Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

В. Г. Фоменко

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА ЛАМЕ (BC-МЕТОД)

§1. Введение

О работе. В работе [3] решена обратная задача восстановления скоростей быстрых (p-) и медленных (s-) волн в модельной системе типа Ламе по динамическим граничным данным. Подход основан на разделении граничных управлений на два класса. Управления из этих классов инициируют только p-волны или только s-волны соответственно. Такой подход заведомо не применим к полной системе Ламе (с переменной плотностью и младшими членами), т.к. разделение управлений в ней невозможно.

Позже, в статье [10] предложена схема, не использующая разделения управлений. Как таковая, она более перспективна для работы с полной системой, однако соответствующая обратная задача до сих пор не решена.

В настоящей работе для *системы типа Ламе* предлагается еще одна схема, основанная на идеях статьи [8] и также не использующая разделения управлений. С ней мы связываем надежды на прогресс в задаче для полной системы Ламе.

Как и предыдущие, новая схема является версией метода граничного управления (BC-метода), использующего свойства управляемости динамических систем для решения обратных задач. Для системы Ламе эти свойства установлены в [9].

Основной результат. Рассматривается динамическая система типа Ламе, в которой имеются волновые моды двух типов (p-волны и s-волны), а скорости мод c_p и c_s зависят от точки, причем всюду $c_p > c_s$. Плотность в области предполагается постоянной ($\rho = 1$).

Главный результат работы – восстановление скоростей c_p и c_s в приграничной (регулярной) зоне по оператору реакции на глубину, соответствующую времени наблюдения.

Ключевые слова: обратные задачи, система типа Ламе, граничное управление, оператор реакции.

§2. Геометрия.

2.1. Метрики. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ есть ограниченная область с гладкой[1] границей Γ. В $\overline{\Omega}$ заданы гладкие функции (*скорости*) $c_\alpha = c_\alpha(x)$ $(\alpha = p, s)$, такие, что $0 < c_s < c_p$. Они определяют в $\overline{\Omega}$ конформно-евклидовы метрики

$$ds^2_\alpha := \frac{|dx|^2}{c^2_\alpha}, \tag{2.1}$$

где $|dx|$ – евклидов элемент длины в $\mathbb{R}^3$. Через $\tau_\alpha(x, y)$ обозначим расстояния в этих метриках. Величины $T^*_\alpha := \max\limits_{\Omega} \tau_\alpha(\,\cdot\,, \Gamma)$ назовем *временами заполнения.*

Для подмножества $A \subset \overline{\Omega}$ определим его *метрические окрестности*

$$\Omega^r_\alpha[A] := \left\{x \in \overline{\Omega} \;\middle|\; \tau_\alpha(x, A) < r\right\}, \qquad r > 0$$

и обозначим через $\Omega^r_\alpha := \Omega^r_\alpha[\Gamma]$ окрестности границы (приграничные слои толщины r). Из соотношения скоростей следует $\tau_p(x, y) < \tau_s(x, y)$, $\Omega^r_s[A] \subset \Omega^r_p[A]$ для любых $x, y \in \overline{\Omega}$ $(x \neq y)$, $A \subset \overline{\Omega}$ и $r > 0$. Термин "времена заполнения" мотивирован равенствами $T^*_\alpha = \inf\{r > 0 \mid \Omega^r_\alpha = \overline{\Omega}\}$.

Для $A \subset \overline{\Omega}$ определим эквидистантные поверхности

$$\Gamma^r_\alpha[A] := \left\{x \in \overline{\Omega} \;\middle|\; \tau_\alpha(x, A) = r\right\}, \qquad r > 0$$

и обозначим через $\Gamma^r_\alpha := \Gamma^r_\alpha[\Gamma]$ эквидистанты границы.

2.2. Регулярная зона. Точке $x \in \overline{\Omega}$ сопоставим множества $\gamma_\alpha(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \tau_\alpha(x, \gamma) = \tau_\alpha(x, \Gamma)\}$ ближайших точек границы. Как известно, при достаточно малом $r > 0$ для любого $x \in \Omega^r_\alpha$ множества $\gamma_\alpha(x)$ состоят из одной точки, а система полугеодезических (лучевых) координат с базой Γ регулярна в Ω^r_α. Пусть $T^{\rm reg}_\alpha$ суть точные верхние грани тех r, при которых такая регулярность имеет место. Приграничные слои $\Omega^{T^{\rm reg}_\alpha}$ мы называем *регулярными зонами* соответствующих метрик.

Определим $T^{\rm reg} := \min\{T^{\rm reg}_p, T^{\rm reg}_s\}$ и общую регулярную зону $\Omega^{T^{\rm reg}} := \Omega^{T^{\rm reg}}_p$. Все дальнейшие рассмотрения мы проводим в этой общей регулярной зоне.

[1] всюду в работе, применительно к поверхностям, функциям, полям и т.д., *гладкий* означает C^∞-гладкий

2.3. Области влияния. В дальнейшем переменная $t \geqslant 0$ играет роль времени. Фиксируем $T > 0$ и обозначим через

$$Q^T := \Omega \times (0, T)\,, \qquad \Sigma^T := \Gamma \times [0, T]$$

пространственно-временной цилиндр и его боковую поверхность.

Для точки $(x_0, t_0) \in \overline{Q^T} = \overline{\Omega} \times [0, T]$ определим *конусы влияния*

$$K^T_\alpha[(x_0, t_0)] := \Big\{(x, t) \in \overline{Q^T} \mid \tau_\alpha(x, x_0) \leqslant t - t_0\Big\}\,.$$

Для $B \subset \overline{Q^T}$ подобласть

$$K^T_\alpha[B] := \overline{\bigcup_{(x_0, t_0) \in B} K^T_\alpha[(x_0, t_0)]}$$

называется *областью влияния* множества B.

Из определений видно, что сечение $t = \xi$ области влияния $K^T_\alpha[\Sigma^T]$ совпадает с ξ-окрестностью соответствующей метрики Γ в Ω:

$$\big\{x \in \overline{\Omega} \mid (x, \xi) \in K^T_\alpha[\Sigma^T]\big\} = \overline{\Omega^\xi_\alpha}\,, \qquad 0 < \xi \leqslant T. \tag{2.2}$$

2.4. Функции и поля. Рассматриваются следующие множества вещественных числовых и векторных ($\mathbb{R}^3$-значных) фунций. Последние называем полями.

Пространство $\mathcal{H}$. Основную роль играет пространство полей

$$\mathcal{H} := L_2(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

со скалярным произведением

$$(y, v)_{\mathcal{H}} := \int\limits_\Omega y(x) \cdot v(x)\, dx\,;$$

где "$\cdot$" – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Для измеримого $A \subset \Omega$ определим подпространство

$$\mathcal{H}[A] := \big\{y \in \mathcal{H} \,\big|\, \operatorname{supp} y \subset \overline{A}\big\}\,.$$

В пространстве $\mathcal{H}$ выделим подпространства:

(1) *соленоидальных полей*

$$\mathcal{J} := \{y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{div} y = 0 \quad \text{в } \Omega\} \tag{2.3}$$

(операция div понимается в смысле распределений); множество гладких полей $\mathcal{J} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ плотно в $\mathcal{J}$;

(2) *потенциальных полей*

$$\mathcal{G} := \{h \in \mathcal{H} \mid h = \nabla\varphi,\ \varphi \in W_2^1(\Omega),\ \varphi|_\Gamma = 0\}; \tag{2.4}$$

множество гладких полей $\mathcal{G} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ плотно в $\mathcal{G}$. Подпространства $\mathcal{J}$ и $\mathcal{G}$, состоящие из полей, локализованных в A, обозначаем $\mathcal{J}[A]$ и $\mathcal{G}[A]$.

Справедливо равенство (разложение Вейля):

$$\mathcal{H} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{G} \tag{2.5}$$

(см., например, [11, 15, 16]).

Пространство $\mathcal{F}^T$. Определим пространство $\mathcal{F}^T := L_2(\Sigma^T; \mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} := \int\limits_{\Sigma^T} f(\gamma, t) \cdot g(\gamma, t)\, d\Gamma\, dt\,,$$

где $d\Gamma$ – евклидов элемент площади на Γ. Класс гладких полей

$$\mathcal{M}^T := \left\{f \in C^\infty(\Sigma^T; \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0, T]\right\}$$

плотен в $\mathcal{F}^T$. Отметим, что поля из $\mathcal{M}^T$ аннулируются вблизи $t = 0$.

Подмножеству $B \subset \Sigma^T$ сопоставим подпространство

$$\mathcal{F}^T[B] := \left\{f \in \mathcal{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset \overline{B}\right\}.$$

Оно содержит плотное множество гладких полей $\mathcal{M}^T[B] := \mathcal{M}^T \cap \mathcal{F}^T[B]$.

Вектор $a \in \mathbb{R}^3$ в точке границы раскладывается в сумму

$$a = a_\nu + a_\theta = a^\nu\, \nu + a_\theta, \tag{2.6}$$

где ν – евклидова внешняя единичная нормаль к Γ, $a^\nu = a \cdot \nu$; a_ν, a_θ суть нормальная и касательная компоненты. Этому разложению мы сопоставляем запись

$$a = \begin{pmatrix} a^\nu \\ a_\theta \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Введем скалярное и векторное пространства

$$\mathcal{F}_p^T := L_2(\Sigma^T), \quad \mathcal{F}_s^T := \left\{f \in \mathcal{F}^T \mid (\nu \cdot f)|_\Gamma = 0\right\}.$$

Их подпространства $\mathcal{F}_\alpha^T[B]$ $(\alpha = p, s)$ состоят из элементов с носителями в $\overline{B}$; обозначим

$$\mathcal{M}_\alpha^T[B] := \mathcal{M}^T \cap \mathcal{F}_\alpha^T[B] \tag{2.8}$$

суть гладкие функции и поля, аннулирующиеся вблизи $t = 0$.

В соответствии с (2.7), запишем:

$$\mathcal{F}^T = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_p^T \\ \mathcal{F}_s^T \end{pmatrix}.$$

§3. Система типа Ламе

3.1. Начально-краевая задача. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей Γ. Фиксируем $T \in (0, \infty)$. Обозначим $\varkappa := c_p^2$, $\mu := c_s^2$.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_{tt} = \nabla \varkappa \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \mu \operatorname{rot} u \qquad \text{в } Q^T, \tag{3.1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{3.2}$$

$$u = f \qquad \text{на } \Sigma^T, \tag{3.3}$$

с гладкими переменными коэффициентами $\mu = \mu(x) > 0$, $\varkappa = \varkappa(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$; отметим, что $\varkappa = \lambda + 2\mu$ (λ и μ – стандартные коэффициенты Ламе). Эту систему мы называем *системой типа Ламе* и обозначаем символом α^T. Уравнение (3.1) получается из полного уравнения Ламе[2], описывающего распространение волн в упругой среде, удержанием старших (по порядку дифференцирования) членов; кроме того, полагаем плотность в области $\rho = 1$ [3]. Заметим, что основные свойства полной системы (регулярность решений, управляемость) [9] остаются верными и для системы типа Ламе [10].

$\mathbb{R}^3$-значная функция $f = f(\gamma, t)$ называется *граничным управлением* (Дирихле). Она описывает смещения точек границы, инициирующие волновой процесс в Ω. Решение $u = u^f(x,t)$ (*волна*) есть $\mathbb{R}^3$-значная функция, описывающая смещения точек среды в Ω. Для управлений класса $\mathcal{M}^T$ задача (3.1)–(3.3) имеет единственное классическое гладкое решение u^f.

Отображение $f \mapsto u^f$ непрерывно из $\mathcal{F}^T$ в $L_2\big((0,T); L_2(\Omega;\mathbb{R}^3)\big)$ [9]. Следовательно, оно расширяется с $\mathcal{M}^T$ на управления из $\mathcal{F}^T$ по непрерывности. Под (обощенным) решением задачи (3.1)–(3.3) для управлений этого класса мы подразумеваем образ f при действии этого расширения.

[2]полное уравнение Ламе в бескоординатной форме имеет вид (см. [14]): $\rho u_{tt} = \nabla(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \mu \operatorname{rot} u + 2\,\{(\nabla\mu, \nabla)u - \operatorname{div} u\, \nabla\mu + \nabla\mu \times \operatorname{rot} u\}$.

3.2. Конечность области влияния. Функции

$$c_p = \sqrt{\varkappa}, \qquad c_s = \sqrt{\mu}$$

$(0 < c_s < c_p)$ имеют смысл скоростей продольной (быстрой) и поперечной (медленнной) волн. Скорости определяют две конформно-евклидовых метрики (2.1). Каждая из них задает свои расстояния, окрестности, геодезические, области влияния и т.д. (см. раздел 2).

Уравнение типа Ламе является гиперболическим и имеет два семейства характеристик $\chi_\alpha(x,t) = \mathrm{const}$ в Q^T, определяемых известными уравнениями $\left(\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t}\right)^2 - c_\alpha^2\, |\nabla \chi_\alpha|^2 = 0$ $(\alpha = p, s.)$ По гиперболичности задачи (3.1)–(3.3), имеем соотношение

$$\operatorname{supp} u^f \subset K_p^T[\operatorname{supp} f]\,, \tag{3.4}$$

о котором говорят как о *принципе конечности области влияния.* Оно показывает, что волны в системе типа Ламе распространяются со скоростью, не превышающей скорости быстрой моды c_p.

