Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 427, 2014 г.

Д. В. Карпов

МИНИМАЛЬНЫЕ k-СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН СТЕПЕНИ k

§1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Для множества и количества рёбер графа G мы будем применять обозначения $E(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а максимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\Delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Через $K_{m,n}$ мы будем обозначать полный двудольный граф, доли которого содержат m и n вершин.

Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

Определение 1. *Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.*

1) *Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.*

2) *Назовем множество R* разделяющим, *если граф $G - R$ несвязен.*

3) *Пусть $X, Y \subset V(G)$, $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R* отделяет *множество X от множества Y, если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

4) *Будем говорить, что R* разделяет *множество $X \subset V(G)$, если $X \not\subset R$ и не все вершины множества $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

Ключевые слова: связность, минимальный k-связный граф.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ No. 14-01-00545 и гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1.

5) *Для разделяющего множества R обозначим через $V(R)$ множество, состоящее из всех входящих в R вершин.*

Определение 2. 1) *Граф G называется* k-связным, *если $v(G) > k$ и G остается связным при удалении любого множества из не более чем $k-1$ вершины.*

2) *k-связный граф G называется* минимальным, *если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k-связным.*

Итак, пусть G – k-связный граф. Тогда любое его разделяющее множество содержит не менее k элементов. Очевидно, все вершины k-связного графа имеют степень не менее k.

Через $V_k(G)$ мы обозначим множество всех вершин графа G, имеющих степень k, пусть $V_{k+1}(G) = V(G) \setminus V_k(G)$. Будем использовать обозначения $v_k(G) = |V_k(G)|$ и $v_{k+1}(G) = |V_{k+1}(G)|$.

Дирак [1] в 1967 году и Пламмер [2] в 1968 году исследовали минимальные двусвязные графы. Из результатов этих работ можно вывести, что $v_2(G) \geqslant \frac{v(G)+4}{3}$ для минимального двусвязного графа G.

В 1979 году В. Мадер [5,6] доказал очень сильный результат, обобщающий написанное выше:

$$v_k(G) \geqslant \frac{(k-1)v(G) + 2k}{2k-1} \tag{1}$$

для минимального k-связного графа G. Эта оценка точная: для любого $k \geqslant 2$ существуют бесконечные серии минимальных k-связных графов, для которых неравенство (1) обращается в равенство. Далее мы рассмотрим такие графы и будем называть их *экстремальными* минимальными k-связными графами.

Определение 3. *Пусть $k \geqslant 2$, а T – дерево с $\Delta(T) \leqslant k+1$. Граф $G_{k,T}$ строится из k копий $T_1, \dots, T_k$ дерева T с непересекающимися множествами вершин. Для каждой вершины $a \in V(T)$ обозначим через a_i соответствующую вершину копии T_i. Если $d_G(a) = j$, то мы добавим $k+1-j$ новых вершин степени k, смежных с $\{a_1, \dots, a_k\}$.*

Очевидно, если $v(T) = n$, то $v(G_{k,T}) = (2k-1)n + 2$. Несложно проверить, что $G_{k,T}$ – минимальный k-связный граф и, следовательно, он – экстремальный.

В 1982 Оксли [7] представил алгоритм построения всех минимальных двусвязных и трёхсвязных графов. Было доказано, что любой

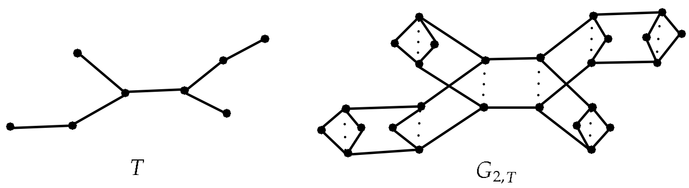

Рис. 1. Дерево T и экстремальный минимальный двусвязный граф $G_{2,T}$.

минимальный двусвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{2,3}$ несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$, присоединенный к двум вершинам из окрестности заменяемой вершины (см. рисунок 2a). Любой минимальный трёхсвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{3,4}$ несколькими операциями замены вершины степени 3 на граф $K_{3,3}$ (см. рисунок 2b).

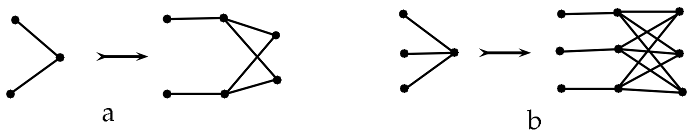

Рис. 2. Операции замены.

В [10] автор доказал, что любой экстремальный минимальный двусвязный граф – это граф $G_{2,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \leqslant 3$. В этой работе мы представим аналогичный результат для произвольного k.

Теорема 1. *Любой экстремальный минимальный k-связный граф – это граф $G_{k,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \leqslant k+1$.*

В качестве иллюстрации рассмотрим случай $k = 1$. Минимальные связные графы – это, очевидно, деревья. Экстремальные минимальные графы – деревья, имеющие ровно две висячие вершины, то есть, простые пути. Легко понять, что это как раз графы вида $G_{1,T}$, где T – дерево с $\Delta(T) = 2$.

Из теоремы несложно вывести алгоритм построения минимальных k-связных графов, аналогичный предложенному Оксли [7].

Следствие 1. *Пусть G – экстремальный минимальный k-связный граф. Тогда G может быть получен из $K_{k,k+1}$ серией операций замены вершины степени k на полный двудольный граф $K_{k,k}$ (в ходе операции добавляется паросочетание, соединяющее k вершин одной доли $K_{k,k}$ с вершинами, входящими в окрестность заменяемой вершины степени k).*

Доказательство. Отметим, что граф $K_{k,k+1}$ – это граф $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T.

Пусть $G_{k,T}$ – экстремальный минимальный k-связный граф, $v(T) > 1$, a – висячая вершина дерева T, а $a_1, \dots, a_k$ – соответствующие a вершины в копиях дерева T, на которых построен граф $G_{k,T}$. Тогда по построению этого графа он содержит полный двудольный граф $K_{k,k}$, одна доля которого – это $\{a_1, \dots, a_k\}$, а другая – это k присоединенных к ним вершин степени k.

Пусть a'_i – единственная вершина дерева T_i, смежная с a_i. Произведем операцию, обратную к описанной в формулировке следствия: заменим найденный подграф $K_{k,k}$ на новую вершину b степени k, смежную с $a'_1, \dots, a'_k$. Легко видеть, что мы получили граф $G_{k,T'}$ где $T' = T - a$, то есть, из дерева T мы удалили висячую вершину. Понятно, что в результате таких операций дерево станет одновершинным, а значит, наш k-связный граф превратится в $K_{k,k+1}$. □

§2. Разрезы

Определение 4. 1) *Будем называть* разрезом *k-элементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G, содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.*

2) *Для разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ обозначим через $V(T)$ множество всех входящих в T вершин, а через $W(T)$ – множество всех вершин, входящих в разрез T или инцидентных рёбрам разреза T.*

В работе [8] исследовались разрезы трёхсвязного графа. Наша терминология будет в основном согласована с этой работой.

Замечание 1. 1) Никакая вершина разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ не может быть инцидентна никакому ребру из T.

2) Для любого разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ граф $G - T$ имеет две компоненты связности, пусть это U_1 и U_2. Для каждого ребра $e \in T$ компоненты U_1 и U_2 содержат по одному концу e.

Теперь определим части разбиения графа разрезом и границы разреза.

Определение 5. 1) *Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, а U_1 и U_2 – компоненты связности графа $G-T$. Назовем множества вида $A_i = U_i \cup V(T)$* частями разбиения *графа G разрезом T. Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Part}(G;T) = \{A_1, A_2\}$. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, мы будем писать просто $\mathrm{Part}(T)$.*

2) *Мы будем называть множество U_i* внутренностью *части A_i и использовать обозначение $\mathrm{Int}(A_i) = U_i$.*

3) Границами разреза *T мы будем называть множества вершин $A_1 \cap W(T)$ и $A_2 \cap W(T)$.*

Замечание 2. Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, $\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $A_1 \cup A_2 = V(G)$, $A_1 \cap A_2 = V(T)$.

