую функцию: для каждой грани считаем число, равное половине длины границы плюс количество ребер внутри. Если длина границы равна l , то ребер внутри не более l значит функция даст не более $\frac{3l}{2}$. Если мы уберем непростые ребра и сделаем

полную триангуляцию всех граней, то получим хотя бы $l - 3$ ребра в грани длины l (внутренние старые ребра мы удалили), равенство достигается, когда граница связная.

Тогда в таком случае для каждой грани отношение функции для графа и для триангуляции не более чем $(\frac{3l}{2}) / (\frac{3l-6}{2}) = \frac{l}{l-2}$.

Для граней длины $l \geq 5$ мы получили отношение не более чем $\frac{5}{3}$, а это число равно отношению коэффициентов в утверждении леммы 2 и формуле Эйлера. Докажем то же самое для граней длины 1, 2, 3 и 4.

- В гранях длины 1 внутри нет ребер. Если в грани длины 2 есть ребро, то оно простое, что невозможно.
- Если граница грани длины 3 связна, то ни ребер внутри грани, ни ребер триангуляции нет.
- Если граница грани длины 4 связна, то внутри будет максимум два ребра и, значит, наша функция по сравнению с триангуляцией увеличилась максимум в $4/3$ раза.
- Если граница несвязна и имеет длину 3 или 4, то наша функция увеличилась по сравнению с триангуляцией не больше чем в

$$\frac{\frac{3l}{2}}{\frac{l}{2} + 1 + (l-1)} = \frac{3l}{3l} = 1.$$

Знаменатель получился таким, поскольку надо добавить минимум одно ребро для обеспечения связности, и при этом длина станет уже хотя бы $l + 2$. Значит, в триангуляции будет хотя бы $l - 1$ ребер.

Во всех случаях коэффициент увеличения по сравнению с триангуляцией не больше $5/3$, значит, наша оценка верна. \square

Доказательство теоремы 7. В теореме 5 мы пользовались только оценкой на количество ребер. Значит, доказательство верхней оценки на хроматическое число для $\mathcal{A}_{2,g}$ подходит без изменений, причем мы получим ту же оценку, что и для $\mathcal{B}_{5,g}$. Неравенства между $\chi(\mathcal{A}_{2,g})$ и $\chi(\mathcal{B}_{5,g})$ мы уже знаем из теоремы 6. \square

§4. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ 1-ИЗОБРАЖЕНИЙ ГРАФОВ K_{9+16t} НА МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Очевидно, что если все грани будут “четырёхугольниками” с диагоналями, то тогда род поверхности будет минимальным для этого

графа. Если граф полный, то из доказательства теоремы 5 следует, что этот полный граф будет давать равенство с верхней оценкой.

Для построения графа K_9 достаточно взять три треугольных призмы с проведенными диагоналями и склеить их по граням-треугольникам в тор (см. рисунок 3).

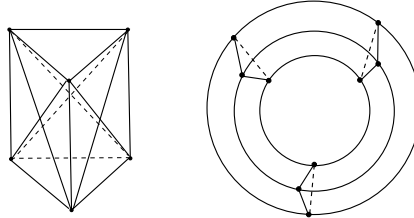


Рис. 3. граф K_9 .

Для случая $t \geq 1$ уже непросто нарисовать сам граф, но можно построить его ленточную структуру.

Теорема 8. Пусть существует граф Кирхгофа удовлетворяющий следующим условиям:

1. Кубический граф на $2 + 4t$ вершинах.
2. Обходя граф по следующему правилу: в каждой черной вершине поворачиваем по часовой стрелке, а в каждой белой вершине – против часовой стрелки, мы зациклимся, обойдя каждое ребро дважды (в обоих направлениях).
3. Пунктирные ребра образуют полное паросочетание.
4. У нас задана ориентация и числа на ребрах так, что сумма входящих чисел равна сумме исходящих по модулю $9 + 16t$.
5. Все \pm числа, расставленные на ребрах, и разности чисел в обходе до и после каждого пунктирного ребра различны по модулю $9 + 16t$ (число в обходе берется с плюсом, если идем по ориентации ребра и с минусом иначе).

Тогда граф K_{9+16t} можно 1-изобразить на некоторой поверхности так, что все грани будут четырехугольниками с двумя диагоналями.

Построение полного графа по вспомогательному графу Кирхгофа разобрано на примере K_{25} , то есть в случае $t = 1$. Начнем строить ленточную структуру для графа K_{25} , на рисунке 4 изображен вспомогательный граф Кирхгофа.

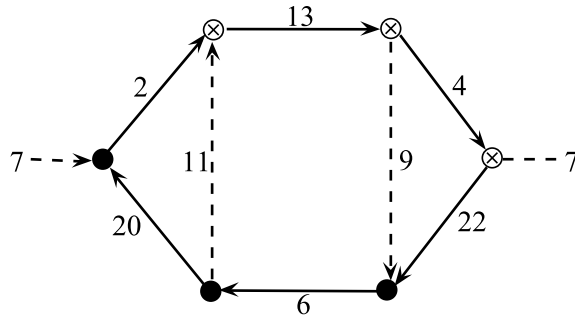


Рис. 4. Граф Кирхгофа по модулю 25.

Теперь мы с помощью этого графа Кирхгофа строим ленточную структуру графа. Для вершины 0 мы выпишем числа в обходе графа Кирхгофа (помечая скобками числа, соответствующие пунктирным ребрам).

$0 : (7) 2 (-11) -6 (-9) 4 22 6 20 (-7) -4 -13 -2 -20 (11) 13 (9) -22$

Эта последовательность задает циклический порядок полуребер, выходящих из 0-вой вершины в другие вершины. Для a -ой вершины мы просто прибавляем ко всем числам в этой последовательности по a .