Пусть $f \in \mathcal{F}^T[\Sigma^T]$, т.е. управление f действует с Γ. С учетом (2.2) из соотношения (3.4) следует:

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,t) \subset \overline{\Omega_p^t}, \qquad t > 0\,. \tag{3.5}$$

3.3. Система α^T. Здесь и далее мы рассматриваем задачу (3.1)–(3.3) как динамическую систему и снабжаем ее атрибутами теории управления – пространствами и операторами.

Пространство управлений $\mathcal{F}^T$ называется *внешним пространством* системы α^T. Решение u^f интерпретируется как *траектория* системы, а $u^f(\,\cdot\,,t)$ – ее *состояние* в момент времени t. Пространство $\mathcal{H}$ называется *внутренним.* По свойству L_2-регулярности решений (см. конец п. 3.1) все волны $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть его элементы.

Согласно (3.5), соотношение $f \in \mathcal{F}^T[\Sigma^T]$ влечет $u^f(\,\cdot\,,t) \in \mathcal{H}[\Omega_p^t]$ при всех $0 < t \leqslant T$, т.е. траектория u^f системы α^T не покидает подпространства $\mathcal{H}[\Omega_p^T]$.

3.4. Оператор реакции. На полях класса $\mathbf{H}^2(\Omega)$ (здесь и далее $\mathbf{H}^k(\dots)$ – векторные соболевские классы) введем оператор

$$L := \nabla \varkappa \operatorname{div} - \operatorname{rot} \mu \operatorname{rot},$$

определяющий эволюцию системы α^T. Интегрированием по частям для гладких u и v устанавливается равенство (формула Грина):

$$\begin{aligned}(Lu,v)_{\mathcal{H}}-(u,Lv)_{\mathcal{H}}&=\int\limits_{\Gamma}\left[\begin{pmatrix}\varkappa\,\mathrm{div}\,u\\ \mu\,\mathrm{rot}\,u\times\nu\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v^{\nu}\\ v_{\theta}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u^{\nu}\\ u_{\theta}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varkappa\,\mathrm{div}\,v\\ \mu\,\mathrm{rot}\,v\times\nu\end{pmatrix}\right]d\Gamma\\ &=(Nu,Dv)_{L_2(\Gamma;\,\mathbb{R}^3)}-(Du,Nv)_{L_2(\Gamma;\,\mathbb{R}^3)}\,;\end{aligned}$$

мы воспользовались соглашением о записи (2.6)–(2.7) и обозначили

$$Du:=\begin{pmatrix}u^{\nu}\\ u_{\theta}\end{pmatrix},\qquad Nu:=\begin{pmatrix}\varkappa\,\mathrm{div}\,u\\ \mu\,\mathrm{rot}\,u\times\nu\end{pmatrix}\quad\text{на }\Gamma. \tag{3.6}$$

Соответствие "вход – выход" в динамической системе α^T описывается *оператором реакции* $R^T:\mathcal{F}^T\to\mathcal{F}^T$, $\mathrm{Dom}\,R^T=\mathcal{M}^T$:

$$R^Tf\,:=\,Nu^f\qquad\text{на }\Sigma^T\,, \tag{3.7}$$

где N - оператор (Неймана), определяемый второй формулой в (3.6). Оператор реакции корректно определен в силу замечания в конце п. 3.1. Его действие на вектор управления $f=\begin{pmatrix}f^{\nu}\\ f_{\theta}\end{pmatrix}$, в соответствии с определением (3.7) и соглашением о записи (2.6)–(2.7), можно представить в виде [3]:

$$R^Tf\,:=\,\begin{pmatrix}\varkappa\,\mathrm{div}\,u^f\\ \mu\,\mathrm{rot}\,u^f\times\nu\end{pmatrix}\quad\text{на }\Sigma^T. \tag{3.8}$$

Отметим, что R^T может быть извлечен из измерений на границе Γ в результате взаимодействия с ней волн, порожденных управлениями f [14]. Оператор реакции адекватен информации, которой располагает внешний наблюдатель, изучающий динамическую систему по ее отображению "вход – выход".

3.5. Обратная задача. Постановка *динамической обратной задачи* такова. По оператору реакции R^{2T}, заданному при фиксированном $T>0$, требуется определить скорости волн: c_p в области Ω_p^T и c_s в области Ω_s^T. Такая постановка адекватна свойству конечности области влияния данных [3, 5, 8]. Задача будет решена при дополнительном предположении $T<T^{\mathrm{reg}}$, т.е. в регулярной зоне.

3.6. Управляемость. В системе α^T множество состояний (волн)

$$\mathcal{U}[\Sigma^T] := \{u^f(\,\cdot\,,T) \mid f \in \mathcal{M}^T[\Sigma^T]\}$$

называется *достижимым* (с границы Γ за время $t = T$). Согласно (3.5), имеем вложение

$$\mathcal{U}[\Sigma^T] \subset \mathcal{H}[\Omega_p^T], \qquad T > 0\,. \tag{3.9}$$

Свойства достижимых множеств и характер вложений типа (3.9) суть центральные вопросы теории граничного управления. Приведем результат такого рода, установленный в [9] для полного уравнения Ламе[3] с использованием фундаментальной теоремы о единственности продолжения решения через нехарактеристическую поверхность [13].

Пусть X_s^T есть (ортогональный) проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}[\Omega_s^T]$. Его действие сводится к срезке векторных полей на подобласть Ω_s^T:

$$X_s^T\, y = \begin{cases} y & \text{в } \ \Omega_s^T, \\ 0 & \text{в } \ \Omega\backslash\Omega_s^T. \end{cases}$$

Справедливо соотношение

$$\overline{X_s^T\, \mathcal{U}[\Sigma^T]} = \mathcal{H}[\Omega_s^T]\,, \quad T > 0 \tag{3.10}$$

(замыкание – в метрике $\mathcal{H}$).

Из (3.10) следует, что любое векторное поле $y \in L_2\left(\Omega_s^T; \mathbb{R}^3\right)$, локализованное в подобласти, захваченной медленной модой, может быть аппроксимировано (с любой точностью) волной $u^f(\,\cdot\,,T)$ при надлежащем выборе управления $f \in \mathcal{M}^T[\Sigma^T]$. В теории управления это свойство трактуется как *приближенная граничная управляемость* системы α^T в области Ω_s^T.

К финальному моменту $t = T$ волны, инициированные управлениями $f \in \mathcal{F}^T[\Sigma^T]$, заполняют область Ω_p^T, содержащую подобласть Ω_s^T. Соотношение (3.10), грубо говоря, означает, что форма волны $u^f(\,\cdot\,,T)$ в Ω_s^T может быть любой. В то же время, это заведомо не так в подобласти $\Omega_p^T\backslash\Omega_s^T$ [9, 10].

---

[3]результат верен также и для системы типа Ламе: см. [3, 10]

3.7. Подсистема α_p^T. В системе типа Ламе естественным образом выделяются две подсистемы – *акустическая* и *максвелловская.*

Рассмотрим *скалярную* начально-краевую задачу

$$\varphi_{tt} = c_p^2\,\Delta\varphi \qquad \text{в } Q^T, \tag{3.11}$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в } \overline{\Omega}\,, \tag{3.12}$$

$$\varphi = a \qquad \text{на } \Sigma^T\,, \tag{3.13}$$

где $c_p = \sqrt{\varkappa}$. При управлениях класса $\mathcal{M}_p^T$ (см. (2.8)) она имеет единственное классическое гладкое решение $\varphi = \varphi^a(x,t)$. Соответствие $a \mapsto \varphi^a$ непрерывно из $\mathcal{F}^T$ в $L_2\left((0,T); L_2(\Omega)\right)$, что позволяет определить решения для $a \in \mathcal{F}_p^T$ [5].

Соответствующую динамическую систему назовем *акустической* и обозначим α_p^T. Ее внешнее и внутреннее пространства суть $\mathcal{F}_p^T$ и $L_2(\Omega)$. По конечности области влияния для волнового уравнения (3.11), имеем соотношение

$$\operatorname{supp}\varphi^a \;\subset\; K_p^T[\operatorname{supp} a]$$

и его простое следствие

$$\operatorname{supp}\varphi^a(\,\cdot\,,t) \;\subset\; \overline{\Omega_p^t}, \qquad t>0\,.$$

Акустическая система приближенно управляема с границы. Определим достижимые множества

$$\Phi[\Sigma^T] := \left\{\varphi^a(\,\cdot\,,T) \,\middle|\, a \in \mathcal{M}_p^T[\Sigma^T]\right\}\,.$$

С использованием теоремы Хольмгрена-Йона-Татару [4, 5, 6] устанавливается соотношение

$$\overline{\Phi[\Sigma^T]} \;=\; L_2[\Omega_p^T] \tag{3.14}$$

(замыкание в $L_2(\Omega)$), справедливое при всех $T>0$. Приведем следствие свойства (3.14), которое будет использовано в дальнейшем. Обозначим

$$\nabla\Phi[\Sigma^T] := \left\{\nabla\varphi^a(\,\cdot\,,T) \,\middle|\, a \in \mathcal{M}_p^T[\Sigma^T]\right\}\,.$$

Пусть $T < T^{\mathrm{reg}}$; справедливо равенство [10]:

$$\overline{\nabla\Phi[\Sigma^T]} \;=\; \left\{\nabla q \,\middle|\, q \in W_2^1(\Omega),\ \operatorname{supp} q \subset \overline{\Omega_p^T},\ q|_\Gamma = 0\right\} \overset{(2.4)}{=} \mathcal{G}[\Omega_p^T] \tag{3.15}$$

(замыкание в $\mathcal{H}$). Оно означает полноту градиентов волн в пространстве потенциальных полей, локализованных в Ω_p^T.

3.8. Подсистема α_s^T. Рассмотрим векторную начально-краевую задачу

$$\psi_{tt} = -c_s^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\psi \qquad \text{в } Q^T, \tag{3.16}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{3.17}$$

$$\psi \times \nu = b \qquad \text{на } \Sigma^T, \tag{3.18}$$

где $c_s = \sqrt{\mu} < c_p$, $\times$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. При управлениях $b \in \mathcal{M}_s^T$ (см. (2.8)) она имеет единственное классическое гладкое решение $\psi = \psi^b(x,t)$. Заметим, что отображение $b \mapsto \psi^b$, определенное на гладком классе $\mathcal{M}_s^T$, не является непрерывным из $\mathcal{F}_s^T$ в $L^2\left((0,T); L_2(\Omega;\mathbb{R}^3)\right)$ [12]. Однако это осложнение имеет технический характер, и в дальнейшем мы сможем обойтись гладкими управлениями и решениями.

Соответствующую динамическую систему назовем *максвелловской* и обозначим α_s^T. Ее внешнее пространство есть $\mathcal{F}_s^T$. Внутренним удобно считать считать пространство $\mathcal{H}$, однако существенно следующее.

Величина $\operatorname{div}\psi^b$ является интегралом движения системы α_s^T, а в силу начальных условий (3.17), имеем $\operatorname{div}\psi^b(\,\cdot\,,t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$. Поэтому, волны суть соленоидальные поля, и трактория системы лежит в подпространстве $\mathcal{J}$ (см. (2.3)).

Уравнение (3.16) выводится из полной системы уравнений Максвелла исключением из последней одной из компонент (магнитного поля). По конечности области влияния для уравнений Максвелла имеем соотношение

$$\operatorname{supp}\psi^b \subset K_s^T[\operatorname{supp} b]$$

и его следствие

$$\operatorname{supp}\psi^b(\,\cdot\,,t) \subset \overline{\Omega_s^t}, \qquad t > 0\,,$$

Система α_s^T приближенно управляема с границы в следующем смысле. Определим достижимые множества

$$\Psi[\Sigma^T] := \left\{\psi^b(\,\cdot\,,T)\,\middle|\, b \in \mathcal{M}_s^T[\Sigma^T]\right\}.$$

Введем подпространство

$$\mathcal{J}[\Omega_s^T] := \{y \in \mathcal{J} \,|\, \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega_s^T}\}\,.$$

С использованием единственности продолжения решения уравнений Максвелла через нехарактеристическую поверхность [13] устанавливается соотношение

$$\overline{\Psi[\Sigma^T]} = \mathcal{J}[\Omega_s^T] \tag{3.19}$$

(замыкание в $\mathcal{H}$), справедливое при всех $T > 0$ ([6], Theorem 3).

Приведем следствие свойства (3.19), которое будет использовано в следующем разделе. Обозначим

$$\operatorname{rot}\Psi[\Sigma^T] := \left\{\operatorname{rot}\psi^b(\,\cdot\,,T) \;\middle|\; b \in \mathcal{M}_s^T[\Sigma^T]\right\}.$$

Справедливы равенства

$$\overline{\operatorname{rot}\Psi[\Sigma^T]} = \left\{\operatorname{rot}y \;\middle|\; y \in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^3), \operatorname{supp}y \subset \overline{\Omega_s^T}\right\} = \mathcal{J}[\Omega_s^T]. \tag{3.20}$$

Первое равенство в (3.20) выводится с помощью (3.19) [10], а второе – следствие плотности роторов гладких полей в $\mathcal{J}[\Omega_s^T]$ [16].