2) Границы разреза T содержат по k элементов. Каждая из границ разреза T содержит $V(T)$ и по одному концу всех входящих в T ребер.

3) Если множество $A' = A_1 \setminus W(T)$ непусто, то $A_1 \cap W(T)$ – граница разреза T – отделяет A' от $V(G) \setminus A_1$, а каждая вершина $x \in A_1 \cap W(T)$ смежна хотя бы с одной вершиной из A'. Таким образом, в этом случае граница разреза является k-вершинным разделяющим множеством в k-связном графе G.

§3. Минимальные k-связные графы

В этом разделе мы будем вести разговор о минимальном k-связном графе G и использовать для него обозначения V_k вместо $V_k(G)$ и V_{k+1} вместо $V_{k+1}(G)$. Пусть

$$G_k = G(V_k), \quad G_{k+1} = G(V_{k+1}),$$
$$E_k = E(G_k), \quad e_k = |E_k|, \quad E_{k+1} = E(G_{k+1}).$$

Для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ существует разрез, содержащий e и $k-1$ вершину. Пусть $\mathfrak{R}$ – семейство всех таких разрезов.

Мы изучим свойства разрезов из $\mathfrak{R}$.

3.1. Независимые разрезы.

Определение 6. *Разрезы $S, T \in \mathfrak{T}(G)$ называются* независимыми*, если можно ввести такие обозначения*

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

что $A_1 \supset B_2$ *и* $B_1 \supset A_2$. *Иначе мы будем называть разрезы* S *и* T зависимыми.

Лемма 1. *Пусть разрезы* $S, R, T \in \mathfrak{T}(G)$ *таковы, что* S *и* R *независимы, а также* T *и* R *независимы. Пусть*

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}, \quad \mathrm{Part}(R) = \{D_1, D_2\},$$

причем $D_1 \supset A_1$ *и* $D_2 \supset B_2$. *Тогда разрезы* S *и* T *независимы.*

Доказательство. Из независимости разрезов S и R следует, что $A_2 \supset D_2 \supset B_2$. Из независимости разрезов T и R следует, что $B_1 \supset D_1 \supset A_1$. Таким образом, S и T независимы. □

Лемма 2. *Пусть разрезы* $S, T \in \mathfrak{R}$ *независимы,* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$, *причем* $A_1 \supset B_2$ *и* $B_1 \supset A_2$. *Предположим, что разрезы* S *и* T *не имеют общего ребра. Тогда* $A_1 \supset W(T)$.

Доказательство. Пусть $b_1b_2 \in T$, причем $b_i \in \mathrm{Int}(B_i)$. Из $A_1 \supset B_2$ следует, что A_1 содержит одну из границ разреза T, а именно, $A_1 \supset V(T) \cup \{b_2\}$.

Если $b_2 \in S$, то $b_2 \in A_2 \subset B_1$, что неверно. Значит, $b_2 \notin S$. Поскольку $b_1b_2 \notin S$, то вершины b_1 и b_2 не разделены разрезом S, то есть, $b_1 \in A_1$. Следовательно, $A_1 \supset W(T)$. □

3.2. Пара зависимых разрезов. Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем входящие в них рёбра различны. Введем обозначения

$$\begin{aligned} &\mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \\ &G_{i,j} = F_i \cap H_j, \quad P = T \cap S, \\ &T_i = \mathrm{Int}(F_i) \cap T, \quad S_j = \mathrm{Int}(H_j) \cap S \quad \text{и} \\ &\mathrm{Int}(G_{i,j}) = G_{i,j} \setminus (P \cup T_i \cup S_j). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть множество $R_{i,j}$ состоит из $P \cup T_i \cup S_j$ и рёбер разрезов T и S, инцидентных вершинам из $\mathrm{Int}(G_{i,j})$, а $\overline{G}_{i,j}$ – объединение трёх отличных от $G_{i,j}$ частей.

В дальнейшем для описания свойств пар зависимых разрезов мы будем употреблять именно такие обозначения.

Замечание 3. 1) Множество P в нашем случае содержит только вершины.

2) Отметим, что

$$|R_{i,j}| + |R_{3-i,3-j}| \leqslant |S| + |T| = 2k. \tag{3}$$

Действительно, вершины из P в обеих частях считаются дважды, а остальные вершины и рёбра из S и T в левой части считаются не более чем один раз, а в правой части – ровно один раз.

Лемма 3. *Пусть* $\mathrm{Int}(G_{i,j}) \neq \varnothing$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $R_{i,j}$ *отделяет* $G_{i,j}$ *от* $\overline{G}_{i,j}$.

2) *Если* $R_{i,j}$ *содержит хотя бы одно ребро и* $|R_{i,j}| = k$, *то* $R_{i,j}$ – *разрез с* $\mathrm{Part}(R_{i,j}) = \{G_{i,j}, \overline{G}_{i,j}\}$, *независимый и с* S, *и с* T.

Доказательство. 1) Отметим, что

$$G_{i,j} \cap \overline{G}_{i,j} = P \cup T_i \cup S_j, \quad G_{i,j} \cup \overline{G}_{i,j} = V(G).$$

Любое ребро $e \in E(G)$, выходящее из $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ в $\overline{G}_{i,j} \setminus R_{i,j}$, соединяет две вершины, разделенные хотя бы одним из разрезов S и T, а значит, принадлежит одному из этих двух разрезов. Но тогда $e \in R_{i,j}$.

2) Из условия и пункта 1 следует, что $R_{i,j}$ – разрез. Значит, $|\mathrm{Part}(R_{i,j})| = 2$. В силу пункта 1 тогда $\mathrm{Part}(R_{i,j}) = \{G_{i,j}, \overline{G}_{i,j}\}$. Так как $G_{i,j} \subset F_i$ и $F_{3-i} \subset \overline{G}_{i,j}$, разрезы $R_{i,j}$ и S независимы. Аналогично, $R_{i,j}$ и T независимы. □

3.3. Леммы Мадера. Следующие лемма и следствие практически полностью повторяют результаты из работы Мадера [4]. Мы приведем доказательство для полноты работы.

Лемма 4. *Пусть* $ab, ac \in E_{k+1}$, $T_{ab} \ni ab$ *и* $T_{ac} \ni ac$ – *разрезы из* $\mathfrak{R}$, *причем* $a \in F_a \in \mathrm{Part}(T_{ab})$ *и* $c \in H_c \in \mathrm{Part}(T_{ac})$. *Тогда*

$$|\mathrm{Int}(F_a)| > |\mathrm{Int}(H_c)|.$$

Доказательство. Так как

$$|F_a| - |\mathrm{Int}(F_a)| = k - 1 = |H_c| - |\mathrm{Int}(H_c)|,$$

достаточно доказать, что $|F_a| > |H_c|$.

Отметим, что $c \in F_a$. Если разрезы T_{ab} и T_{ac} независимы, то легко понять, что $F_a \supset H_c$ и $a \in F_a \setminus H_c$, а значит, $|F_a| > |H_c|$.

Если эти разрезы зависимы, то положим $S = T_{ab}$, $T = T_{ac}$ и применим введенные выше обозначения для пары зависимых множеств (2). Пусть $F_1 = F_a$, $H_2 = H_c$. Тогда нетрудно понять, что

$$a \in \mathrm{Int}(G_{1,1}), \quad b \in \mathrm{Int}(G_{2,1}), \quad c \in \mathrm{Int}(G_{1,2}).$$

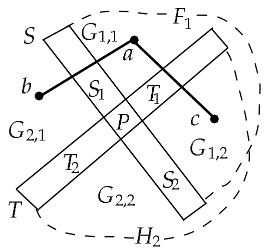

Рис. 3. Множества S, T и части разбиения.

Нам нужно доказать, что $|H_2| < |F_1|$. Определенные выше множества изображены на рисунке 3.

