Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 427, 2014 г.

Д. В. Карпов

УДАЛЕНИЕ ВЕРШИН ИЗ ДВУСВЯЗНОГО ГРАФА С СОХРАНЕНИЕМ ДВУСВЯЗНОСТИ

1. Введение

В работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Для множества и количества рёбер графа G мы будем применять обозначения $E(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$.

Индуцированный подграф графа G на множестве вершин $U \subset V(G)$ обозначим через $G(U)$.

Напомним классические понятия блока и точки сочленения связного графа, а также ряд их свойств.

Определение 1. 1) *Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$. Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.*

2) *Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \notin E(G)$. Через $G + xy$ мы обозначим граф G, к которому добавлено ребро xy.*

Определение 2. *Пусть G – связный граф. Вершина $a \in V(G)$ называется точкой сочленения, если граф $G - a$ несвязен.*

Блоком называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

Блоки и точки сочленения – классические понятия, а также важнейший инструмент работы с графами, с помощью которого доказано множество фактов, причем не только из теории связности. В доказательствах часто используется дерево блоков и точек сочленения, которое мы сейчас определим.

Ключевые слова: связность, двусвязный граф, блоки.

Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1 и гранта РФФИ No. 14-01-00156-а.

Определение 3. *Дерево блоков и точек сочленения графа G – это двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G, а другой – всем его блокам $B_1, \dots, B_m$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j смежны, если и только если $a_i \in V(B_j)$.*

Несложно доказать, что дерево блоков и точек сочленения – это действительно дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам (доказательство можно найти, например, в [6]). Именно структура дерева помогает работать с блоками и точками сочленения.

В 1966 году Татт [3] построил дерево, отображающее структуру расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. В работе [10] автор предложил конструкцию дерева разбиения двусвязного графа, в целом аналогичную придуманной Таттом. Определение этого объекта мы дадим далее, а пока отметим, что в [10] описывается ряд свойств частей разбиения двусвязного графа и дерева разбиения, аналогичных свойствам блоков связного графа и дерева блоков и точек сочленения. Дерево разбиения применяется для доказательства критерия планарности двусвязного графа, а также оценок на хроматическое число графа.

В этой работе мы отметим еще одно важное свойство классических блоков связного графа. Пусть W – множество вершин, не являющихся точками сочленения и принадлежащих различным блокам. Тогда граф $G - W$, очевидно, связен. В нашей работе будет доказано аналогичное свойство для двусвязного графа.

В работах [7] и [11] определено понятие блока k-связного графа и доказан ряд результатов об одновременном удалении внутренних вершин разных блоков. Однако, эти результаты доказаны только для графов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

1.1. Основные определения. Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

Определение 4. *Пусть $R \subset V(G)$.*

1) *Назовем множество R разделяющим, если граф $G - R$ несвязен.*

2) *Пусть* $X, Y \subset V(G)$, $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. *Будем говорить, что* R *отделяет множество* X *от множества* Y, *если никакие две вершины* $v_x \in X$ *и* $v_y \in Y$ *не лежат в одной компоненте связности графа* $G - R$.

3) *Будем говорить, что* R *разделяет множество* $X \subset V(G)$, *если не все вершины множества* $X \setminus R$ *лежат в одной компоненте связности графа* $G - R$.

4) *Граф* G *называется* k*-связным, если* $v(G) \geq k+1$ *и он остается связным при удалении любых своих* $k-1$ *вершин.*

Определенные выше точки сочленения – это как раз одновершинные разделяющие множества.

Определение 5. *Пусть* G *– двусвязный граф.*

1) *Обозначим через* $\mathfrak{R}(G)$ *набор, состоящий из всех разделяющих множеств графа* G, *а через* $\mathfrak{R}_2(G)$ *– набор, состоящий из всех двухвершинных разделяющих множеств графа* G.

2) *Назовем множества* $S, T \in \mathfrak{R}_2(G)$ *независимыми, если* S *не разделяет* T *и* T *не разделяет* S. *В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.*

3) *Назовем множество* $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *одиночным, если оно независимо со всеми множествами из* $\mathfrak{R}_2(G)$. *Обозначим через* $\mathfrak{O}(G)$ *множество, состоящее из всех одиночных двухвершинных разделяющих множеств графа* G.

К сожалению, разделяющие множества из $\mathfrak{R}_2(G)$ могут быть зависимыми. Именно с этим связаны основные трудности в изучении двусвязных графов. В работе [7] доказано, что для множеств $S, T \in \mathfrak{R}_2(G)$ возможны два варианта: либо они независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

Следующие понятия, определенные в [8], удобны для описания взаимного расположения разделяющих множеств в графе.