Итак, мы имеем (см. (3.19) и (3.20)):

$$\overline{\Psi[\Sigma^T]} = \overline{\operatorname{rot}\Psi[\Sigma^T]} = \mathcal{J}[\Omega_s^T]. \tag{3.21}$$

3.9. Связь траекторий. В системе (3.1)–(3.3) выберем управление $f \in \mathcal{M}^T$ и положим

$$a := \left[\varkappa \operatorname{div} u^f\right]\big|_{\Sigma^T} \in \mathcal{M}_p^T, \quad b := \left[\mu\,(\operatorname{rot}u^f)_\theta \times \nu\right]\big|_{\Sigma^T} \in \mathcal{M}_s^T.$$

Как показано в [3], справедливо представление:

$$u^f = \nabla\varphi^a + \operatorname{rot}\psi^b \qquad \text{в } Q^T, \tag{3.22}$$

которое связывает траектории системы α^T и ее подсистем α_p^T и α_s^T. Оно означает, что волны в системе типа Ламе расщепляются на потенциальную и соленоидальную составляющие.

С другой стороны, для произвольных $a \in \mathcal{M}_p^T$ и $b \in \mathcal{M}_s^T$ поля $\nabla\varphi^a = u^{f'}$ и $\operatorname{rot}\psi^b = u^{f''}$ суть траектории системы α^T, отвечающие управлениям

$$f' = \begin{pmatrix} \nu \cdot \nabla\varphi^a \\ (\nabla\varphi^a)_\theta \end{pmatrix}, \quad f'' = \begin{pmatrix} \nu \cdot \operatorname{rot}\psi^b \\ (\operatorname{rot}\psi^b)_\theta \end{pmatrix},$$

и поэтому $\nabla\varphi^a + \operatorname{rot}\psi^b = u^{f'} + u^{f''} = u^{f'+f''}$. Отсюда и из (3.22) заключаем, что справедливо представление в виде алгебраической суммы

$$\mathcal{U}[\Sigma^T] = \nabla\Phi[\Sigma^T] + \operatorname{rot}\Psi[\Sigma^T].$$

Используя (3.15), (3.21) и переходя к замыканиям, нетрудно получить

$$\overline{\mathcal{U}[\Sigma^T]} = \mathcal{G}[\Omega_p^T] + \mathcal{J}[\Omega_s^T]. \tag{3.23}$$

Заметим, что слагаемые в этой сумме имеют ненулевое пересечение.

§4. Акустическая подсистема.

В разделе 4 мы рассматриваем объекты (скорость, эйконал, геодезические, нормали, расходимости, волновые фронты), относящиеся только к быстрой метрике

$$ds_p^2 = \frac{|dx|^2}{c_p^2} \tag{4.1}$$

и, упрощая обозначения, опускаем нижний индекс "p" у всех величин. Таким образом, быстрая скорость будет обозначаться $c := c_p$, расстояние между точками области x, y $\tau(x,y) := \tau_p(x,y)$, *эйконал* $\tau(x) := \tau_p(x,\Gamma)$, эквидистанты границы $\Gamma^r := \Gamma_p^r$ и т.д. Отметим, что в динамике эйконал $\tau(x)$ в точке x есть время пробега быстрых волн от границы Γ к этой точке, а его поверхности уровня Γ^τ соответствуют волновым фронтам.

4.1. Полугеодезические координаты. Фиксируем $T : 0 < T < T^{\text{reg}}$. Каждой точке x регулярной зоны $\Omega^T := \Omega_p^T$ отвечает единственная ближайшая к ней точка границы $\gamma(x)$: $\tau(x,\gamma(x)) = \tau(x)$. Пару $(\gamma(x),\tau(x)) =: i(x)$ называют *полугеодезическими координатами* (п.г.к.) точки x с базой Γ, а множество

$$\Theta^T := i(\Omega^T) \tag{4.2}$$

– *выкройкой* подобласти Ω^T.

Соглашение 4.1. (об обозначениях)

(1) *Через $x(\gamma,\tau)$ обозначается точка регулярной зоны, имеющая п.г.к. γ,τ;*

(2) *если φ есть скалярная или векторозначная функция на Ω^T, то тем же символом φ мы обозначаем функцию $\varphi \circ i^{-1}$, определенную на Θ^T (так что $\varphi(\gamma,\tau) := \varphi(x(\gamma,\tau))$); если ψ задана на Θ^T, то тем же символом ψ обозначается функция $\psi \circ i$ на Ω^T (так что $\psi(x) := \psi(\gamma(x),\tau(x))$);*

(3) *запись $\varphi(x) = \psi(\gamma,\tau)$ подразумевает два равенства: $\varphi(x(\gamma,\tau)) = \psi(\gamma,\tau)$ на Θ^T и $\varphi(x) = \psi(\gamma(x),\tau(x))$ в Ω^T.*

Возьмем $x \in \Omega^T$ и выберем локальные координаты $\widetilde{\gamma}^1, \widetilde{\gamma}^1$ в окрестности $\sigma \subset \Gamma$ точки $\gamma(x)$. Функции $\widetilde{\gamma}^\alpha(\cdot) := \widetilde{\gamma}^\alpha(\gamma(\cdot))$, $\alpha = 1,2$; $\tau = \tau(\cdot)$ образуют систему полугеодезическимх координат на содержащем x

множестве (трубке)

$$B_\sigma^T := \{x' \in \Omega^T \mid \gamma(x') \in \sigma, \quad 0 \leqslant \tau(x') < T\}. \tag{4.3}$$

В системе полугеодезических координат евклидовы элементы длины и объема имеют известный вид [4]

$$|dx|^2 = g_{\alpha\beta}d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + c^2 d\tau^2;\ dx = cJd\gamma^1 d\gamma^2 d\tau = cd\Gamma^\tau d\tau = c\frac{J}{J_0}d\Gamma d\tau, \tag{4.4}$$

где $J(\gamma,\tau) := (\det\{g_{\alpha\beta}\})^{\frac{1}{2}}$, $J_0(\gamma,\tau) := J(\gamma,0)$, $d\Gamma^\tau$ и $d\Gamma$ – евклидовы элементы поверхности на Γ^τ и Γ. Элемент длины быстрой метрики в п.г.к. имеет вид

$$ds^2 = h_{\alpha\beta}d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + d\tau^2\,; \tag{4.5}$$

сравнивая (4.4) с (4.5) и учитывая (4.1), получаем

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}g_{\alpha\beta}\,. \tag{4.6}$$

4.2. Восстановление скорости по тензору h. Здесь мы подготовим один из фрагментов процедуры, решающей обратную задачу. Пусть $T < T^{\mathrm{reg}}$. В силу этого, выкройка (4.2) подобласти Ω^T есть $\Theta^T = \Gamma \times [0,T)$. Отображение $i : \Omega^T \to \Theta^T$ индуцирует на выкройке две метрики (два тензора) g и h такие, что i^{-1} есть изометрия (Θ^T, g) на Ω^T с евклидовой метрикой и изометрия (Θ^T, h) на Ω^T с быстрой метрикой. По (4.1) метрики g и h конформно-эквивалентны: $h = c^{-2}g$. Предположим, что нам известна скорость $c = c(\gamma,\tau)$ на Θ^T. Имеет место следующее утверждение [8].

Теорема 4.1. *Скорость $c = c(\gamma,\tau)$ на выкройке $\Theta^T = \Gamma\times[0,T)$ единственным образом определяет скорость $c(x)$ в Ω^T.*

Доказательство. Скорость $c = c(\gamma,\tau)$ на выкройке Θ^T однозначно определяет тензор h на Θ^T, что позволяет найти евклидову метрику: $g = c^2 h$;

Тензор g определяет соответствие $i^{-1}\colon \Theta^T \to \Omega^T$. Действительно, пусть x^1, x^2, x^3 – декартовы координаты в Ω^T; в силу их гармоничности имеем

$$\Delta_g x^k \;=\; 0 \quad \text{на } \Theta^T \tag{4.7}$$

[4]здесь и далее суммирование по повторяющимся индексам $\alpha, \beta = 1, 2$

(Δ_g – лапласиан в g-метрике). Поскольку x^k и $\frac{\partial x^k}{\partial \tau}$ известны на Γ, то эллиптическое уравнение (4.7) определяет функции $x^k = x^k(\gamma,\tau)$ на Θ^T единственным образом. Соответствие i^{-1} есть отображение $(\gamma,\tau) \to x(\gamma,\tau) = \{x^1(\gamma,\tau), x^2(\gamma,\tau), x^3(\gamma,\tau)\}$.

Скорость в Ω^T восстанавливается по формуле

$$c(x) \;=\; \left[\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x^k(\gamma,\tau)}{\partial \tau}\right)^2\right]^{1/2}, \quad x \in \Omega^T$$

(см. Соглашение 4.1). Теорема доказана. □

4.3. Представление полей. В регулярной зоне эйконал является гладким; он определяет поле евклидовых нормалей к поверхностям Γ^τ :

$$\nu(x) := \frac{\nabla\tau(x)}{|\nabla\tau(x)|}, \qquad x \in \Omega^T,\ 0 < T < T^{\mathrm{reg}}.$$

Заметим, что $\nu|_\Gamma$ есть внутрення нормаль к границе.

Любое векторное поле y в Ω^T может быть представлено в виде

$$y = y_\theta + y_\nu\ ,$$

где $y_\nu := (y\cdot\nu)\nu$, $y_\theta := y - y_\nu$ – продольная и поперечная компоненты y.

Пусть $r = r(x)$ есть радиус-вектор точки $x = x(\gamma,\tau)$; γ^1, γ^2, τ – п.г.к. в трубке B^T_σ (см. (4.3)), содержащей x; обозначим ($\alpha = 1,2$):

$$r_\alpha := \frac{\partial r}{\partial \gamma^\alpha}, \qquad r_0 := \frac{\partial r}{\partial \tau}\ ;$$

векторы r_1, r_2 касательны, а вектор r_0 нормален к поверхности Γ^τ. Поле y в трубке можно представить в виде

$$y = y^\alpha r_\alpha + y^0 r_0 = y_\theta + y^0 r_0\ .$$

Соглашение 4.2. *Мы будем пользоваться матричным представлением, отождествляя* $y = y^0 r_0 + y_\theta$ *со столбцом* $\begin{pmatrix} y^0 \\ y_\theta \end{pmatrix}$.

Скажем, что поле v продольное, если $v = v^0 r_0$ (т.е. $v_\theta = 0$). Напомним известные соотношения для евклидова метрического тензора

$$g_{\alpha\beta} = r_\alpha \cdot r_\beta; \qquad g_{00} = r_0 \cdot r_0 = c^2\ . \tag{4.8}$$

4.4. Параллельный перенос. Ниже будет использован параллельный перенос в метрике (4.1). Пусть B_σ^T есть трубка, покрываемая системой п.г.к. γ^1, γ^2, τ и пусть $v(x) = v^0(x)r_0(x)$ – вектор в точке $x \in B_\sigma^T$, ортогональный поверхности $\Gamma^{\tau(x)}$. Обозначим $v^0 := v^0(x)$; вектор

$$[v(x)]^\wedge := v^0 r_0(\gamma(x))$$

есть результат параллельного переноса исходного вектора $v(x)$ из точки $x \in \Gamma^{\tau(x)}$ в точку $\gamma(x) \in \Gamma$ вдоль геодезической быстрой метрики; он, очевидно, ортогонален к Γ.

Быстрая и евклидова метрики конформно-эквивалентны; скалярное произведение в быстрой метрике инвариантно относительно параллельного переноса. Из сказанного следует, что для любых двух продольных векторов u, v выполнено равенство

$$\frac{1}{c^2(x)} u(x) \cdot v(x) = \frac{1}{c^2(\gamma(x))} [u(x)]^\wedge \cdot [v(x)]^\wedge\,. \tag{4.9}$$

4.5. Отображение π. Пусть $T < T^{\mathrm{reg}}$ и пусть v есть продольное поле в Ω^T; сопоставим ему поле на выкройке Θ^T – функцию от (γ, τ), значения которой суть векторы, ортогональные поверхности Γ, по правилу

$$(\pi v)(\gamma, \tau) := [v(x(\gamma, \tau))]^\wedge, \qquad (\gamma, \tau) \in \Theta^T.$$

Следующие свойства отображения π легко усматриваются из определения:

1. пусть φ есть скалярная функция в Ω^T; тем же самым символом обозначим операцию умножения полей на φ; справедливо равенство

$$\pi\varphi = \varphi\pi\,, \tag{4.10}$$

понимаемое с учетом соглашения 4.1;

2. обозначим $c_0(\gamma, \tau) := c(\gamma, 0)$; как легко видеть из (4.9), отображение $v \to \frac{c}{c_0}\pi v$ есть поточечная изометрия в смысле евклидовой нормы:

$$\left| \left(\frac{c}{c_0} \pi v \right) (\gamma, \tau) \right| = |v(x(\gamma, \tau))|, \qquad (\gamma, \tau) \in \Theta^T; \tag{4.11}$$

3. пусть $\frac{D}{d\tau}$ есть ковариантная производная (в быстрой метрике); на гладких полях выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\pi = \pi\frac{D}{d\tau}. \tag{4.12}$$

4.6. Оператор Π^T. Поле $\nu := \frac{\nabla\tau}{|\nabla\tau|}$ определено в Ω^T $(T < T^{\rm reg})$; оно определяет разложение

$$\mathcal{H}^T := \mathcal{H}[\Omega^T] = \mathscr{L}_\theta^T \oplus \mathscr{L}_\nu^T\,,$$

в котором

$$\mathscr{L}_\theta^T := \{w \in L_2(\Omega^T;\mathbb{R}^3) \mid w\cdot\nu = 0 \qquad \text{в } \Omega^T\}, \tag{4.13}$$

$$\mathscr{L}_\nu^T := \{v \in L_2(\Omega^T;\mathbb{R}^3) \mid v\times\nu = 0 \qquad \text{в } \Omega^T\} \tag{4.14}$$

суть подпространства *поперечных* и *продольных* (по отношению к ν) полей.