Вершина $a \in \mathrm{Int}(G_{1,1})$ смежна с b, c и вершинами из $G_{1,1}$. Значит, если $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \{a\}$, то из $d_G(a) \geqslant k+1$ следует, что $R_{1,1}$ содержит хотя бы $k-1$ вершину. Если же $A = \mathrm{Int}(G_{1,1}) \setminus \{a\} \neq \varnothing$, то множество вершин $V(R_{1,1}) \cup \{a\}$ отделяет A от остальных вершин графа и, следовательно, содержит хотя бы k вершин. В любом случае мы имеем $|V(R_{1,1})| \geqslant k-1$ и $|R_{1,1}| \geqslant k+1$.

Из неравенства (3) нам известно, что $|R_{1,1}| + |R_{2,2}| \leqslant 2k$. Следовательно, $|R_{2,2}| \leqslant k-1$, а значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$. Отметим, что

$$F_1 \setminus H_2 = \mathrm{Int}(G_{1,1}) \cup S_1 \quad \text{и} \quad H_2 \setminus F_1 = \mathrm{Int}(G_{2,2}) \cup T_2 = T_2.$$

Поскольку

$$|S_1| + |P| + |S_2| = |V(S)| = k-1 \geqslant |R_{2,2}| \geqslant |T_2| + |P| + |S_2|,$$

то $|S_1| \geqslant |T_2|$. Учитывая, что $|\mathrm{Int}(G_{1,1})| \geqslant 1$, мы получаем $|F_1| > |H_2|$. □

Следствие 2. *Граф* G_{k+1} *– лес.*

Доказательство. Иначе есть цикл с ребрами из E_{k+1}, существование которого, очевидно, противоречит лемме 4. □

Лемма 5. *Пусть* c *– количество компонент связности графа* G_{k+1}*. Тогда*

$$v_k(G) \geqslant \frac{(k-1)v(G) + 2(c+e_k)}{2k-1}.$$

Доказательство. Из каждой вершины множества V_{k+1} выходит не менее чем $k+1$ ребро, сумма степеней вершин леса G_{k+1} равна

$2v_{k+1} - 2c$, следовательно, не менее чем $(k-1)v_{k+1} + 2c$ ребер выходит из V_{k+1} в V_k. Из вершин множества V_k выходит ровно $kv_k - 2e_k$ рёбер к вершинам множества V_{k+1}. Поэтому

$$(k-1)v_{k+1} + 2c \leqslant kv_k - 2e_k,$$

откуда немедленно следует утверждение леммы. □

Непосредственно из определения экстремального графа и леммы 5 можно сделать следующий вывод.

Следствие 3. *Пусть G – минимальный k-связный граф, такой, что $v_k + c > k$. Тогда граф G – не экстремальный.*

Замечание 4. Неравенство Мадера (1) следует из $e_k + c \geqslant k$. Мы докажем это утверждение и исследуем случаи, когда достигается равенство. Отметим, что из доказательства леммы 5 ясно, что при $e_k + c = k$ равенство в (1) достигается только в случае, когда $\Delta(G) \leqslant k+1$.

3.4. Нормальные разрезы.

Определение 7. *Назовем разрез $S \in \mathfrak{R}$ кривым, если существует часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ с $|\mathrm{Int}(A)| < \frac{k}{2}$ и нормальным, если такой части не существует.*

Лемма 6. *Пусть оба зависимых разреза $S, T \in \mathfrak{R}$ – нормальные, $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ – различные рёбра из E_{k+1}. Тогда для каждого из рёбер a_1a_2 и b_1b_2 существуют такие $i, j \in \{1,2\}$, что $R_{i,j}$ – разрез, содержащий это ребро.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. Тогда из неравенства (3) следует, что $|R_{1,1}| = k = |R_{2,2}|$ и $R_{1,1} \cup R_{2,2} = S \cup T$. Тогда $R_{1,1} \cup R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$, откуда следует утверждение леммы. Случай $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ разбирается аналогично.

Пусть условия рассмотренных выше случаев не выполнены. Тогда не умаляя общности можно считать, что $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$, то есть, $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$ (см. рисунок 4a). Из нормальности разреза S следует, что $|T_1| \geqslant \frac{k}{2}$.

Так как $T = T_1 \cup T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}$, отсюда можно сделать вывод

$$|T_2 \cup P| \leqslant \frac{k}{2} - 1 \quad \text{и} \quad |R_{2,1}| + |R_{2,2}| \leqslant |S| + 2|T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}| \leqslant 2k. \quad (4)$$

Если $\mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing$ (см. рисунок 4b), то из нормальности разреза T мы имеем $\mathrm{Int}(H_1) = |S_1| \geqslant \frac{k}{2}$, а следовательно, $|S_2 \cup P| \leqslant \frac{k}{2} - 1$, откуда

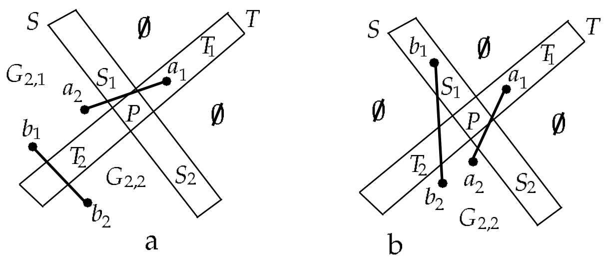

Рис. 4. Разбиение графа парой нормальных зависимых разрезов.

очевидно следует

$$|R_{2,2}| \leqslant |S_2| + |T_2| + |P| + |\{a_1a_2, b_1b_2\}| \leqslant k.$$

Если и $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$, то $\mathrm{Int}(F_2) = S_2$, что противоречит нормальности разреза T. Значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$, но это возможно только при $|R_{2,2}| = k$, что, в частности, означает, что $R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$. Тогда разрез $R_{2,2}$ нам подходит.

Остается случай, когда $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. По неравенству (4) это означает, что $|R_{2,1}| = |R_{2,2}| = k$. Тогда оба разреза $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержат ребро b_1b_2 и $R_{2,1} \cup R_{2,2} \supset S \ni a_1a_2$. Следовательно, один из разрезов $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержит оба ребра b_1b_2 и a_1a_2, откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 7. *Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ – различные рёбра из E_{k+1}, $R_{i,j} \ni b_1b_2$ и $|R_{i,j}| = k$. Тогда существует разрез $R \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1° $\mathrm{Part}(R) = \{G_{i,j}, U\}$, причём либо $U = \overline{G}_{i,j}$, либо $U = \overline{G}_{i,j} \cup \{a\}$, где a – конец ребра a_1a_2, лежащий в $G_{i,j}$;

2° R независим и с S, и с T.

Доказательство. Пусть $i = j = 1$. По построению $R_{1,1}$, один из концов ребра b_1b_2 лежит в $\mathrm{Int}(G_{1,1})$, пусть это b_1. Значит, $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$ и по лемме 3 мы знаем, что $R_{1,1}$ – разрез, $\mathrm{Part}(R_{1,1}) = \{G_{1,1}, \overline{G}_{1,1}\}$. Если $a_1a_2 \notin R_{1,1}$, то $R_{1,1} \in \mathfrak{R}$ и разрез $R = R_{1,1}$ нам подходит.

Пусть $a_1a_2 \in R_{1,1}$. По построению множества $R_{1,1}$ рёбро a_1a_2 имеет конец в $\mathrm{Int}(G_{1,1})$, пусть это a_1. Рассмотрим множество R, полученное из $R_{1,1}$ заменой a_1a_2 на a_1. Если $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \{a_1\}$, то R – разрез,

$$\mathrm{Part}(R) = \{G_{1,1},\, \overline{G}_{1,1} \cup \{a_1\}\}$$

(см. рисунок 5a), откуда очевидно следует, что этот разрез независим с S и T, а стало быть, он нам подходит.

Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \{a_1\}$. Тогда, в частности, $a_1 = b_1$ (см. рисунок 5b). Кроме a_2 и b_2 эта вершина может быть смежна только с вершинами из $R_{1,1}$. Тогда из $d_G(a_1) \geqslant k+1$ следует, что $|V(R_{1,1})| \geqslant k-1$, а значит, $|R_{1,1}| \geqslant k+1$, противоречие. □

Лемма 8. *Пусть G – минимальный k-связный граф, а множество $E \subset E_{k+1}$ таково, что все разрезы из $\mathfrak{R}$, содержащие ребра из E – нормальные. Тогда существует множество*

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e,$$

состоящее из попарно независимых разрезов.

Доказательство. Пронумеруем $f_1, \ldots, f_m$ ребра из E. Пусть

$$\mathfrak{S}' = \{S_1, \ldots, S_{\ell-1}\} \subset \mathfrak{R}$$

– множество попарно независимых разрезов, причем $f_i \in S_i$.

Пусть $f_\ell \in T \in \mathfrak{R}$. Докажем, что можно изменить разрез T так, чтобы он стал независимым со всеми разрезами из $\mathfrak{S}'$. Доказательство будет индукцией по $|\mathfrak{S}'|$. База для случая $|\mathfrak{S}'| = 0$ очевидна.

Докажем индукционный переход. Пусть разрез T независим с разрезами $S_1, \ldots, S_{i-1}$, но зависим с S_i. Пусть

$$\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{F_1, F_2\}, \quad G_{x,y} = F_x \cap H_y.$$

Так как разрезы S_i и T нормальны, по леммам 6 и 7 существует такой разрез $R \ni f_\ell$, что одна из частей $\mathrm{Part}(R)$ – это $G_{\alpha,\beta}$, а другая часть

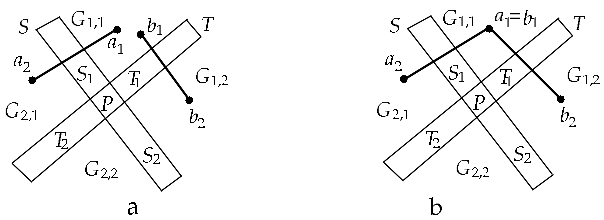

Рис. 5. Разбиение графа парой зависимых разрезов.

U – либо $\overline{G}_{\alpha,\beta}$, либо $\overline{G}_{\alpha,\beta} \cup \{a\}$, где a – конец ребра $f_\ell = ab$, лежащий в $G_{\alpha,\beta}$.

Мы хотим доказать, что R независим с произвольным разрезом $S_j \in \mathfrak{S}'$. Пусть $\mathrm{Part}(S_j) = \{D_1, D_2\}$. Так как разрезы S_i и S_j независимы, разрезы T и S_j независимы, а разрезы T и S_i зависимы, по лемме 1 можно считать, что

$$F_1 \supset D_2, \quad F_2 \subset D_1, \quad H_1 \supset D_2, \quad H_2 \subset D_1. \tag{5}$$

Разберем несколько случаев.

1. $\alpha = 2$.
Тогда $G_{2,\beta} \subset F_2 \subset D_1$ и $U \supset F_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6a), то есть, R и S_j независимы.

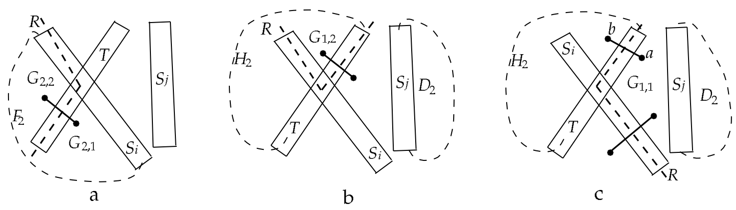

Рис. 6. Разрезы S_i, S_j и T.

2. $\alpha = 1$. Разберем два подслучая.

2.1. $\beta = 2$.
Тогда $G_{\alpha,\beta} = G_{1,2} \subset H_2 \subset D_1$ и $U \supset H_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6b), что означает независимость разрезов S_j и R.

2.2. $\beta = 1$.
В силу (5) мы имеем $D_1 \supset H_2 \cup F_2 = \overline{G}_{1,1}$ (см. рисунок 6c). Так как разрезы T и S_j независимы и не имеют общих рёбер, по лемме 2 мы имеем $D_1 \supset W(T) \ni a$. Значит, $D_1 \supset \overline{G}_{1,1} \cup \{a\} \supset U$. Из $D_2 \subset F_1$ и $D_2 \subset H_1$ следует, что $D_2 \subset H_1 \setminus \mathrm{Int}(F_2) = G_{1,1}$. Таким образом, мы проверили независимость разрезов S_j и R. $\square$

Лемма 9. *Пусть G – минимальный k-связный граф, а $P = a_1 \dots a_n$ – простой путь, все вершины которого принадлежат множеству V_{k+1}. Предположим, что существуют попарно независимые разрезы*

$S_1, \ldots, S_{n-1} \in \mathfrak{R}$, *такие, что*

$$a_i a_{i+1} \in S_i, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\},$$
$$\textit{причем} \quad a_i \in \mathrm{Int}(A_i) \quad \textit{и} \quad a_{i+1} \in \mathrm{Int}(B_{i+1}).$$

Тогда $B_2 \supset B_n \supset \mathrm{N}_G(a_n)$.

Доказательство. При $n = 2$ это утверждение очевидно. Предположим, что $n \geqslant 3$. Докажем, что $B_i \supset B_{i+1}$ при $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Так как разрезы S_{i-1} и S_i независимы, $a_i \in \mathrm{Int}(B_i)$ и $a_i a_{i+1} \notin S_{i-1}$, мы имеем $a_{i+1} \in B_i$. Значит, ни одна из частей $\mathrm{Part}(S_i)$ не может содержать $B_i \ni a_i, a_{i+1}$. В силу независимости разрезов S_{i-1} и S_i, тогда B_i содержит одну из частей $\mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}$.

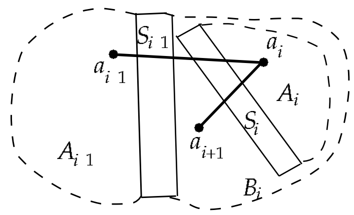

Рис. 7. Разрезы S_{i-1} и S_i: случай, когда $B_i \supset A_i$.

Предположим, что $B_i \supset A_i$ (см. рисунок 7). Тогда из $a_{i-1} \notin B_i$ следует $a_{i-1} \notin A_i$. Однако, вершина a_{i-1} смежна с вершиной $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$, что невозможно. Следовательно, $B_i \supset B_{i+1}$.

Из доказанного следует, что $B_2 \supset B_n$. Так как $a_n \in \mathrm{Int}(B_n)$, мы имеем $\mathrm{N}_G(a_n) \subset B_n \subset B_2$. □

Лемма 10. *Пусть G – минимальный k-связный граф, $E \subset E_{k+1}$, а множество*

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \textit{где} \quad e \in S_e,$$

состоит из попарно независимых разрезов. Пусть R – граница разреза $S_e \in \mathfrak{S}$. Тогда любой простой путь с концами из R содержит ребро не из множества E.

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим кратчайший путь $a_1 a_2 \ldots a_n$ по рёбрам из E, концы которого a_1, a_n лежат в R. Если путь P содержит всего одно ребро $a_1 a_2$, то $a_1 a_2 \neq e$, так как граница R разреза $S_e \ni e$ содержит ровно одну вершину ребра e.

Если же $n \geqslant 3$ и $e = a_1a_2$, то перенумеруем вершины пути P в обратном порядке. Таким образом, в любом случае мы добьемся того, что $e \neq a_1a_2$. Пусть

$$S_i = S_{a_ia_{i+1}},\ \mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\},\ \text{где } a_i \in \mathrm{Int}(A_i) \text{ и } a_{i+1} \in \mathrm{Int}(B_{i+1}).$$

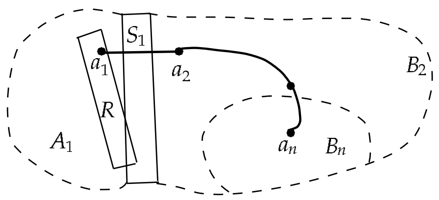

Рис. 8. Путь по ребрам из E и разрезы.