Определение 6. *Пусть* $\mathfrak{S}$ *– набор из нескольких разделяющих множеств графа* G.

1) *Множество* $A \subset V(G)$ *назовем частью* $\mathfrak{S}$*-разбиения, если никакие две вершины из* A *нельзя разделить никаким множеством из* $\mathfrak{S}$, *но любая другая вершина графа* G *отделена от множества* A *хотя бы одним из множеств набора* $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. (*В случае, когда неочевидно, какой граф разбивается, мы будем писать* $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$.)

2) *Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ назовем внутренними, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем внутренностью части A и будем обозначать через* $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ мы будем называть граничными, а все их множество – границей и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Доказательство следующей леммы несложно и может быть найдено в [9, теорема 2].

Лемма 1. *Пусть G – двусвязный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_2(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершина $x \in \mathrm{Int}(A)$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(G) \setminus A$. Граница $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины в $V(G) \setminus A$.*

2) *Если $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$.*

Точки сочленения связного графа G – это его разделяющие множества, из них состоит $\mathfrak{R}_1(G)$. Множества вершин всех блоков – это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_1(G))$.

Теперь мы можем определить аналог дерева блоков и точек сочленения для двусвязного графа, как это было сделано в работе [10].

1.2. Дерево разбиения.

Определение 7. *Пусть G – двусвязный граф.*

1) *Будем называть частями графа G части из $\mathrm{Part}(G, \mathfrak{O}(G))$ и использовать для их множества обозначение* $\mathrm{Part}(G)$.

2) *Построим дерево разбиения $\mathrm{BT}(G)$ следующим образом. Вершины одной доли $\mathrm{BT}(G)$ – это одиночные множества, а вершины другой доли – части графа G. Обозначать вершины $\mathrm{BT}(G)$ мы будем так же, как соответствующие множества вершин графа G. Вершины $S \in \mathfrak{O}(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $S \subset A$.*

3) *Построим граф G' на множестве вершин $V(G)$ следующим образом: возьмем граф G и для каждого множества $S \in \mathfrak{O}(G)$ добавим ребро, соединяющие две его вершины, если такого ребра в графе G нет.*

4) *Назовем часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ циклом, если граф $G'(A)$ – простой цикл и блоком, если граф $G'(A)$ трёхсвязен.*

В [10] доказано, что каждая часть двусвязного графа G – блок или цикл. Отметим, что эти альтернативы взаимно исключающие: в трёхсвязном графе хотя бы 4 вершины, поэтому треугольник таким не является. В следующей теореме сформулируем основные свойства дерева разбиения, доказанные в [10].

Теорема 1. *Пусть G – двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$\mathrm{BT}(G)$ – дерево.*

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{O}(G)$ выполняется $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(S)|$. Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ существует единственная часть $B \in \mathrm{Part}(G)$, такая что $B \subset A$ и B смежна с S в $\mathrm{BT}(G)$. Все висячие вершины дерева $\mathrm{BT}(G)$ соответствуют частям графа G.*

3) *Множество S разделяет в графе G части $B, B' \in \mathrm{Part}(G)$ тогда и только тогда, когда S разделяет B и B' в $\mathrm{BT}(G)$.*

4) *Множество $\{a, b\} \subset V(G)$ является неодиночным разделяющим множеством тогда и только тогда, когда a и b – две несоседние вершины части-цикла длины хотя бы 4.*

Все висячие вершины дерева $\mathrm{BT}(G)$, как видно из пункта 2 теоремы 1, соответствуют частям графа G. Мы назовем такие части *крайними*.

2. Удаление вершин с сохранением двусвязности

Следствие 1. *Пусть G – двусвязный граф, $a \in V(G)$, $a \in A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда граф $G - a$ двусвязен если и только если $a \in \mathrm{Int}(A)$ и часть A – блок или треугольник.*

Доказательство. Граф $G - a$ двусвязен если и только если a не принадлежит множествам из $\mathfrak{R}_2(G)$. Вершина a не принадлежит одиночным множествам если и только если $a \in \mathrm{Int}(A)$. Остается добавить, что по пункту 4 теоремы 1 все вершины циклов длины хотя бы 4 принадлежат неодиночным множествам, а внутренние вершины блоков и треугольников – не принадлежат. □

Если часть треугольник A имеет внутреннюю вершину, то

$$|\mathrm{Bound}(A)| = 2.$$

Следовательно, $\mathrm{Bound}(A) \in \mathfrak{O}(G)$, а значит, часть A – крайняя.