На выкройке $\Theta^T = \Gamma\times[0,T)$ рассмотрим гильбертово пространство полей, нормальных к Γ:

$$\mathcal{F}_\nu^T := \{f \in L_2(\Sigma^T;\mathbb{R}^3) \,|\, f\times\nu_0 = 0 \qquad \text{на } \Theta^T\} \tag{4.15}$$

(с мерой $d\Gamma d\tau$), где $\nu_0(\gamma,\tau) := \nu(\gamma,0)$. Напомним обозначения $J_0(\gamma,\tau) := J(\gamma,0),\ c_0(\gamma,\tau) := c(\gamma,0)$ и определим на Θ^T функцию $\kappa = \kappa(\gamma,\tau)$:

$$\kappa := \frac{c}{c_0}\sqrt{c\frac{J}{J_0}}. \tag{4.16}$$

Введем оператор $\Pi^T : \mathscr{L}_\nu^T \to \mathcal{F}_\nu^T$,

$$\Pi^T v := \kappa\pi v. \tag{4.17}$$

Лемма 4.1. *Оператор Π^T обладает следующими свойствами:*

(1) *Π^T унитарен;*
(2) *для ограниченных скалярных функций χ выполнено соотношение $\Pi^T\chi = \chi\Pi^T$;*
(3) *оператор Π^T сохраняет гладкость:*

$$\Pi^T[\mathscr{L}_\nu^T \cap C^\infty(\overline{\Omega^T})] = \mathcal{F}_\nu^T \cap C^\infty(\overline{\Theta^T}).$$

Доказательство. Все функции, входящие в правую часть определения κ, суть гладкие и положительные на Θ^T. Для произвольных

$u, v \in \mathscr{L}_\nu^T$ имеем

$$(u,v)_{\mathscr{L}_\nu^T} = \int\limits_{\Omega^T} u \cdot v \, dx \overset{(4.4)}{=} \int\limits_{\Theta^T} u(x(\gamma,\tau)) \cdot v(x(\gamma,\tau)) \left(c\frac{J}{J_0}\right)(\gamma,\tau)\, d\Gamma\, d\tau$$
$$\overset{(4.9)}{=} \int\limits_{\Theta^T} \left(\frac{c}{c_0}\pi u\right)(\gamma,\tau) \cdot \left(\frac{c}{c_0}\pi v\right)(\gamma,\tau) \left(c\frac{J}{J_0}\right)(\gamma,\tau)\, d\Gamma\, d\tau$$
$$\overset{(4.17)}{=} \left(\Pi^T u, \Pi^T v\right)_{\mathcal{F}_\nu^T},$$

т.е. Π^T есть изометрия. Легко видеть, что $\operatorname{Ran} \Pi^T = \mathcal{F}_\nu^T$. Свойство (*2*) следует из определений и (4.10); свойство (*3*) есть простое следствие диффеоморфности отображения i. Лемма доказана. $\square$

4.7. Проектирование в пространстве потенциальных полей. В пространстве потенциальных полей (2.4)

$$\mathcal{G} = \{h \in \mathcal{H} \mid h = \nabla\varphi,\ \varphi \in W_2^1(\Omega),\ \varphi|_\Gamma = 0\}$$

выделим цепочку подпространств

$$\mathcal{G}^\xi := \left\{h \in \mathcal{G} \,\middle|\, \operatorname{supp} h \subset \overline{\Omega^\xi}\right\}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T\,;$$

отметим некоторые свойства их элементов [2].

Предложение 4.1. *Пусть $T < T^{\mathrm{reg}}$ и $\xi \in (0,T)$ фиксировано;*

(1) *след $h|_{\Gamma^{\xi}-0}$ поля $h \in \mathcal{G}^\xi$, гладкого в Ω^ξ есть поле, нормальное к Γ^ξ;*
(2) *любое гладкое нормальное поле на Γ^ξ есть след поля из $\mathcal{G}^\xi$, гладкого в Ω^ξ.*

Обозначим через Q^ξ проектор в $\mathcal{G}^T$ на $\mathcal{G}^\xi$ ($T < T^{\mathrm{reg}}$). Можно показать, что семейство $\{Q^\xi\}$ непрерывно:

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{\tau\to\xi} Q^\tau = Q^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T; \quad Q^0 = \mathbb{O}_{\mathcal{G}^T}; \quad Q^T = \mathbb{I}_{\mathcal{G}^T}.$$

Пусть $T < T^{\mathrm{reg}}$. Опишем представление для $Q^\xi \colon \mathcal{G}^T \to \mathcal{G}^\xi$. Выберем гладкое поле $h = h_\theta + h_\nu = \nabla\varphi = (\nabla\varphi)_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\nu \in \mathcal{G}^T$, фиксируем

$\xi \in (0,T)$ и рассмотрим задачу

$$\Delta r = 0 \qquad \text{в } \Omega^\xi, \tag{4.18}$$

$$(\nabla r)_\theta = h_\theta = (\nabla\varphi)_\theta \qquad \text{на } \Gamma^\xi, \qquad \int\limits_{\Gamma^\xi} \frac{\partial r}{\partial \nu}\, d\Gamma^\xi = 0\,, \tag{4.19}$$

$$r = 0 \qquad \text{на } \Gamma. \tag{4.20}$$

Первое из условий в (4.19) равносильно соотношению

$$r = \varphi + \mathrm{const} \qquad \text{на } \Gamma^\xi; \tag{4.21}$$

по второму однозначно находится постоянная в (4.21). Из этого следует, что задача (4.18)–(4.20) разрешима единственным образом; ее решение $r = r^\xi(x)$ есть гладкая в Ω^ξ функция.

Лемма 4.2. *Для любого гладкого поля $h \in \mathcal{G}^T$ справедливо представление*

$$Q^\xi\, h = \begin{cases} h - \nabla r^\xi & \text{в } \Omega^\xi, \\ 0 & \text{в } \Omega^T\backslash\Omega^\xi, \end{cases} \tag{4.22}$$

в котором r^ξ – решение задачи (4.18)–(4.20).

Доказательство. Пусть

$$h^\xi \ = \begin{cases} h - \nabla r^\xi & \text{в } \Omega^\xi, \\ 0 & \text{в } \Omega^T\backslash\Omega^\xi. \end{cases}$$

Обозначим $h^\xi_\perp := h - h^\xi$, так что

$$h = h^\xi + h^\xi_\perp \tag{4.23}$$

и отметим следующие свойства h^ξ:

(1) $h^\xi = h - \nabla r^\xi = \nabla\varphi - \nabla r^\xi = \nabla(\varphi - r^\xi) \quad$ в Ω^ξ ;

(2) $h^\xi_\theta\big|_{\Gamma^\xi - 0} = (h - \nabla r^\xi)_\theta\big|_{\Gamma^\xi - 0} = h_\theta\big|_{\Gamma^\xi - 0} - (\nabla r^\xi)_\theta\big|_{\Gamma^\xi - 0} \overset{(4.19)}{=} 0\,;$

(3) $h^\xi_\theta\big|_\Gamma = (h - \nabla r^\xi)_\theta\big|_\Gamma = 0.$

Следствием (1)–(3) является включение $h^\xi \in \mathcal{G}^\xi$.

Далее, для любого $w \in \mathcal{G}^\xi \cap C^\infty(\overline{\Omega^\xi}; \mathbb{R}^3)$, которое можно представить в виде $w = \nabla\psi \, : \psi\big|_\Gamma = 0\,, \, \psi\big|_{\Gamma^\xi} = 0$, имеем:

$$
\begin{aligned}
(h_\perp^\xi, w)_\mathcal{H} &= \int\limits_{\Omega^\xi} \nabla r^\xi \cdot w \, dx \, = \int\limits_{\Omega^\xi} \nabla r^\xi \cdot \nabla\psi \, dx \\
&= \int\limits_\Gamma (\nabla r^\xi)^\nu \psi \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma^\xi} (\nabla r^\xi)^\nu \psi \, d\Gamma^\xi - \int\limits_{\Omega^\xi} \Delta r^\xi \psi \, dx \overset{(4.18)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $(h_\perp^\xi\,, w)_\mathcal{H} = 0$ и, по плотности гладких w в $\mathcal{G}^\xi$, получаем $h_\perp^\xi \in \mathcal{G}^T \ominus \mathcal{G}^\xi$, т.е. в (4.23) слагаемые ортогональны. Лемма доказана. $\square$

Отметим важный факт: поле $Q^\xi \, h$, вообще говоря, разрывно на Γ^ξ, причем разрыв $Q^\xi \, h\big|_{\Gamma^\xi - 0}$ есть поле, *нормальное* к Γ^ξ:

$$
\begin{aligned}
Q^\xi \, h\big|_{\Gamma^\xi - 0} &\overset{(4.22)}{=} (h_\theta + h_\nu - (\nabla r^\xi)_\theta - (\nabla r^\xi)_\nu)\big|_{\Gamma^\xi} \\
&\overset{(4.19)}{=} (h_\nu - (\nabla r^\xi)_\nu)\big|_{\Gamma^\xi}.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

4.8. Оператор Кальдерона. Фиксируем $\xi : 0 < \xi \leqslant T < T^{\rm reg}$ и введем оператор $\Lambda^\xi \colon L_2(\Gamma^\xi) \to L_2(\Gamma^\xi)$, $\operatorname{Dom}\Lambda^\xi = C^\infty(\Gamma^\xi)$, действующий по правилу:

$$
\Lambda^\xi \, g = \left.\frac{\partial q}{\partial \nu}\right|_{\Gamma^\xi - 0} ,
$$

где q есть решение задачи

$$
\begin{aligned}
\Delta \, q \, &= \, 0 \quad \text{в } \Omega^\xi \,, \\
q \, &= \, g \quad \text{на } \Gamma^\xi \,, \\
q \, &= \, 0 \quad \text{на } \Gamma \,.
\end{aligned}
$$

Это известный *оператор Кальдерона*; отметим некоторые из его свойств [8]:

(1) имеет место оценка для нормы: $\|\Lambda^\xi\| \leqslant C\xi\,,\ 0 < \xi \leqslant T$; в соответствии с ней доопределяем

$$
\Lambda^0 := \, 0\,; \tag{4.25}
$$

(2) оператор Λ^ξ самосопряжен:

$$\int_{\Gamma^\xi} \Lambda^\xi \varphi\, \psi\, d\Gamma^\xi = \int_{\Gamma^\xi} \varphi \Lambda^\xi \psi\, d\Gamma^\xi, \tag{4.26}$$

а при $\xi > 0$ положителен:

$$(\Lambda^\xi g, g)_{L_2(\Gamma^\xi)} > 0, \quad g \neq 0$$

и, следовательно, инъективен;

(3) оператор Λ^ξ сохраняет гладкость: $\Lambda^\xi\, C^\infty(\Gamma^\xi) = C^\infty(\Gamma^\xi)$, $\xi > 0$;

(4) выполнена оценка

$$\|\Lambda^\xi\, g\|_{H^1(\Gamma^\xi)} \leqslant C\xi \|g\|_{H^1(\Gamma^\xi)}\,,\ 0 \leqslant \xi \leqslant T \tag{4.27}$$

($H^1(\ldots) := W_2^1(\ldots)$ – класс Соболева).

(5) Λ^ξ есть эллиптический псевдодифференциальный оператор (ПДО) 1-го порядка с *главным символом* ([18]):

$$\mathrm{Symb}_{\Lambda^\xi}(k_1, k_2) = |k|\, \mathrm{Id}_\xi, \tag{4.28}$$

где k_1, k_2 – переменные, двойственные к переменным γ^1, γ^2; Id_ξ – тождественный оператор на кокасательном пространстве T_γ^* ($\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \in \Gamma^\xi$); $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$.