Так как разрезы S_e и S_1 независимы и не имеют общего ребра, по лемме 2 одна из частей $U \in \mathrm{Part}(S_1)$ содержит $W(S_e)$. Значит, $U \supset R \ni a_1$, откуда следует, что $U = A_1$. По лемме 9 мы имеем $\mathrm{N}_G(a_n) \subset B_2$ (см. рисунок 8).

По замечанию 2 мы знаем, что R является k-вершинным разделяющим множеством графа G. Из $R \subset A_1$ следует, что R не разделяет $B_2 \cup W(S_1)$. Значит, одна из компонент сяности M графа $G - R$ лежит в $\mathrm{Int}(A_1)$. Из k-связности графа G следует, что вершина $a_n \in R$ должна иметь смежную вершину в $M \subset \mathrm{Int}(A_1)$, что противоречит доказанному выше. $\square$

3.5. Кривые разрезы.

Лемма 11. *Пусть G – минимальный k-связный граф, причем в множестве $\mathfrak{R}$ есть кривые разрезы. Тогда $e_k + c \geqslant k + 1$.*

Доказательство. Везде в доказательстве через S_e мы обозначаем разрез из $\mathfrak{R}$, содержащий ребро $e \in E_{k+1}$.

1. *Пусть $e = a_1a_2 \in E_{k+1}$, а разрез S_e – кривой, причем*

$$a_1 \in A_1 \in \mathrm{Part}(S_e) \quad \text{и} \quad |\mathrm{Int}(A_1)| < \frac{k}{2}.$$

Пусть $U \ni a_1, a_2$ – компонента связности графа G_{k+1}, а $T = G_{k+1}(U)$. Тогда T – дерево по следствию 2. Предположим, что $d_T(a_1) > 1$. Тогда в дереве T существует путь от a_1 до висячей вершины a, не проходящий по a_1a_2. Пусть $a'a$ – последнее ребро этого пути, $S_{aa'} \in \mathfrak{R}$, причем

$a \in A \in \mathrm{Part}(S_{aa'})$. Тогда по лемме 4 мы имеем $\mathrm{Int}(A) < \mathrm{Int}(A_1) < \frac{k}{2}$. В частности, разрез $S_{aa'}$ – также кривой.

2. *Пусть a_1 – висячая вершина дерева T,*

$$|\mathrm{Int}(A_1)| = p < \frac{k}{2}, \quad S = V(S_{a_1a_2}).$$

Отметим, что $|S| = k-1$. Пусть

$$M = \mathrm{Int}(A_1) \cap V_k, \quad m = |M|$$

(см. рисунок 9а). Очевидно, вершина a_1 не может быть смежна с вершинами из $V_{k+1} \cap A_1$, следовательно, вершина a_1 смежна не более чем с m вершинами из $\mathrm{Int}(A_1)$. Из $d_G(a_1) = k+1$ следует, что тогда a_1 несмежна не более чем с $m-1$ вершинами из S. Все смежные с a_1 вершины из S имеют степень k. Таким образом,

$$|\mathrm{Int}(A_1) \cap V_{k+1}| = p - m, \quad |S \cap V_{k+1}| \leqslant m-1 \quad \text{и} \quad |A_1 \cap V_{k+1}| \leqslant p-1.$$

Разберем два случая.

2.1. $m \geqslant 2$.

Каждая вершина множества M может быть смежна только с вершинами из A_1. Поэтому вершина множества M смежна не более чем с $p-1$ вершинами из V_{k+1}, а значит, хотя бы с $k-p+1$ вершинами из V_k. Просуммировав рёбра, исходящие из всех вершин M к вершинам из V_k, мы получим хотя бы $m(k-p+1)$. Однако, рёбра между вершинами множества M (которых не более чем $\frac{m(m-1)}{2}$) в этой сумме посчитаны дважды, поэтому можно написать, что

$$e_k \geqslant m(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \geqslant k+3+(m-2)(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \geqslant k+2, \tag{6}$$

что и требовалось доказать. (При $m = 2$ неравенство (6) очевидно, а при $m \geqslant 3$ мы воспользовались тем, что $k-p+1 \geqslant p \geqslant m$ и $m-2 \geqslant \frac{m-1}{2}$, а следовательно, правая часть неравенства (6) не менее чем $k+3$.)

2.2. $m = 1$.

Пусть $M = \{x\}$. Понятно, что в этом случае a_1 смежна ровно с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_1)$ (с вершиной x), а значит, a_1 смежна со всеми вершинами из S. Следовательно, $S \subset V_k$.

Предположим, что $Y = (\mathrm{Int}(A_1) \setminus \{a_1\}) \cap V_{k+1} \neq \varnothing$. По доказанному выше, тогда Y – одна или несколько компонент связности графа G_{k+1}. Пусть $T' = G_{k+1}(Y)$. По следствию 4 граф T' – лес.

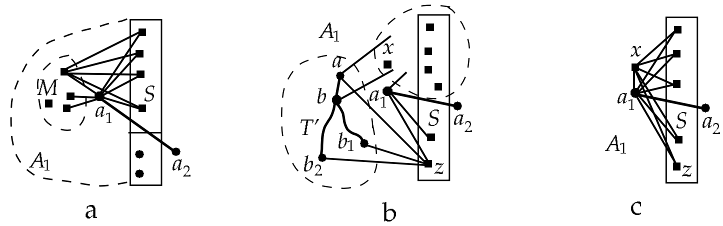

Рис. 9. Кривой разрез $S_{a_1a_2}$ и часть A_1.

Пусть $a \in Y$, $d_{T'}(a) \leqslant 1$. Тогда $d_{T'}(a) = 1$, причем a должна быть смежна с x и со всеми $k-1$ вершинами из S. Таким образом, лес T' не содержит изолированных вершин.

Пусть a – висячая вершина T', смежная в T' с вершиной b степени $d_{T'}(b) = \ell$ (см. рисунок 9b). Тогда в T' существуют $\ell-1$ непересекающиеся по внутренним вершинам пути P_1, …, $P_{\ell-1}$ от b до отличных от a висячих вершин b_1,…, $b_{\ell-1}$ леса T'.

Рассмотрим разрез $S_{ab} \in \mathfrak{R}$. Отметим, что вершина b смежна хотя бы с $k-\ell+1$ вершинами множества $S\cup\{x\}$, и все эти вершины должны быть в S_{ab}. Разрез S_{ab} содержит $k-1$ вершину, а значит, не содержит некоторую вершину $z \in S \cup \{x\}$.

Как доказано выше, вершина a и каждая из висячих вершин b_1,…, $b_{\ell-1}$ смежна с z, а значит, разделяющий a и b разрез S_{ab} должен содержать по вершине каждого из путей P_1, …, $P_{\ell-1}$. Но тогда S_{ab} содержит хотя бы k вершин, что не так. Противоречие.

Значит, $\mathrm{Int}(A_1) = \{a_1, x\}$ (см. рисунок 9c). В этом случае мы имеем $e_k \geqslant k-1$ (столько рёбер ведет от x до вершин из S). Если утверждение леммы не выполнено, то других рёбер в E_k нет, а граф G_{k+1} имеет одну компоненту связности, то есть, G_{k+1} – дерево.

Остается проанализировать последний случай. В этом случае все рёбра из E_k соединяют вершину $x \in \mathrm{Int}(A_1)$ с вершинами множества S. Отметим, что в $\mathrm{N}_G(x)$ нет отличных от a_1 вершин из V_{k+1}.