Следующая теорема содержит основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть G – двусвязный граф, а W — множество, содержащее по одной внутренней вершине нескольких непустых частей-блоков графа G. Тогда граф $G - W$ двусвязен.*

Доказательство. 1. Предположим, что утверждение теоремы неверно и рассмотрим минимальное по включению множество W, вершины которого принадлежат внутренностям разных непустых блоков и такое, что граф $G^* = G - W$ не двусвязен. Пусть a – точка сочленения графа $G - W$. Так как внутренние вершины блоков не входят в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$, мы имеем $|W| \geq 2$. Так как вершины W принадлежат внутренностям разных блоков, существует множество $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, разделяющее W.

Так как S не содержит вершин из W и разделяет W, части $\mathrm{Part}(S)$ можно разбить на две группы так, чтобы в каждой группе была часть, содержащая вершину из W. Пусть U_1 и U_2 – объединения вершин этих частей,

$$U^* = V(G) \setminus W = V(G^*), \quad U_1^* = U_1 \setminus W, \quad U_2^* = U_2 \setminus W.$$

Так как каждый блок графа G содержит хотя бы 4 вершины и не более чем одна из них удалена, множества вершин U_1^* и U_2^* содержат хотя бы по три вершины. Положим

$$G_1^* = G(U_1^*), \quad G_2^* = G(U_2^*), \quad G_1 = G_1^* + ab, \quad G_2 = G_2^* + ab.$$

2. Рассмотрим вершину $x \in U_2 \cap W$. Из выбора множества W мы знаем, что граф $G_x = G - (W \setminus \{x\})$ двусвязен. Очевидно, множество S отделяет U_1^* от $U_2^* \cup \{x\}$ в двусвязном графе G_x. Поэтому с помощью теоремы Менгера нетрудно понять, что граф G_1 не имеет точек сочленения. Так как $|U_1^*| \geq 3$, граф G_1 двусвязен. Аналогично, граф G_2 двусвязен.

3. *Докажем, что от любой вершины множества $x \in U^*$ в графе G^* существует xa-путь P_a и xb-путь P_b, не имеющие общих вершин, кроме x.*
Не умаляя общности положим, что $x \in U_1^*$. Тогда по теореме Менгера два искомых пути есть в двусвязном графе графе G_1, эти же пути есть и в G^*.

4. *Теперь покажем, что для любой вершины $v \in U^*$ в графе $G^* - v$ все вершины из $U^* \setminus \{v\}$ связаны, то есть, граф $G^* = G - W$ двусвязен.*

Рассмотрим любую вершину $x \notin S$. По пункту 3 в графе G^* существует два непересекающихся пути от x до вершин множества S. Один из этих путей есть и в $G^* - v$.

Остается доказать, что при $v \notin S$ вершины a и b множества S связаны в графе $G^* - v$. Не умаляя общности можно считать, что $v \in U_1^*$. Тогда существует ab-путь P в графе $G^* - v$, проходящий по вершинам из U_2^*, значит, a и b связаны в $G^* - v$.

Двусвязность графа G^* противоречит предположению. Значит, граф $G - W$ двусвязен для любого множества W, удовлетворяющего условию. □

Отметим, что утверждение теоремы не может быть распространено на внуренние вершины крайних частей-треугольников двусвязного графа G. Несложно придумать пример двусвязного графа G, когда удаление внутренней вершины из крайней части-треугольника и внутренней вершины одной части-блока делает граф недвусвязным.

Литература

1. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically n-connected graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 63–68.
2. Y. O. Hamidoune, *On critically h-connected simple graphs.* — Discr. Math. **32** (1980), 257–262.
3. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
4. W. T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
5. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
6. Ф. Харари, *Теория графов.* Москва, М., 1973.
7. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
8. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
9. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
10. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
11. А. С. Чухнов, *Удаление вершин из k-связных графов без потери k-связности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 103–116.

Karpov D. V. Deleting vertices from a biconnected graph with preserving biconnectinity.

Let G be a biconnected graph and W be a set which consists of inner vertices of parts-blocks of the graph G and contains at least one vertex of each such part. It is proved that the graph $G - W$ is biconnected.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург;
Математико-механический
факультет СПбГУ,
С.Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 27 октября 2014 г.