4.9. Оператор Λ. Фиксируем $T < T^{\mathrm{reg}}$ и отметим представление

$$\overline{\Omega^T} = \bigcup_{0 \leqslant \xi \leqslant T} \Gamma^\xi.$$

В пространстве скалярных функций $L_2(\Omega^T)$ определим оператор Λ, $\mathrm{Dom}\,\Lambda = C^\infty(\overline{\Omega^T})$, действующий *послойно* (в соответствии с представлением) по правилу:

$$(\Lambda\varphi)\big|_{\Gamma^\xi} := \Lambda^\xi[\varphi\big|_{\Gamma^\xi}], \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T.$$

Отметим некоторые из его свойств:

(1) оператор Λ ограничен и инъективен; он нелокален, т.е. не сохраняет носитель функции в Ω^T. В то же время, включение $\mathrm{supp}\,\varphi \in \Omega^{\xi''} \backslash \Omega^{\xi'}$ влечет $\mathrm{supp}\,\Lambda\varphi \in \Omega^{\xi''} \backslash \Omega^{\xi'}$ $(0 \leqslant \xi' \leqslant \xi'' \leqslant T)$;

(2) используя гладкий характер зависимости Λ^ξ от ξ и свойство (3) п. 4.8, можно установить сохранение гладкости:

$$\Lambda C^\infty(\overline{\Omega^T}) \subset C^\infty(\overline{\Omega^T});$$

(3) в соответствии с (4.25), для гладких φ имеем

$$(\Lambda\varphi)\big|_{\Gamma} \,=\, 0\,.$$

Лемма 4.3.

$$\Lambda^* \,=\, c^{-1}\Lambda\, c\,. \tag{4.29}$$

Доказательство. Для любых гладких φ, ψ имеем

$$\begin{aligned}(\Lambda\varphi,\psi)_{L_2(\Omega^T)} &= \int\limits_{\Omega^T} \Lambda\varphi\,\psi\,dx = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} c\Lambda^\tau\varphi\,\psi\,d\Gamma^\tau \\ &\overset{(4.26)}{=} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} \varphi\,\Lambda^\tau(c\psi)\,d\Gamma^\tau = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} c\varphi\frac{1}{c}\,\Lambda^\tau(c\psi)\,d\Gamma^\tau \\ &= \int\limits_{\Omega^T} \varphi\,\frac{1}{c}\Lambda c\,\psi\,dx = (\varphi, \frac{1}{c}\Lambda c\,\psi)_{L_2(\Omega^T)} = (\varphi, \Lambda^*\psi)_{L_2(\Omega^T)}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

4.10. $\mathcal{N}^T$-преобразование. В описании вводимых ниже операторов используются полугеодезические координаты (мы полагаем $T < T^{\mathrm{reg}}$). Напомним, что $\mathcal{L}_\theta^T$ есть пространство поперечных векторых полей (4.13). Запишем выражение градиента и дивергенции в п.г.к.:

$$(\nabla\varphi)(x) = \left[\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma^\beta}\right)r_\alpha + \left(g^{00}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)r_0\right](\gamma,\tau); \tag{4.30}$$

$$(\operatorname{div} y)(x) = \left[\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}(cJy^\alpha) + \frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\tau}(cJy^0)\right](\gamma,\tau), \tag{4.31}$$

где $\{g^{\alpha\beta}\}$ – матрица, обратная к $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g^{00} \,=\, \frac{1}{c^2}$; $y \,=\, y^\alpha r_\alpha + y^0 r_0$. Определим:

- *поперечный градиент* $\nabla_\theta\colon L_2(\Omega^T) \to \mathcal{L}_\theta^T$, действующий на гладкие в $\overline{\Omega^T}$ функции по правилу:

$$(\nabla_\theta\varphi)(x) = \left[\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma^\beta}\right)r_\alpha\right](\gamma,\tau);$$

- *поперечную дивергенцию* $\operatorname{div}_\theta\colon \mathcal{L}_\theta^T \to L_2(\Omega^T)$, действующую на гладкие поперечные поля $v = v^\alpha r_\alpha$ по правилу:

$$(\operatorname{div}_\theta v)(x) = \left[\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}(cJv^\alpha)\right](\gamma,\tau).$$

Отметим их послойный характер: равенства $\varphi\big|_{\Gamma^\xi} = 0$, $v\big|_{\Gamma^\xi} = 0$ влекут $(\nabla_\theta \varphi)\big|_{\Gamma^\xi} = 0$, $(\operatorname{div}_\theta v)\big|_{\Gamma^\xi} = 0$. Справедливо соотношение

$$(\nabla_\theta \varphi, v)_{\mathcal{L}^T_\theta} \;=\; -\left(\varphi, \operatorname{div}_\theta v\right)_{L_2(\Omega^T)}\,, \tag{4.32}$$

которое легко выводится послойным интегрированием по частям.

Введем также оператор $\operatorname{div}_\theta^{-1}\colon L_2(\Omega^T) \;\to\; \mathcal{L}^T_\theta$, действующий (послойно) на гладкие в $\overline{\Omega^T}$ функции и связанный с поперечной дивергенцией:

$$\operatorname{div}_\theta \circ \operatorname{div}_\theta^{-1} = \mathrm{Id},$$

где Id – тождественный оператор в $L_2(\Omega^T)$.

Введенное в п. 4.7 семейство проекторов $\{Q^\xi\}$ определяет оператор $\mathcal{N}^T\colon \mathcal{G}^T \to \mathscr{L}^T_\nu$; $\operatorname{Dom} \mathcal{N}^T \;=\; \mathcal{G}^T \cap C^\infty(\overline{\Omega^T}; \mathbb{R}^3)$ по правилу

$$\mathcal{N}^T h = Q^\xi h\big|_{\Gamma^{\xi}-0} \quad \text{на } \Gamma^\xi,\ 0 < \xi \leqslant T < T^{\mathrm{reg}}.$$

Таким образом, образ $\mathcal{N}^T h$ составляется из разрывов, появляющихся на поверхностях Γ^ξ при проектировании h на $\mathcal{G}^\xi$.

Согласно (4.24), для $h = h_\theta + h_\nu$ имеем послойное представление

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^T h = h_\nu - (\nabla r^\xi)_\nu = h_\nu - \left(\frac{\partial r^\xi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma^\xi}\right)\nu \quad \text{на } \Gamma^\xi,\\ 0 < \xi \leqslant T < T^{\mathrm{reg}}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

С семейством задач (4.18)–(4.20) свяжем оператор $\nabla_\theta^{-1} : \mathscr{L}^T_\theta \to L_2(\Omega^T)$, действующий на поперечные компоненты h_θ гладких полей $h \in \mathcal{G}^T$ по правилу:

$$\nabla_\theta^{-1} h_\theta \;:=\; r^\xi \quad \text{на } \Gamma^\xi,\ 0 < \xi \leqslant T\,;$$

как нетрудно проверить, $\nabla_\theta \nabla_\theta^{-1} \;=\; \mathrm{id}_\theta$ (id_θ – тождественный оператор в $\mathscr{L}^T_\theta$). Используя оператор Λ, представление (4.33) можно записать в форме

$$\mathcal{N}^T h = h_\nu - \left(\Lambda \nabla_\theta^{-1} h_\theta\right)\nu\,. \tag{4.34}$$

Предложение 4.2. *Преобразование $\mathcal{N}^T$ есть изометрия $\mathcal{G}^T$ на $\mathscr{L}^T_\nu$.*

Этот факт установлен в [2].

Напомним разложение Вейля

$$\mathcal{H}^T = \mathcal{J}^T \oplus \mathcal{G}^T; \tag{4.35}$$

пусть $\mathcal{P}^T_{\mathcal{G}}$ есть проектор в $\mathcal{H}^T = \mathcal{H}[\Omega^T]$ на $\mathcal{G}^T$.

Лемма 4.4. *Сопряженный оператор* $(\mathcal{N}^T)^*$ *определен на гладких продольных полях* $v \in \mathcal{L}^T_\nu$ *и допускает представление*

$$(\mathcal{N}^T)^* v = \mathcal{P}^T_{\mathcal{G}} \left(v + \operatorname{div}_\theta^{-1}\left[c^{-1}\Lambda c\, v^\nu\right]\right), \tag{4.36}$$

где $v^\nu = v \cdot \nu$.

Доказательство. Для гладких $h = h_\theta + h_\nu \in \mathcal{G}^T$ и $v \in \mathscr{L}^T_\nu$ имеем

$$\begin{aligned}
(\mathcal{N}^T h, v)_{\mathscr{L}^T_\nu} &\overset{(4.34)}{=} (h_\nu - (\Lambda \nabla_\theta^{-1} h_\theta)\nu, v)_{\mathscr{L}^T_\nu} \\
&= (h_\nu, v)_{\mathscr{L}^T_\nu} - (h_\theta, (\nabla^*_\theta)^{-1}\Lambda^*\, v^\nu)_{\mathscr{L}^T_\theta} \\
&\overset{(4.32),(4.29)}{=} (h_\nu, v)_{\mathscr{L}^T_\nu} + (h_\theta, {\operatorname{div}_\theta}^{-1}[c^{-1}\Lambda c\, v^\nu])_{\mathscr{L}^T_\theta} \\
&= (h_\theta + h_\nu, v + {\operatorname{div}_\theta}^{-1}[c^{-1}\Lambda c\, v^\nu])_{\mathcal{H}^T} \\
&= \left(h, \mathcal{P}^T_{\mathcal{G}}\left(v + {\operatorname{div}_\theta}^{-1}[c^{-1}\Lambda c\, v^\nu]\right)\right)_{\mathcal{G}^T}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

4.11. Оператор $\nabla\varkappa$ div. Вернемся к акустической подсистеме α^T_p и применим оператор ∇ к обеим частям равенств (3.11)–(3.13). Обозначая $h := \nabla\varphi$, приходим к системе

$$h_{tt} = \nabla c^2 \operatorname{div} h \qquad \text{в } Q^T, \tag{4.37}$$

$$h|_{t=0} = h_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{4.38}$$

$$h = f \qquad \text{на } \Sigma^T, \tag{4.39}$$

где $f\big|_{\Sigma^T} = \nabla\varphi^a\big|_{\Sigma^T} = \begin{pmatrix}\nabla\varphi^a\cdot\nu \\ (\nabla\varphi^a)_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi^a}{\partial\nu} \\ \nabla_\theta a\end{pmatrix}$.

На полях класса $\mathbf{H}^2(\Omega)$ введем оператор

$$\mathcal{L} := \nabla c^2 \operatorname{div}, \tag{4.40}$$

определяющий эволюцию системы (4.37)–(4.39).

Лемма 4.5. *В подобласти* Ω^T, *покрываемой системой п.г.к., для гладкого поля* $y = y^0 r_0 + y_\theta$ *имеет место представление*[5]:

$$\mathcal{L}y = \begin{pmatrix}(\mathcal{L}y)^0 \\ (\mathcal{L}y)_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJy^0 + cJ\operatorname{div}_\theta y_\theta\right] \\ \\ \nabla_\theta\frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJy^0 + cJ\operatorname{div}_\theta y_\theta\right]\end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

[5]здесь и далее используется Соглашение 4.2 о матричной записи

Доказательство. Используя выражения (4.30) и (4.31) градиента и дивергенции в п.г.к. и учитывая $g^{00} = \frac{1}{c^2}$, запишем

$$\nabla\varphi = g^{00}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}r_0 + \nabla_\theta\varphi; \qquad c^2 \operatorname{div} y = c^2\left(\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\tau}cJy^0 + \operatorname{div}_\theta y_\theta\right);$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}y &\overset{(4.40)}{=} \nabla c^2 \operatorname{div} y \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\frac{c}{J}\frac{\partial}{\partial\tau}cJy^0 + c^2\operatorname{div}_\theta y_\theta)}{\partial\tau}r_0 + \nabla_\theta\left(\frac{c}{J}\frac{\partial}{\partial\tau}cJy^0 + c^2\operatorname{div}_\theta y_\theta\right).\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

4.12. Оператор $\mathcal{N}^T(\nabla\varkappa\operatorname{div})(\mathcal{N}^T)^*$. В соответствии с (4.34) и (4.36), для любых гладких $h \in \mathcal{G}^T, v \in \mathscr{L}_\nu^T$ имеем

$$\mathcal{N}^T h = \mathcal{N}^T\begin{pmatrix}h^0\\h_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{c}\Lambda\nabla_\theta^{-1}\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h^0\\h_\theta\end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

$$(\mathcal{N}^T)^*v = (\mathcal{N}^T)^*\begin{pmatrix}v^0\\0\end{pmatrix} = \mathcal{P}_\mathcal{G}^T\begin{pmatrix}v^0\\{\operatorname{div}_\theta}^{-1}[c^{-1}\Lambda c^2\, v^0]\end{pmatrix} \tag{4.43}$$

(мы учли, что $\nu = \frac{r_0}{|r_0|} = \frac{1}{c}r_0$ и $v^\nu = v^0|r_0| = cv^0$).

Пусть w есть произвольное гладкое поле в $\overline{\Omega^T}$. По разложению Вейля (4.35), имеем

$$w = \mathcal{P}_\mathcal{G}^T w + \mathcal{P}_\mathcal{J}^T w, \tag{4.44}$$

где $\mathcal{P}_\mathcal{G}^T$ – проектор в $\mathcal{H}^T$ на $\mathcal{G}^T$, $\mathcal{P}_\mathcal{J}^T$ – проектор в $\mathcal{H}^T$ на $\mathcal{J}^T$; отметим, что проектор $\mathcal{P}_\mathcal{G}^T$ сохраняет гладкость:

$$\mathcal{P}_\mathcal{G}^T C^\infty(\overline{\Omega^T};\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{G}^T \cap C^\infty(\overline{\Omega^T};\mathbb{R}^3)$$

(см. [11]). На гладких полях выполнено

$$\mathcal{L}\mathcal{P}_\mathcal{G}^T = \mathcal{L}. \tag{4.45}$$

Действительно,

$$\mathcal{L}\mathcal{P}_\mathcal{G}^T w \overset{(4.40)}{=} \nabla c^2 \operatorname{div}\mathcal{P}_\mathcal{G}^T w \overset{(4.44)}{=} \nabla c^2 \operatorname{div}(w - \mathcal{P}_\mathcal{J}^T w) \overset{(2.3)}{=} \mathcal{L}w.$$

Лемма 4.6. *На гладких полях $v = \begin{pmatrix}v^0\\0\end{pmatrix} \in \mathscr{L}_\nu^T$ справедливо представление*

$$\mathcal{N}^T\mathcal{L}(\mathcal{N}^T)^*v^0 r_0 = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{c}\Lambda\right)\frac{c}{J}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}cJ + J\Lambda c^2\right)v^0 r_0. \tag{4.46}$$

Доказательство.