3. *Докажем, что все рёбра графа G_{k+1}, входящие в кривые разрезы – это рёбра некоторого простого пути $Q = a_1a_2\dots a_n$, причем $n \leqslant \frac{k-1}{2}$, а все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1}.*

Пусть $c_1c_2 \in E(G_{k+1})$, $S_{c_1c_2} \in \mathfrak{R}$ – кривой разрез,

$$c_1 \in C_1 \in \mathrm{Part}(S_{c_1c_2}) \quad \text{и} \quad |\mathrm{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}.$$

Рассмотрим любой путь в графе G_{k+1} от c_1 до некоторой висячей вершины a_1', не проходящий через c_2 (см. рисунок 10a). Пусть $a_2'a_1'$ – последнее ребро этого пути,

$$S_{a_1'a_2'} \in \mathfrak{R}, \quad a_1' \in \mathrm{Int}(A_1') \in \mathrm{Part}(S_{a_1'a_2'}).$$

Тогда по лемме 4 мы имеем $|\mathrm{Int}(A_1')| < |\mathrm{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}$.

Пусть $a_1' \neq a_1$. Проведем рассуждения, аналогичные сказанному в пунктах 1 и 2, для части A_1'. Мы найдем не менее чем $k-1$ ребер из E_k в части A_1'. Мы рассматриваем случай, когда $e_k = k-1$. Поэтому в части A_1' ровно $k-1$ ребро из E_{k-1}, но тогда все эти рёбра инцидентны смежной с a_1' вершине x'. Очевидно, $x' \neq x$. Тогда E_k содержит хотя бы k рёбер: это $k-1$ ребер, инцидентных вершине x и хотя бы одно отличное от них ребро, инцидентное x'. В этом случае утверждение леммы доказано.

Сказанное выше означает, что все рёбра графа G_{k+1}, входящие в кривые разрезы – это рёбра некоторого простого пути

$$Q = a_1a_2\ldots a_n,$$

причем все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1}. Пусть

$$a_ia_{i+1} \in S_i \in \mathfrak{R}, \quad a_i \in A_i \in \mathrm{Part}(S_i).$$

По лемме 4 тогда

$$2 = \mathrm{Int}(A_1) < \mathrm{Int}(A_2) < \cdots < \mathrm{Int}(A_{n-1}) \leqslant \frac{k-1}{2}.$$

Следовательно, $n \leqslant \frac{k-1}{2}$.

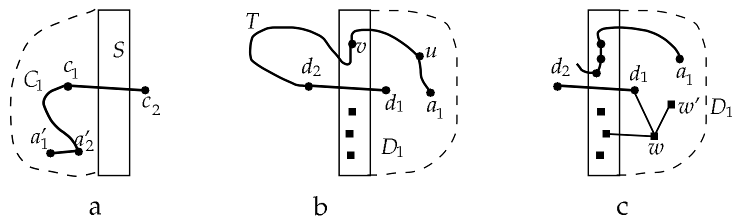

Рис. 10. Путь $a_1\ldots a_n$ и кривые разрезы.

4. *Пусть E – множество всех рёбер графа G_{k+1}, кроме рёбер пути Q.*
Рассмотрим два случая.

4.1 $E \neq \varnothing$**.**
По лемме 8 можно выбрать попарно независимые разрезы $S_e \in \mathfrak{R}$ для всех рёбер $e \in E$. Пусть $d_1d_2 \in E(G_{k+1})$, причем d_1 – отличная от a_1 висячая вершина дерева G_{k+1}, а $d_1 \in D_1 \in \mathrm{Part}(S_{d_1 d_2})$.

Предположим, что $v \in S_{d_1 d_2} \cap V_{k+1}$ (см. рисунок 10b). По лемме 10, путь от v до d_2 по дереву G_{k+1} должен содержать хотя бы одно ребро пути Q. Это означает, что $v \in \{a_1, \dots, a_n\}$ и хотя бы одна из вершин $a_1,\dots, a_n$ лежит в $\mathrm{Int}(D_2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Int}(D_1) \cap V_{k+1}$. Тогда путь от u до d_2 по дереву G_{k+1} должен проходить через вершину разреза $S_{d_1 d_2}$, а тогда, как показано выше, этот путь содержит рёбро пути Q. Следовательно, $u \in \{a_1, \dots, a_n\}$ и хотя бы одна из вершин $a_1,\dots, a_n$ лежит в $\mathrm{Int}(D_2)$.

Таким образом, все вершины из $D_1 \cap V_{k+1}$, кроме d_1, принадлежат множеству $\{a_1, \dots, a_n\}$, но хотя бы одна из вершин пути Q не лежит в D_1. Следовательно,

$$|V_{k+1} \cap D_1| \leqslant n \leqslant \frac{k-1}{2}. \tag{7}$$

4.2. $E = \varnothing$.
В этом случае $G_{k+1} = Q$, а a_n – висячая вершина графа G_{k+1}. Пусть $d_1 = a_n$, а $D_1 \in \mathrm{Part}(S_{n-1})$ – часть, содержащая a_n. Так как $a_{n-1} \notin D_1$, и в этом случае выполняется неравенство (7).

Продолжим рассуждения для обоих случаев. Вершина $d_1 \in \mathrm{Int}(D_1)$ – висячая в дереве G_{k+1}, и потому смежна с k вершинами из $V_k \cap D_1$, среди которых есть вершина $w \in \mathrm{Int}(D_1)$ (см. рисунок 10c). Поскольку $d_1 \neq a_1$, то $x \neq w$. Вершина w смежна с k вершинами из D_1. Из неравенства (7) следует, что в $\mathrm{N}_G(w)$ есть хотя бы

$$k - |V_{k+1} \cap D_1| \geqslant k - n \geqslant \frac{k+1}{2} > 1$$

вершин степени k, среди которых можно найти вершину $w' \neq x$ (см. рисунок 10c). Тогда ребро ww' дает нам $e_k \geqslant k$ и завершает доказательство леммы. □

3.6. Доказательство теоремы 1. Мы считаем, что $k > 1$, иначе доказательство теоремы очевидно. Рассмотрим несколько случаев.

1. $E_{k+1} = \varnothing$.
Тогда $v_{k+1} = c \leqslant k$. Если $v_{k+1} = k$, то $e_k = 0$ и наш граф представляет собой k попарно несмежных вершин степени $k+1$, с каждой из которых смежны $k+1$ попарно несмежных вершин степени k. Это граф $K_{k,k+1}$, который равен $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T.

Пусть $v_{k+1} < k$. Тогда любая вершина $x \in V_k$ смежна хотя бы с $k - v_{k+1}$ вершинами степени k, откуда легко понять, что

$$e_k \geqslant \frac{v_k(k - v_{k+1})}{2} > k - v_{k+1},$$

а это противоречит следствию 3. (Мы воспользовались тем, что $v_k \geqslant k + 1 > 2$.)

2. *Далее мы считаем, что* $E_{k+1} \neq \varnothing$. Из леммы 11 и следствия 3 понятно, что достаточно рассмотреть случай, когда рёбра из E_{k+1} не входят в кривые разрезы. Тогда по лемме 8 для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ мы построим разрез $S_e \ni e$ так, чтобы эти разрезы были попарно независимы. Пусть $\mathfrak{S}$ – множество построенных разрезов.

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\mathcal{A} = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathrm{Part}(S),$$

а $A_1, \ldots, A_n$ – все минимальные по включению части из $\mathcal{A}$. Очевидно, $n \geqslant 2$. Пусть $S_i \in \mathfrak{S}$ – отделяющий часть A_i разрез из $\mathfrak{S}$,

$$R_i = A_i \cap W(S_i), \quad p_i = |R_i \cap V_k|, \quad B_i = A_i \setminus R_i.$$

Пусть $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$ – конец ребра из E_{k+1}, входящего в разрез S_i (см. рисунок 11a). Тогда $\{a_i\} = \mathrm{Int}(A_i) \cap R_i$.

Изучим свойства частей A_i.