Порядок выхода полуребер из вершины a : $(a+7) a+2 (a-11) a-6 (a-9) a+4 a+22 a+6 a+20 (a-7) a-4 a-13 a-2 a-20 (a+11) a+13 (a+9) a-22$

На все числа смотрим по модулю 25.

Докажем, что наша последовательность для 0 удовлетворяет следующему свойству: *если есть подряд числа a, b (в этом порядке), то есть $b - a, -a$ и $-b, a - b$* . Действительно, наличие пары a, b в такой последовательности означает, что в обходе вспомогательного графа мы зашли в некоторую вершину x по ребру с a и вышли по ребру с b . (Предположим, что ребро с a ориентировано к вершине x , а ребро с b ориентировано от вершины x . При смене ориентаций ребра графа Кирхгофа меняется и знак числа на нем, а значит, числа в нашем обходе не изменятся.) Пусть третье ребро графа Кирхгофа, инцидентное вершине x , из нее выходит. Тогда на нем написано число $a - b$ (так как $-a + b + (a - b) = 0$). Поскольку направление поворота при обходе

вершины x сохраняется, то после ребра с $-b$ (то есть, входа в вершину x против направления по ребру с b) мы повернем в $a - b$, а после $-(a - b)$ мы повернем в $-a$. Таким образом, свойство доказано.

Из этого свойства следует, что в порядке выхода рёбер для вершины a будет $b, 0$, а для вершины b будет $0, a$. Тогда после склейки полуребер у нас окажется треугольник $0, a, b$. Значит, все грани с 0 являются треугольниками. Аналогично, все грани являются треугольниками. В каждом треугольнике окажется ровно одно помеченное ребро, поскольку помечено полное парасочетание (значит, среди рёбер с числами $\pm a, \pm b$ и $\pm(b - a)$ помечена ровно одна пара, а тогда после склейки помечено будет в треугольнике только ребро, соответствующее этой паре).

Рассмотрим каждое помеченное ребро: оно лежит в двух треугольниках, и в каждом из них помечено только оно. Значит, можем провести в этих двух треугольниках дополнительное ребро, пересекающее помеченное ребро (см. рисунок 5).

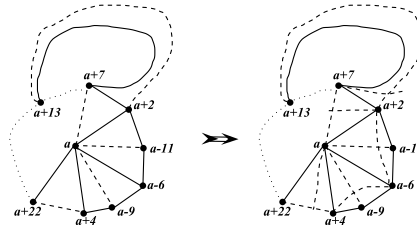


Рис. 5

Мы получили какой-то граф и его 1-изображение на минимальной поверхности, так как все грани изображения – четырехугольники с двумя диагоналями. Поймем, что это K_{25} . У нас степень каждой вершины 24 и она соединена со всеми вершинами, так как изначальные ребра соединяют вершины с разной разностью (ориентированной разностью), а добавленные ребра соединяют вершины с разностью ровно из второй части пункта 5, которые в совокупности с прошлыми числами различны по модулю 25. Следовательно, это изображение графа K_{25} на оптимальной поверхности.

Следующая последовательность для случая K_{41} получаются из некоторого графа Кирхгофа, удовлетворяющего выше описанным свойствам.

0 : (27) 20 3 (10) 9 - 28 (-16) - 5 12 28 (37) 26 - 1 (-10) - 7 (-27)
 - 26 11 (16) - 12 (-17) - 20 7 - 3 (17) 5 - 11 (-37) - 9 1

Гипотеза 3. *Полный граф K_{9+16s} можно 1-изобразить на оптимальной поверхности, то есть так, что каждая грань изображения – “четырёхугольник” с двумя диагоналями.*

Замечание. Из этой гипотезы в частности следует, что максимальное хроматическое число отличается не более чем на 16 от нашей верхней оценки в теореме 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Appel, W. Haken, *Every Planar Map Is Four Colorable*. — A.M.S. Contemp. Math. **98** (1989).
2. K. Appel, W. Haken, *Every map is four colourable, Part I: Discharging*. — Illinois Journal of Mathematics **21** (1977), 429–490.
3. K. Appel, W. Haken, *Every map is four colourable, Part II: Reducibility*. — Illinois Journal of Mathematics **21** (1977), 491–567.
4. О. В. Воробин, *Solution of Ringel's problems on vertex-face coloring of plane graphs and coloring of 1-planar graphs*. — Met. Diskret. Anal. **41** (1984), 12–26.
5. P. J. Heawood, *Map colour theorem*. — Quart. J. Math. **24** (1890), 332–338.
6. Г. В. Ненасhev, *Оценка хроматического числа почти планарного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 95–106.
7. G. Ringel, J. W. T. Youngs, *Solution of the Heawood map-coloring problem*. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **60**, no. 2 (1968), 438–445.
8. N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, *The Four-Colour Theorem*. — J. Comb. Theory, Series B **70** (1997), 2–44.

Nenashev G. V. On Heawood-type problem for maps with tangencies.

The class of maps on a surface of genus $g > 0$ such that each point belongs to at most $k \geq 3$ regions is studied. We study chromatic numbers of such maps (regions having a common point must have distinct colors) in dependence on g and k .

In general case, upper bounds on these chromatic numbers are proved. In case $k = 4$, it is proved that the problem described above is equivalent to the problem of finding the maximal chromatic number for analogues of 1-planar graphs on a surface of genus g . In this case a more strong bound than in general case is obtained and a method of constructing examples which confirm accuracy of our bound is presented.

An upper bound on maximal chromatic number for analogues of 2-planar graphs on a surface of genus g is proved.

Department of Mathematics,
Stockholm University,
SE - 106 91 Stockholm, Sweden
E-mail: glebnev@mail.ru

Поступило 10 ноября 2014 г.