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}^T)^* \begin{pmatrix} v^0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(4.43)}{=} \mathcal{L}\mathcal{P}^T_{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} v^0 \\ \operatorname{div}_\theta{}^{-1}[c^{-1}\Lambda c^2\, v^0] \end{pmatrix} \overset{(4.45)}{=} \mathcal{L} \begin{pmatrix} v^0 \\ \operatorname{div}_\theta{}^{-1}[c^{-1}\Lambda c^2\, v^0] \end{pmatrix}$$

$$\overset{(4.41)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJv^0 + cJ\operatorname{div}_\theta \operatorname{div}_\theta{}^{-1}[c^{-1}\Lambda c^2\, v^0]\right] \\ \\ \nabla_\theta \frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJv^0 + cJ\operatorname{div}_\theta \operatorname{div}_\theta{}^{-1}[c^{-1}\Lambda c^2\, v^0]\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJ + J\Lambda c^2\right] v^0 \\ \\ \nabla_\theta \frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJ + J\Lambda c^2\right] v^0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N}^T\mathcal{L}(\mathcal{N}^T)^* \begin{pmatrix} v^0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(4.42)}{=} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{c}\Lambda\nabla_\theta^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJ + J\Lambda c^2\right] v^0 \\ \\ \nabla_\theta \frac{c}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}cJ + J\Lambda c^2\right] v^0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{c}\Lambda\right)\frac{c}{J}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}cJ + J\Lambda c^2\right) v^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана. □

4.13. Изображения. Операторы Π^T и $\mathcal{N}^T$ унитарны; их композиция

$$\mathcal{I}^T = \Pi^T\mathcal{N}^T \tag{4.47}$$

есть унитарный оператор из $\mathcal{G}^T$ на $\mathcal{F}^T_\nu$ $(0 < T < T^{\mathrm{reg}})$. Мы называем $\mathcal{I}^T$ *оператором изображения*; образ $\widetilde{h} = \mathcal{I}^T h$ называется *изображением* поля h; изображение есть нормальное к Γ поле на выкройке Θ^T. Оператору $\mathcal{I}^T$ предстоит сыграть важную роль в обратной задаче.

Пусть

$$\mathcal{T} := \{g \in L_2(\Gamma, \mathbb{R}^3) \mid g \times \nu = 0\}$$

есть пространство нормальных полей на Γ (ν – внешняя нормаль к Γ). Пространство $\mathcal{F}^T_\nu$ (4.15) можно рассматривать как пространство $\mathcal{T}$-значных функций переменной $\tau \in [0, T]$:

$$\mathcal{F}^T_\nu = L_2([0, T]; \mathcal{T}); \tag{4.48}$$

в нем действует семейство проекторов-срезок

$$(X^\xi f)(\tau) := \begin{cases} f(\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant \xi; \\ 0, & \xi < \tau \leqslant T \end{cases}$$

$(0 \leqslant \xi \leqslant T)$.

Лемма 4.7. *Справедливо соотношение*

$$\mathcal{I}^T Q^\xi \;=\; X^\xi \mathcal{I}^T. \tag{4.49}$$

Доказательство. В пространстве продольных полей $\mathscr{L}_\nu^T$ выделим расширяющееся семейство подпространств

$$\mathscr{L}_\nu^\xi := \{v \in \mathscr{L}_\nu^T \mid \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega^\xi}\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T < T^{\mathrm{reg}};$$

через Y^ξ обозначим проектор в $\mathscr{L}_\nu^T$ на $\mathscr{L}_\nu^\xi$; его действие сводится к срезке поля на подобласть Ω^ξ. Можно показать [2], что

$$\mathcal{N}^T Q^\xi = Y^\xi \mathcal{N}^T, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T < T^{\mathrm{reg}};$$

теперь (4.49) является следствием этого равенства и определения операторов $\mathcal{I}^T = \Pi^T \mathcal{N}^T$ и Π^T (см. (4.17)). Лемма доказана. $\square$

Дополнительно отметим, что благодаря свойству (3) леммы 4.1, соответствие “поле – изображение” сохраняет гладкость:

$$\mathcal{I}^T[\mathcal{G}^T \cap C^\infty(\overline{\Omega^T})] = \mathcal{F}_\nu^T \cap C^\infty(\overline{\Theta^T});$$

при этом выполняется равенство

$$(\mathcal{I}^T h)|_{\tau=0} = \kappa_0 h_\nu|_\Gamma, \tag{4.50}$$

с $\kappa_0 := \kappa|_\Gamma = \sqrt{c_0}$, вытекающее из соотношений

$$(\mathcal{N}^T h)|_{\Gamma^\xi} = \{h_\nu - \left(\Lambda \nabla_\theta^{-1} h_\theta\right) \nu\}|_{\Gamma^\xi} \xrightarrow{\xi \to 0} h_\nu|_\Gamma{}^6$$

и определения оператора Π^T.

Определим оператор $\mathcal{L}^T : \mathcal{G}^T \to \mathcal{G}^T, \mathrm{Dom}\ \mathcal{L}^T = \mathcal{G}^T \cap C^\infty(\overline{\Omega^T})$, который на гладких потенциальных полях h действует по правилу:

$$\mathcal{L}^T h \;:=\; \mathcal{L} h \;=\; \nabla c^2 \operatorname{div} h.$$

Преобразование $\mathcal{I}^T$ индуцирует в $\mathcal{F}_\nu^T$ оператор

$$\widetilde{\mathcal{L}}^T := (\mathcal{I}^T) \mathcal{L}^T (\mathcal{I}^T)^* \tag{4.51}$$

с областью определения $\mathrm{Dom}\ \widetilde{\mathcal{L}}^T = \mathcal{F}_\nu^T \cap C^\infty(\overline{\Theta^T})$. Для обратной задачи важно представление $\widetilde{\mathcal{L}}^T$, к описанию которого мы переходим.

[6] оно является следствием оценки вида (4.27) для оператора Λ^ξ

Скажем, что оператор $S\colon \mathcal{F}_\nu^T \to \mathcal{F}_\nu^T$ является *послойным*, если он определяется семейством операторов $S(\tau)\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T} (0 \leqslant \tau \leqslant T)$ и действует по правилу[7]:

$$(Sf)(\tau) = S(\tau)f(\tau),\ \tau \in [0,T].$$

Далее, пусть $\sigma \subset \Gamma$ есть окрестность, покрываемая локальными координатами $\gamma^1, \gamma^2; \widetilde{r}_0$ – базисное поле в $\sigma \times [0,T] \subset \overline{\Theta^T}$, которое не зависит от τ и определяется равенством

$$\widetilde{r}_0(\gamma,\tau) = r_0(\gamma,0);$$

поле $f \in \mathcal{F}_\nu^T$ представимо на $\sigma \times [0,T]$ в виде $f = f^0 \widetilde{r}_0$.

Теорема 4.2. *При $0 < T < T^{\mathrm{reg}}$ для гладкого нормального поля $f = f^0 \widetilde{r}_0$ на $\sigma \times [0,T]$, справедливо представление*

$$\widetilde{\mathcal{L}}^T f \;=\; \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \widetilde{\Lambda}^2\right) f^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{S} f, \tag{4.52}$$

в котором $\widetilde{\Lambda} := \pi \sqrt{\dfrac{J}{c}}\, \Lambda c \sqrt{\dfrac{c}{J}}\, \pi^{-1}$, а $\widetilde{S}$ есть послойный псевдодифференциальный оператор на выкройке Θ^T, порядка не выше 1.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм. Напомним, что оператор K в $L_2(\Omega^T)$ мы называем послойным, если он действует по правилу

$$(K\varphi)\big|_{\Gamma^\xi} \;=\; K(\xi)[\varphi\big|_{\Gamma^\xi}],\ 0 < \xi \leqslant T,$$

где $K(\xi)$ – операторы в $L_2(\Gamma^\xi)$.

Лемма 4.8. *Для гладкой в $\overline{\Omega^T}$ функции χ справедливо представление*

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Lambda \chi - \Lambda \chi \frac{\partial}{\partial \tau} \;=\; K, \tag{4.53}$$

в котором K есть послойный оператор такой, что все $K(\xi)$ суть ПДО порядка 1.

Опуская доказательство, отметим, что представление (4.53) оправдывается с использованием вполне стандартных результатов эллиптической теории [17]. Поясним также, что оператор K оказывается псевдодифференциальным из-за того, что таковыми являются операторы

[7]здесь, в соответствии с представлением (4.48), f понимается как $\mathcal{T}$-значная функция от τ

Кальдерона, определяющие Λ: каждый Λ^ξ есть эллиптический ПДО порядка 1 (см., например, [18]).

Лемма 4.9. *Для любого гладкого поля* $v = \begin{pmatrix} v^0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}_\nu^T$

$$\mathcal{N}^T \mathcal{L}^T (\mathcal{N}^T)^* v = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \bar{\Lambda}^2 \right) v^0 \\ 0 \end{pmatrix} + Sv, \tag{4.54}$$

где $\bar{\Lambda} := \Lambda^* c = \frac{1}{c}\Lambda c^2$, а S – послойный ПДО порядка не выше 1.

Доказательство. В выкладке, которая приводится ниже, значком $\sim$ отмечаются переходы с отбрасываием операторов более низкого порядка.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^T \mathcal{L}^T (\mathcal{N}^T)^* v^0 r_0 &\overset{(4.46)}{=} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{c}\Lambda \right) \frac{c}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} cJ + J\Lambda c^2 \right) v^0 r_0 \\
&= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{c}{J} \frac{\partial}{\partial \tau} cJ + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} c\Lambda c^2 - \frac{1}{c}\Lambda \frac{c}{J} \frac{\partial}{\partial \tau} cJ - \frac{1}{c}\Lambda c \Lambda c^2 \right) v^0 r_0 \\
&\sim \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} c^2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \Lambda c^2 - \frac{1}{c}\Lambda c^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{c}\Lambda c \Lambda c^2 \right) v^0 r_0 \\
&\sim \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \Lambda c^2 - \Lambda c^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right] - \frac{1}{c}\Lambda c \Lambda c^2 \right) v^0 r_0 \\
&\overset{(4.53)}{\sim} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{c}\Lambda c \Lambda c^2 \right) v^0 r_0 .
\end{aligned}$$

Обозначая $\bar{\Lambda} := \frac{1}{c}\Lambda c^2$ и вспоминая, что $\Lambda^* = \frac{1}{c}\Lambda c$, приходим к (4.54). Лемма доказана. $\square$

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 4.2. По определению (4.17), оператор $\Pi^T : \mathscr{L}_\nu^T \to \mathcal{F}_\nu^T$ действует так

$$\Pi^T v = \kappa \pi v, \tag{4.55}$$

где, согласно (4.16),

$$\kappa = \frac{c}{c_0} \sqrt{c \frac{J}{J_0}} . \tag{4.56}$$

Пользуясь унитарностью оператора Π^T, запишем

$$\widetilde{\mathcal{L}}^T \overset{(4.51)}{=} (\mathcal{I}^T)\mathcal{L}^T(\mathcal{I}^T)^* \overset{(4.47)}{=} \Pi^T\mathcal{N}^T\mathcal{L}^T(\mathcal{N}^T)^*(\Pi^T)^* \overset{(4.55)}{=} \kappa\pi\mathcal{N}^T\mathcal{L}^T(\mathcal{N}^T)^*\pi^{-1}\kappa^{-1}.$$

Осталось воспользоваться леммой 4.9. Имеем:

$$\widetilde{\mathcal{L}}^T = \kappa\pi\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \bar{\Lambda}^2\right)\pi^{-1}\kappa^{-1} + (\mathcal{I}^T)S(\mathcal{I}^T)^*. \tag{4.57}$$

Поскольку на продольных полях $\frac{D}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}$, то равенство (4.12) приобретает вид $\frac{\partial}{\partial\tau}\pi = \pi\frac{\partial}{\partial\tau}$; поэтому

$$\kappa\pi\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\pi^{-1}\kappa^{-1} = \kappa\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\kappa^{-1} \sim \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}. \tag{4.58}$$

Далее, обозначим

$$\widetilde{\Lambda}^2 := \kappa\pi\bar{\Lambda}^2\pi^{-1}\kappa^{-1} \overset{(4.10)}{=} \pi\kappa\bar{\Lambda}^2\kappa^{-1}\pi^{-1}, \tag{4.59}$$

где

$$\widetilde{\Lambda} := \pi\kappa\bar{\Lambda}\kappa^{-1}\pi^{-1} \overset{(4.56)}{=} \pi\sqrt{cJ}\,\bar{\Lambda}\,\frac{1}{\sqrt{cJ}}\,\pi^{-1} \overset{\bar{\Lambda}=\frac{1}{c}\Lambda c^2}{=} \pi\sqrt{\frac{J}{c}}\,\Lambda c\sqrt{\frac{c}{J}}\,\pi^{-1}.$$

Учитывая (4.58) и (4.59) и обозначая в (4.57) $\widetilde{S} := (\mathcal{I}^T)S(\mathcal{I}^T)^*$, приходим к (4.52) ($f = f^0\widetilde{r}_0$):

$$\widetilde{L}^T f = \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \widetilde{\Lambda}^2\right)f^0\,\widetilde{r}_0 + \widetilde{S}f; \tag{4.60}$$

легко видеть, что $\widetilde{S}$ – послойный ПДО на выкройке порядка не выше 1. Теорема 4.2 доказана.