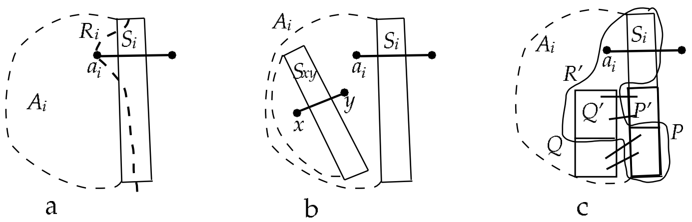

Рис. 11. Часть A_i.

Лемма 12. *Выполняются следующие утверждения.*

1) *$B_i \neq \varnothing$, множество R_i отделяет B_i от остальных вершин графа. Каждая вершина из R_i смежна хотя бы с одной вершиной из B_i.*

2) *Если $x \in B_i \cap V_{k+1}$, то $\{x\}$ – компонента связности графа G_{k+1}.*

3) *Пусть c_i — это количество лежащих в B_i одновершинных компонент связности графа G_{k+1}, а $e_{k,i}$ — это количество инцидентных вершинам из B_i рёбер из E_k. Тогда $c_i + e_{k,i} \geqslant p_i$.*

Доказательство. 1) Так как разрез S_i нормален, $|\mathrm{Int}(A_i)| > 1$, а значит, $B_i = \mathrm{Int}(A_i) \setminus \{a_i\} \neq \varnothing$. Тогда R_i отделяет B_i от остальных вершин графа G. Из $|R_i| = k$ и k-связности графа G следует, что каждая вершина множества R_i смежна хотя бы с одной вершиной из B_i.

2) Предположим, что $y \in V_{k+1}$ и $xy \in E(G)$. Тогда $y \in A_i$, $xy \in E_{k+1}$. Рассмотрим разрез $S_{xy} \in \mathfrak{S}$ (см. рисунок 11b). Из независимости разрезов S_i и S_{xy} и минимальности части A_i следует, что одна из частей $\mathrm{Part}(S_{xy})$ должна содержать A_i, что, очевидно, невозможно: вершины $x, y \in A_i$ лежат в разных частях $\mathrm{Part}(S_{xy})$. Противоречие завершает доказательство.

3) Пусть P – множество всех входящих в R_i вершин степени k, а Q – множество всех смежных с P вершин из B_i. Пусть $V_{k+1} \cap Q = Q'$, а P' – множество всех вершин из P, смежных в $\mathrm{Int}(A_i)$ только с вершинами из Q'. Напомним, что $|P| = p_i$.

Тогда $c_i \geqslant |Q'|$ по пункту 2. Каждая вершина из $P \setminus P'$ смежна с вершиной степени k из множества Q, откуда $e_{k,i} \geqslant |P| - |P'|$. Если $|P'| \leqslant |Q'|$, то мы получаем, что $e_{k,i} + c_i \geqslant p_i$, что нам и нужно.

Остается случай, когда $|P'| > |Q'|$. Предположим, что $B_i \neq Q'$. Тогда множество $R' = (R \setminus P') \cup Q'$ состоит менее чем из k вершин и отделяет непустое множество $B_i \setminus Q'$ от остальных вершин графа G (см. рисунок 11c). В k-связном графе такое невозможно. Следовательно, $Q' = B_i \neq \varnothing$. Как мы знаем из пункта 2, каждая вершина из Q' может быть смежна только с вершинами из $A_i \cap V_k$, а это в нашем случае только вершины множества P. Но $|P| < k$, противоречие. □

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $p_1 = \min(p_1, \dots p_n)$. Тогда по лемме 10 вершины из $V_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^n R_i)$ входят хотя бы в $k - p_1$ различных компонент связности графа G_{k+1}. Если $p_1 > 0$, то в силу леммы 12 мы имеем

$$c + e_k \geqslant (k - p_1) + \sum_{j=1}^{n} p_j \geqslant k - p_1 + 2p_1 \geqslant k + 1,$$

что противоречит следствию 3.

Остается последний, самый интересный случай $p_1 = 0$. В этом случае по лемме 10 все k вершин из R_1 принадлежат разным компонентам связности графа G_{k+1}, откуда следует, что $c = k$. Пусть $U_1, \dots, U_k$ – компоненты связности графа G_{k+1}, тогда $T_i = G(U_i)$ – деревья. По следствию 3 мы имеем $e_k = 0$, то есть, никакие две вершины степени k в графе G не смежны.

Мы будем предполагать, что для любого меньшего чем G экстремального минимального k-связного графа утверждение теоремы доказано.

По лемме 10 каждое из деревьев $T_1, \dots, T_k$ содержит ровно по одной вершине множества R_1. Пусть $R_1 = \{b_1, \dots, b_k\}$, причем $b_i \in V(T_i)$. Одна из этих вершин совпадает с a_1 – концом входящего в разрез S_1 ребра. Будем считать, что $b_1 = a_1$. Предположим, что b_i смежна с вершиной $x \in B_1 \cap V_{k+1}$. Тогда рассмотрим разрез $S_{xb_i} \in \mathfrak{S}$. Этот разрез по построению независим с S_1. Пусть $A \in \mathrm{Part}(S_{xb_i})$ – часть, содержащая x, но не содержащая b_i (см. рисунок 12a). Тогда $A \subsetneq A_1$ – противоречие с выбором части A_1.

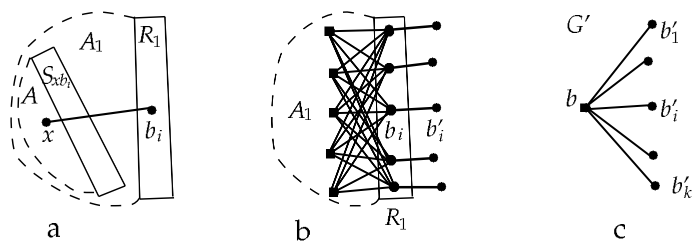

Рис. 12. Часть A_1 и граф G'.

Пусть $b_1 b'_1 \in S_1$ и $N_1 = \mathrm{N}_G(b_1) \setminus \{b'_1\}$. Так как $b_1 \in \mathrm{Int}(A_1)$, мы имеем $N_1 \subset A_1$. Из доказанного выше ясно, что $N_1 \subset V_k$. Вместе с $R_1 \subset V_{k+1}$ это означает, что $N_1 \subset B_1$.

Так как $e_k = 0$, каждая вершина $x \in N_1$ должна быть смежна с k вершинами из V_{k+1}, и все эти вершины лежат в части A_1. Из $c = k$ и доказанного выше следует, что $V_{k+1} \cap A_1 = R_1$, а значит,

$$\mathrm{N}_G(x) = R_1 = \{b_1, \dots, b_k\}.$$

Теперь понятно, что $B_1 = N_1$ и это множество состоит из k вершин степени k, каждая из которых смежна с вершинами $b_1, \ldots, b_k$ (см. рисунок 12b).

По замечанию 4 все вершины $b_1, \ldots, b_k$ имеют в графе G степень $k+1$, а значит, для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$ вершина b_i – висячая в дереве T_i. Пусть $b_i b_i' \in E(T_i)$ – единственное инцидентное b_i ребро дерева T_i. Тогда все вершины $b_1', \ldots, b_k'$ различны.

Построим новый граф G', добавив к графу $G - R_1 - B_1$ новую вершину b степени k с $\mathrm{N}_{G'}(b) = \{b_1', \ldots, b_k'\}$ (см. рисунок 12c). Пусть $T_i' = T_i - b_i$. Отметим, что

$$v_k(G') = v_k(G) - k + 1, \quad v(G') = v(G) - 2k + 1. \tag{8}$$

Лемма 13. *Пусть $x \in V_k(G)$. Тогда $\mathrm{N}_G(x)$ содержит по одной вершине каждого из деревьев $T_1, \ldots, T_k$.*

Доказательство. Пусть x смежна с вершинами y_1 и y_m одного дерева T_ℓ, а $y_1 y_2 \ldots y_m$ – путь в T_ℓ между ними. Пусть

$$S_{y_1 y_2} \in \mathfrak{S}, \quad \mathrm{Part}(S_{y_1 y_2}) = \{Y_1, Y_2\}, \quad Y_1 \ni y_1 \quad \text{и} \quad Y_2 \ni y_2.$$

По лемме 9 мы знаем, что $\mathrm{N}_G(y_m) \subset Y_2$. Поскольку $y_1 \in \mathrm{Int}(Y_1)$, мы имеем $x \in S_{y_1 y_2}$ (см. рисунок 13).