Отметим, что Λ – послойный оператор, в котором каждый Λ^ξ, согласно (4.28), есть ПДО 1-го порядка с главным символом $\mathrm{Symb}_{\Lambda^\xi}(k_1, k_2) = \mathrm{Id}_\xi$; пользуясь этим, а так же свойствами главных символов при композиции операторов и умножении их на функции, заключаем, что результат теоремы 4.2 допускает инвариантную формулировку в терминах псевдодифференциальных операторов.

Теорема 4.3. *Справедливо представление*

$$\widetilde{L}^T = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + H, \tag{4.61}$$

в котором H есть послойный оператор такой, что каждый

$$H(\tau)\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}, \quad 0 < \tau \leqslant T$$

есть ПДО второго порядка с главным символом

$$\mathrm{Symb}_{H(\tau)}(\gamma, k_1, k_2) = -c^2(\gamma, \tau)|k|^2\,\mathrm{Id}, \tag{4.62}$$

где k_1, k_2 – переменные, двойственные к γ^1; γ^2; Id – тождественный оператор на кокасательном пространстве $T^*_\gamma\Gamma$; $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$.

§5. Динамика

5.1. Прямая задача. Оператор управления. Фиксируем произвольное $T > 0$ и рассмотрим задачу

$$h_{tt} - \mathcal{L}h = 0 \qquad \text{в } Q^T, \tag{5.1}$$

$$h|_{t=0} = h_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{5.2}$$

$$h_\nu = f \qquad \text{на } \Sigma^T; \tag{5.3}$$

здесь $\mathcal{L} := \nabla c^2 \,\mathrm{div}$, ν есть внешняя нормаль, $h_\nu = (h\cdot\nu)\nu$, $f \in \mathcal{F}^T_\nu \subset \mathcal{F}^T$ – управление. Ее решение $h = h^f(x,t)$ можно рассматривать как $\mathcal{G}^T$-значную функцию, зависящую от времени.

В описываемой задачей (5.1)–(5.3) динамической системе соответствие "вход – состояние" реализуется *оператором управления*

$$\mathcal{W}^T\colon \mathcal{F}^T_\nu \to \mathcal{G}^T, \quad \mathrm{Dom}\,\mathcal{W}^T = \mathcal{F}^T_\nu \cap \mathcal{M}^T,$$

$$\mathcal{W}^T f = h^f(\,\cdot\,, T). \tag{5.4}$$

Он непрерывен, а при временах $T < T^*$[8] и инъективен: $\mathrm{Ker}\,\mathcal{W}^T = \{0\}$ (см. [9]).

5.2. Управляемость. Множество

$$G^T := \mathrm{Ran}\,\mathcal{W}^T \subset \mathcal{G}^T$$

называется *достижимым* к моменту времени T.

Предложение 5.1. *При временах $T < T^{\mathrm{reg}}$ справедливо соотношение*

$$\overline{G^T} = \mathcal{G}^T \tag{5.5}$$

(замыкание в метрике $\mathcal{H}$).

---

[8] напомним, что T^* есть время заполнения области Ω волнами, идущими от границы: см. п. 2.1.

Оно выводится вполне аналогично соотношению (3.15).

Из (5.5) следует, что любое потенциальное поле в подобласти Ω^T можно аппроксимировать волнами $h^f(\cdot\,,T)$ в L_2-норме. В теории управления об том свойстве говорят, как о *приближенной управляемости* системы (5.1)–(5.3).

Во внешнем пространстве $\mathcal{F}_\nu^T$ рассмотрим семейство подпространств

$$\mathcal{F}_\nu^{T,\xi} := \{f \in \mathcal{F}_\nu^T \mid f(\cdot,t) = 0,\, 0 \leqslant t < T - \xi\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T, \tag{5.6}$$

образованных *запаздывающими управлениями* ($\mathcal{F}_\nu^{T,0} = \{0\}, \mathcal{F}_\nu^{T,T} = \mathcal{F}_\nu^T$). Запаздывание управления приводит к запаздыванию волны: по свойству $\operatorname{supp} h^f(\cdot,\xi) \subset \overline{\Omega^\xi}$ $(0 < \xi \leqslant T)$ и стационарности системы (5.1)–(5.3) (независимости $\mathcal{L}$ от времени) для $f \in \mathcal{F}_\nu^{T,\xi}$ имеем включение $\operatorname{supp} h^f(\cdot,T) \subset \overline{\Omega^\xi}$, т.е. $h^f(\cdot,T) \subset \mathcal{G}^\xi$.

Введем расширяющееся семейство достижимых множеств

$$G^\xi := \mathcal{W}^T \mathcal{F}_\nu^{T,\xi} \subset \mathcal{G}^\xi.$$

Проекторы P^ξ в G^T на G^ξ называются *волновыми*; дополнительные проекторы суть

$$P_\perp^\xi := \mathbb{I}_{G^T} - P^\xi. \tag{5.7}$$

Стационарность системы и соотношение (5.5) приводят к равенству

$$\overline{G^\xi} = \mathcal{G}^\xi, \tag{5.8}$$

из которых, в свою очередь, следует

$$P^\xi = Q^\xi, \quad P_\perp^\xi = Q_\perp^\xi \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant T < T^{\mathrm{reg}}). \tag{5.9}$$

(Q^ξ – проектор в $\mathcal{G}^T$ на $\mathcal{G}^\xi$: см. п. 4.7).

Разумеется, как Q^ξ, так и P^ξ определяются поведением скорости c, однако их совпадение является следствием управляемости системы.

5.3. Разрывы в прямой задаче. Рассмотрения в этом и следующем пункте касаются известного свойства гиперболических систем: разрывные управления порождают разрывные волны. Описание разрывов волн состаляет предмет геометрической оптики; соответствующие формулы играют ключевую роль в BC-методе.

Фиксируем $T : 0 < T < T^{\mathrm{reg}}$ и $\xi \in (0,T)$; обозначим

$$\theta^j(t) := \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{t^j}{j!} & t \geqslant 0 \end{cases}$$

($j=0,1,\ldots;\theta^0(t)$ – функция Хевисайда); положим

$$\theta^j_s(t)\;:=\;\theta^j(t-s),\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Выберем нормальное поле $a\in\mathcal{T}\cap C^\infty(\Gamma,\mathbb{R}^3)$ и рассмотрим систему (5.1)–(5.3):

$$h_{tt}-\mathcal{L}h=0 \qquad \text{в } Q^T, \tag{5.10}$$

$$h|_{t=0}=h_t|_{t=0}=0 \qquad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{5.11}$$

$$h_\nu\;=\;\theta^0_{T-\xi}a \qquad \text{на } \Sigma^T, \tag{5.12}$$

с управлением специального вида

$$f=f(\gamma,t)=\theta^0(t-(T-\xi))a(\gamma)\,.$$

Это управление является запаздывающим: $\theta^0_{T-\xi}a\in\mathcal{F}^{T,\xi}_\nu$ и *разрывным* при $t=T-\xi$. По конечности скорости распространения волн имеем

$$\operatorname{supp}h^{\theta^0_{T-\xi}a}\subset\{(x,t)\in\overline{Q^T}\,|\,t\geqslant\tau(x)+(T-\xi)\};$$

ограничивающая носитель характеристическая поверхность

$$\chi^{T,\xi}\;:=\;\{(x,t)\in\overline{Q^T}\,|\,t=\tau(x)+(T-\xi)\}$$

оказывается поверхностью разрыва решения:

$$h^{\theta^0_{T-\xi}a}(x,\tau(x)+T-\xi+0)=A(x)[a(\gamma(x))]^\vee, \tag{5.13}$$

где $A:=\left(\frac{c_0J_0}{cJ}\right)^{1/2}$ – амплитудный множитель, $[a(\gamma(x))]^\vee$ – результат параллельного переноса (в быстрой метрике) вектора a из точки $\gamma(x)\in\Gamma$ в точку $x\in\Omega^T$ вдоль геодезической $l_{\gamma(x)}$ (см. [1]).

Описание разрывов и вывод формул типа (5.13) существенно упрощаются при переходе к изображениям [8]. В соответствии с представлением (4.48), мы рассматриваем изображение волны $\widetilde{h}=\mathcal{I}^Th$ как $\mathcal{T}$-значную функцию переменной $\tau\in[0,T]$, зависящую от времени, как от параметра; по представлению $\mathcal{F}^T_\nu=L_2((0,T);\mathcal{T})$ управления суть $\mathcal{T}$-значные функции времени $t\in[0,T]$. Применяя оператор $\mathcal{I}^T$ в задаче (5.10)–(5.12), учитывая равенство (4.50) и представление (4.61), получаем систему

$$\widetilde{h}_{tt}-\widetilde{h}_{\tau\tau}-H(\tau)\widetilde{h}\;=\;0 \qquad (\tau,t)\in(0,T)\times(0,T), \tag{5.14}$$

$$\widetilde{h}|_{t=0}=\widetilde{h}_t|_{t=0}\;=\;0 \qquad \tau\in(0,T), \tag{5.15}$$

$$\widetilde{h}_\nu|_{\tau=0}\;=\;\theta^0_{T-\xi}\kappa_0a. \tag{5.16}$$

Действуя по схеме лучевого метода [1, 19], ищем решение системы в виде "анзац + невязка":

$$\widetilde{h}(\tau,t) = \sum_{j=0}^{N} \theta^{j}_{T-\xi}(t-\tau)A_j(\tau) + d_{N+1}(\tau,t). \qquad (5.17)$$

Подстановка (5.17) в (5.14) приводит к известным уравнениям переноса для $\mathcal{T}$–значных "амплитуд":

$$2\frac{\partial A_j}{\partial\tau} - \left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + H(\tau)\right] A_{j-1} = 0, \qquad j = 0,1,\ldots;$$

$A_{-1} := 0$; последовательно решая их с учетом условий $A_0(0) = \kappa_0 a$ (см. (5.16)); $A_j(0) = 0$, $j = 1,2,\ldots$, найдем

$$A_0(\tau) = \kappa_0 a;\ A_1(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau} [H(s)\kappa_0 a]\, ds; \ldots$$

Ограничиваясь случаем $N = 1$, получаем представление

$$\widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi}a}(\tau,t) = \theta^0_{T-\xi}(t-\tau)\kappa_0 a + \theta^1_{T-\xi}(t-\tau)\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}[H(s)\kappa_0 a]\, ds + d_2(\tau,t), \qquad (5.18)$$

причем справедлива оценка для невязки:

$$|d_2(\tau,t)| \leqslant C\theta^2_{T-\xi}(t-\tau), \quad (\tau,t) \in [0,T]\times[0,T], \qquad (5.19)$$

которая может быть установлена на том же пути, что и в случае волнового уравнения [19, 20]. Из (5.18) извлекаются формулы геометрической оптики:

$$\widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi}a}(\xi-0,T) = \kappa_0 a; \qquad (5.20)$$

$$2\,\frac{d}{d\xi}\left[\left.\frac{\widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi}a}(\tau,T) - \kappa_0 a}{\xi-\tau}\right|_{\tau=\xi-0}\right] = H(\xi)\kappa_0 a; \qquad (5.21)$$

формула (5.20) по существу является формой записи равенства (5.13).

Возвращаясь к исходному определению изображения, решение $\widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi}a}$ можно интерпретировать как бегущую по выкройке Θ^T волну; к моменту времени t ($t \geqslant T-\xi$) она заметает часть выкройки:

$$\operatorname{supp}\widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi}a}(\cdot,t) \subset \Gamma\times[0,t-(T-\xi)];$$

представление (5.18) описывает форму волны в окрестности ее переднего фронта $\Gamma \times \{\tau = t - (T - \xi)\}$.

5.4. Двойственная система. Система

$$w_{tt} - \mathcal{L}w = 0 \quad \text{в } Q^T, \tag{5.22}$$

$$w|_{t=T} = 0, \quad w_t|_{t=T} = y \quad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{5.23}$$

$$w_\nu = 0 \quad \text{на } \Sigma^T, \tag{5.24}$$

называется *двойственной* к системе (5.1)–(5.3); ее решение $w = w^y(x,t)$ обладает следующими свойствами:

(1) пусть $y \in \mathcal{G}^T \cap C_0^\infty(\overline{\Omega^T}; \mathbb{R}^3)$; в этом случае задача имеет единственное классическое решение $w^y \in C^\infty(\overline{Q^T}; \mathbb{R}^3)$;

(2) при $y \in \mathcal{G}^T$ определено решение $w^y \in C([0,T]; \mathcal{G}^T)$, причем отображение $y \to w^y$ непрерывно в соответствующих нормах;

(3) гиперболичность уравнения (5.22) на потенциальных полях приводит к известному свойству конечности области влияния: решение w^y на множестве $\{(x,t) \in Q^T \mid \tau(x) < t\}$ определяется значениями $y|_{\Omega^T}$ (не зависит от поведения y в $\Omega \setminus \Omega^T$).