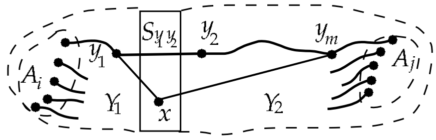

Рис. 13. Вершина x смежна с двумя вершинами одного дерева.

Разрез $S_{y_1 y_2}$ разделяет какие-то две минимальные части A_i и A_j, а их границы, как доказано выше, содержат по вершине каждого из деревьев $T_1, \ldots, T_k$. Значит, и $S_{y_1 y_2}$ должен содержать по вершине каждого из этих деревьев, кроме T_ℓ, то есть, не может содержать вершину x, противоречие. $\square$

Лемма 14. *G' – минимальный k связный граф.*

Доказательство. 1. *Докажем, что граф G' – k-связный.*
Предположим, что G' имеет разделяющее множество Q из менее чем k вершин. Тогда Q не содержит ни одной вершины какого-то из деревьев

$T_1',\dots,T_k'$. Пусть $Q\cap V(T_1')=\varnothing$, а U – компонента связности графа $G'-Q$, содержащая все вершины дерева T_1'.

Пусть $x\in V_k(G')\setminus Q$, $x\neq b$. Тогда по лемме 13 вершина x соединена ребром с деревом T_1', следовательно, $x\in U$. Если $b\notin Q$, то вершина b также принадлежит U (так как смежна с T_1).

Пусть $x\in V_{k+1}(G')\setminus Q$, $x\notin U$. Можно считать, что $x\in V(T_2')$. Пусть $d_{T_2}(x)=m$. Тогда в дереве T_2' существуют m непересекающихся путей от x до различных висячих вершин $y_1,\dots,y_m$. Каждая вершина y_i смежна в графе G' с вершиной $z_i\in V_k(G')$. Кроме того, вершина x смежна в G' с вершинами $z_{m+1},\dots,z_{k+1}\in V_k(G')$ (см. рисунок 14a). По лемме 13 все вершины $z_1,\dots,z_{k+1}$ различны, выше доказано, что эти вершины принадлежат компоненте U. Значит, для каждого $i\in\{1,\dots,k+1\}$ множество Q должно содержать вершину z_i или вершину, лежащую на пути от x до z_i. Но тогда $|Q|\geqslant k+1$, противоречие.

Таким образом, $U\supset V(G'-Q)$, то есть, граф $G'-Q$ связен. Полученное противоречие завершает доказательство.

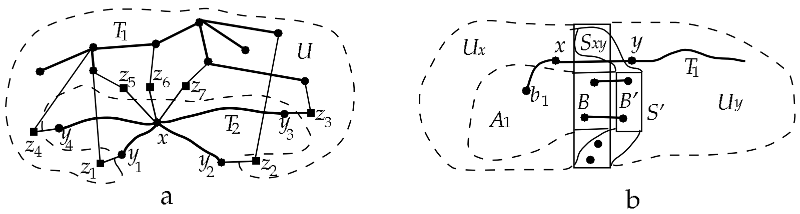

Рис. 14. Разрезы S_x и S'.

2. *Докажем, что граф G' – минимальный.*

Пусть $xy\in E(G')$. Если хотя бы один из концов этого ребра имеет в G' степень k, то граф $G'-xy$ не является k-связным. Остается рассмотреть случай, когда $xy\in E_{k+1}(G')$.

Не умаляя общности положим, что $xy\in E(T_1')$. Рассмотрим разрез $S_{xy}\in\mathfrak{S}$ графа G, он делит G на две части $U_x\ni x$ и $U_y\ni y$ (см. рисунок 14b). Так как разрезы в $\mathfrak{S}$ независимы, можно считать, что $A_1\subset U_x$. Если $S_{xy}\cap R_1=\varnothing$, то S_{xy} – разрез графа G', отделяющий U_y от $(U_x\setminus A_1)\cup\{b\}$.

Пусть
$$B=R_1\cap S_{xy},\quad \text{и}\quad B'=\{b_i'\,:\,b_i\in B\}.$$

Отметим, что $b_1 \notin B$ по лемме 10. Для каждой вершины $b_i \in B$ в части U_y должна быть вершина, смежная с b_i, но такая вершина может быть только одна – это b'_i. Следовательно, $S' = (S_{xy} \setminus B) \cup B'$ – разрез графа G с

$$\mathrm{Part}(G; S') = \{U_x \cup B',\, U_y \setminus B\}.$$

Тогда S' – разрез графа G' с

$$\mathrm{Part}(G'; S') = \{(U_x \cup B' \cup \{b\}) \setminus A_1),\, U_y \setminus B\}.$$

Таким образом, граф G' – минимальный. $\square$

Итак, рассмотрим минимальный k-связный граф G'. Из $v_k(G) = \frac{(k-1)v(G)+2k}{2k-1}$ и равенств (8) следует, что $v_k(G') = \frac{(k-1)v(G')+2k}{2k-1}$. По индукционному предположению $G' = G_{k,T'}$ для некоторого дерева T' с $\Delta(T') \leqslant k+1$. Тогда $T'_1, \dots, T'_k$ – это копии дерева T'. Так как $\mathrm{N}_{G'}(b) = \{b'_1, \dots, b'_k\}$, по построению графа $G_{k,T'}$ в дереве T' есть такая вершина b', которая при изоморфизме копий соответствует вершинам $b'_1, \dots, b'_k$ и $d_{T'}(b') \leqslant k$. Пусть дерево T получено из T' присоединением висячей вершины к b'. Теперь нетрудно понять, что $\Delta(T) \leqslant k+1$ и $G = G_{k,T}$.

Литература

1. G. A. Dirac, *Minimally 2-connected graphs.* — J. Reine and Angew. Math. **268** (1967), 204–216.
2. M. D. Plummer, *On minimal blocks.* — Trans. Amer. Math. Soc. **134** (1968), 85–94.
3. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* — Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
4. W. Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* — Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
5. W. Mader, *On vertices of degree n in minimally n-connected graphs and digraphs.* — Combinatorics, Paul Erdös is Eighty, Budapest **2** (1996), 423- 449.
6. W. Mader, *Zur Struktur minimal n-fach zusammenhängender Graphen.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 49–69.
7. J. G. Oxley, *On some extremal connectivity results for graphs and matroids.* — Discrete Math. **41** (1982), 181–198.
8. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 90–148.
9. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
10. Д. В. Карпов, *Минимальные двусвязные графы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 106–127.

Karpov D. V. Minimal k-connected graphs with minimal number of vertices of degree k.

A graph is k-connected if it has at least $k + 1$ vertices and remains connected after deleting any its $k-1$ vertices. A k-connected graph is called minimal, if it becomes not k-connected after deleting any edge. W. Mader has proved that any minimal k-connected graph on n vertices has at least $\frac{(k-1)n+2k}{2k-1}$ vertices of degree k. We prove that any minimal k-connected graph with minimal number of vertices of degree k is a graph $G_{k,T}$ for some tree T with vertex degrees at most $k + 1$. The graph $G_{k,T}$ is constructed from k disjoint copies of the tree T. For any vertex a of the tree T we denote by $a_1, \ldots, a_k$ the correspondent vertices of copies of T. If the vertex a has degree j in the tree T then we add $k+1-j$ new vertices of degree k which are adjacent to $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург;
Математико-механический
факультет СПбГУ, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 19 ноября 2014 г.