Лемма 5.1. *Если f и y таковы, что решения h^f и w^y являются гладкими в $\overline{Q^T}$, то выполнено соотношение двойственности*

$$(h^f(\cdot, T), y)_{\mathcal{G}} = (f, \varkappa \operatorname{div} w^y \, \nu)_{\mathcal{F}^T_\nu}. \tag{5.25}$$

Доказательство. Интегрируя по частям в тождестве, имеем:

$$0 = \int\limits_{Q^T} \Big[h^f_{tt}(x,t) - \nabla(\varkappa \operatorname{div} h^f)\Big] \cdot w^y \, dx \, dt$$

$$= \int\limits_{\Omega} \Bigg\{ \Big[h^f_t(x,t) \cdot w^y(x,t) - h^f(x,t) \cdot w^y_t(x,t)\Big] \Big|_{t=0}^{t=T} + \int\limits_0^T h^f(x,t) \cdot w^y_{tt}(x,t) \, dt \Bigg\} dx$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma \big[(\varkappa \operatorname{div} h^f)(w^y \cdot \nu) - (h^f \cdot \nu)(\varkappa \operatorname{div} w^y)\big] (\gamma, t) \, d\Gamma \, dt$$

$$-\int_0^T\int_\Omega \left[h^f\cdot\nabla(\varkappa\,\mathrm{div}\,w^y)\right](x,t)\,dx\,dt$$

$$=\int_0^T\int_\Gamma [(\underbrace{h^f}_{f}\cdot\nu)\varkappa\,\mathrm{div}\,w^y](\gamma,t)\,d\Gamma\,dt-\int_\Omega h^f(x,T)\cdot\underbrace{w^y_t(x,T)}_{y(x)}\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_\Omega h^f(x,T)\cdot y(x)\,dx\;=\;\int_{\Sigma^T}(f\cdot\varkappa\,\mathrm{div}\,w^y\,\nu)(\gamma,t)\,d\Gamma\,dt.$$

Лемма доказана. □

Отображение $\mathcal{O}\colon y\to\varkappa\,\mathrm{div}\,w^y\,\nu|_{\Sigma^T}$ определено на гладких $y\in\mathcal{G}^T$; непрерывность отображения $f\to h^f$, свойство (2) решения системы (5.22)–(5.24) и соотношение (5.25) позволяют расширить его до непрерывного отображения из $\mathcal{G}^T$ в $\mathcal{F}^T_\nu$. Обозначим $\mathcal{O}^T:=\mathcal{O}|_{\mathcal{G}^T}$; следующий результат выводится из того же соотношения двойственности.

Предложение 5.2. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{O}^T\;=\;\left(\mathcal{W}^T\right)^*.$$

Оператор $\mathcal{O}^T$ называется *оператором наблюдения.*

5.5. Оператор реакции $\mathcal{R}^T$. Соответствие "вход – выход" в системе (5.1)–(5.3) реализуется *оператором реакции* $\mathcal{R}^T\colon\mathcal{F}^T_\nu\to\mathcal{F}^T_\nu$, $\mathrm{Dom}\,\mathcal{R}^T=\mathcal{F}^T_\nu\cap\mathcal{M}^T$

$$\mathcal{R}^Tf\;:=\;\begin{pmatrix}\varkappa\,\mathrm{div}\,h^f\\ 0\end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

Он просто связан с оператором реакции R^T системы типа Ламе (см. (3.8)): для любого $f\in\mathcal{F}^T_\nu\cap\mathcal{M}^T$ $\mathcal{R}^Tf=(R^Tf)^\nu$. В отличие от оператора управления, оператор реакции является неограниченным.

Рассмотрим систему (5.1)–(5.3) с удвоенным финальным моментом времени $2T$; пусть $\mathcal{R}^{2T}$ есть соответствующий оператор реакции. Ввиду конечности скорости распространения волн, он зависит от $\varkappa=c^2$ *локально*: $\mathcal{R}^{2T}$ определяется значениями $\varkappa$ в Ω^T и не зависит от ее поведения в $\Omega\backslash\Omega^T$.

Ниже оператору $\mathcal{R}^{2T}$ предстоит играть роль данных обратной задачи.

5.6. Разрывы в двойственной системе. Пусть $y \in \mathcal{G}^T$ есть гладкое поле; выберем $\xi \in (0,T)$, $T < T^{\mathrm{reg}}$ и рассмотрим систему вида (5.22)–(5.24):

$$\begin{aligned}
&w_{tt} - \mathcal{L}w = 0 && \text{в } Q^T,\\
&w|_{t=T} = 0,\ \ w_t|_{t=T} = P_\perp^\xi y && \text{в } \overline{\Omega},\\
&w_\nu = 0 && \text{на } \Sigma^T.
\end{aligned}$$

(проектор $P_\perp^\xi$ определен формулой (5.7)). Действие проектора приводит к появлению разрыва данных Коши на эквидистанте Γ^ξ; разрывные данные инициируют разрывную волну $w^{P_\perp^\xi y}$. Разрыв волны распространяется (в обратном времени) вдоль пространственно-временных лучей, составляющих характеристику $\mathcal{X}^{T,\xi}$ и при $t = T - \xi$ взаимодействует с границей. В результате наблюдаемый на Γ след

$$\varkappa \operatorname{div} w^{P_\perp^\xi y}\, \nu \,\Big|_{\Sigma^T} = \mathcal{O}^T P_\perp^\xi y$$

оказывается разрывным при $t = T - \xi$; наша ближайшая цель – описать этот разрыв.

Напомним, что оператор $\mathcal{O}^T : \mathcal{G}^T \to \mathcal{F}_\nu^T$ определяется равенством

$$(\mathcal{W}^T f, y)_{\mathcal{G}^T} = (f, \mathcal{O}^T y)_{\mathcal{F}_\nu^T}. \tag{5.27}$$

Здесь нам удобно рассматривать $\mathcal{O}^T P_\perp^\xi y$ как $\mathcal{T}$-значную функцию времени $t \in [0,T]$; произведение $\Big((\mathcal{O}^T P_\perp^\xi y)(t), a\Big)_{\mathcal{T}}$ определено для $a \in \mathcal{T}$ и суммируемо с квадратом по t.

Предложение 5.3. *Имеет место включение*

$$\operatorname{supp} \mathcal{O}^T P_\perp^\xi y \subset [0, T - \xi]. \tag{5.28}$$

В самом деле, для запаздывающих управлений $f \in \mathcal{F}_\nu^{T,\xi}$ имеем

$$(f, \mathcal{O}^T P_\perp^\xi y)_{\mathcal{F}_\nu^T} \;=\; (\mathcal{W}^T f, P_\perp^\xi y)_{\mathcal{G}^T} \;=\; 0$$

(поскольку $\mathcal{W}^T \mathcal{F}_\nu^{T,\xi} \subset \mathcal{G}^\xi$), что равносильно (5.28).

Лемма 5.2. *Для* $y \in \mathcal{G}^T \cap C^\infty(\overline{\Omega^T}; \mathbb{R}^3)$ *и* $a \in \mathcal{T} \cap C^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^3)$ *справедливо соотношение:*

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} \int\limits_{T-\xi-\delta}^{T-\xi} \Big((\mathcal{O}^T P_\perp^\xi y)(t), a\Big)_{\mathcal{T}}\, dt \;=\; (\kappa_0 \widetilde{y}(\xi), a)_{\mathcal{T}}, \tag{5.29}$$

в котором $\xi \in (0,T)$, $\widetilde{y} = \mathcal{I}^T y$ *– изображение поля* y.

Доказательство. Выберем малое $\delta > 0$; рассмотрим управление $\theta^0_{T-\xi-\delta} a \in \mathcal{F}^T_\nu : \operatorname{supp} \theta^0_{T-\xi-\delta} a \subset [T-\xi-\delta, T]$. По расположению носителей (5.28), имеем

$$(\mathcal{O}^T P^\xi_\perp y, \theta^0_{T-\xi-\delta} a)_{\mathcal{F}^T_\nu} = \int\limits_{T-\xi-\delta}^{T-\xi} \Big((\mathcal{O}^T P^\xi_\perp y)(t), a \Big)_{\mathcal{T}} \, dt\,. \tag{5.30}$$

Пусть $X^\xi_\perp := \mathbb{I} - X^\xi_\perp$ есть проектор в $\mathcal{F}^T_\nu$, срезающий элементы на интервал $[T-\xi, T]$; согласно (4.49), выполнено соотношение $\mathcal{I}^T Q^\xi = X^\xi \mathcal{I}^T$; отсюда, пользуясь управляемостью (5.9) ($P^\xi = Q^\xi$), выводим:

$$\mathcal{I}^T P^\xi_\perp \;=\; X^\xi_\perp \mathcal{I}^T. \tag{5.31}$$

Для изображения $\widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi-\delta} a}$, согласно (5.18), (5.19), имеем представление

$$\widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi-\delta} a}(\tau, T) = \theta^0(\xi + \delta - \tau)\kappa_0 a + d_1(\tau, T) \tag{5.32}$$

с оценкой

$$|d_1(\tau, T)| \leqslant C\theta^1(\xi + \delta - \tau). \tag{5.33}$$

Далее, справедливы равенства

$$\begin{aligned} &(\mathcal{O}^T P^\xi_\perp y, \theta^0_{T-\xi-\delta} a)_{\mathcal{F}^T_\nu} \overset{(5.27)}{=} (P^\xi_\perp y, \mathcal{W}^T[\theta^0_{T-\xi-\delta} a])_{\mathcal{G}^T} \\ &\quad = (\mathcal{I}^T P^\xi_\perp y, \mathcal{I}^T \mathcal{W}^T[\theta^0_{T-\xi-\delta} a])_{\mathcal{F}^T_\nu} \overset{(5.31)}{=} (X^\xi_\perp \widetilde{y}, \widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi-\delta} a}(\cdot, T))_{\mathcal{F}^T_\nu} \\ &\quad \overset{(5.32)}{=} \int\limits_\xi^{\xi+\delta} (\kappa_0\, a + d_1(\tau, T), \widetilde{y}(\tau))_{\mathcal{T}} \overset{(5.33)}{=} \delta(\kappa_0\, \widetilde{y}(\xi), a)_{\mathcal{T}} + o(\delta) \end{aligned} \tag{5.34}$$

(мы воспользовались унитарностью оператора $\mathcal{I}^T$). Сопоставляя (5.30) с (5.34), получаем (5.29). Лемма доказана. $\square$

С учетом свойства (5.28) установленный результат можно интерпретировать как описание разрыва функции $(\mathcal{O}^T P^\xi_\perp y)(t)$ при $t = T - \xi$. Соотношение (5.29) условимся записывать в виде

$$(\mathcal{O}^T P^\xi_\perp y)(T - \xi - 0) \;=\; (\kappa_0\, \mathcal{I}^T y)(\xi), \quad 0 < \xi < T, \tag{5.35}$$

понимая предел в смысле, определенном леммой. По соображениям динамического характера, приведенным в начале пункта, соотношение (5.35) представляет изображение поля в виде совокупности разрывов, прошедших через среду, заполняющую Ω^T, и детектированных на границе Г. Мы называем (5.35) *амплитудной формулой* [5].

5.7. Связывающий оператор. Оператор $\mathcal{C}^T : \mathcal{F}_\nu^T \to \mathcal{F}_\nu^T$,

$$C^T := \left(\mathcal{W}^T\right)^* \mathcal{W}^T$$

называется *связывающим оператором* системы (5.1)–(5.3). Смысл термина состоит в том, что для $f, g \in \mathcal{F}_\nu^T$ из определения имеем

$$(\mathcal{C}^T f, g)_{\mathcal{F}_\nu^T} = (\mathcal{W}^T f, \mathcal{W}^T g)_{\mathcal{G}^T} = (h^f(\cdot, T), h^g(\cdot, T))_{\mathcal{G}^T}, \tag{5.36}$$

т.е. $\mathcal{C}^T$ связывает скалярные произведения внешнего и внутреннего пространств динамической системы. Это непрерывный неотрицательный в $\mathcal{F}_\nu^T$ оператор.

Важный факт состоит в том, связывающей оператор можно вычислять по оператору реакции. Введем оператор нечетного продолжения $\mathcal{S}^T : \mathcal{F}_\nu^T \to \mathcal{F}_\nu^{2T}$,

$$(\mathcal{S}^T f)(\cdot, t) := \begin{cases} f(\cdot, t), & 0 \leqslant t < T; \\ -f(\cdot, 2T - t), & T \leqslant t \leqslant 2T; \end{cases}$$

и оператор интегрирования $\mathcal{J}^{2T} : \mathcal{F}_\nu^{2T} \to \mathcal{F}_\nu^{2T}$

$$(\mathcal{J}^{2T} f)(\cdot, t) := \int_0^t f(\cdot, s)\, ds\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Обозначим $M_\nu^T := \mathcal{F}_\nu^T \cap \mathcal{M}^T$, $\mathcal{M}_\nu^{T,0} := \{f \in M_\nu^T \mid S^T f \in M_\nu^{2T}\}$; отметим включение $\mathcal{S}^T \mathcal{M}_\nu^{T,0} \subset \operatorname{Dom} R^{2T}$ и равенство

$$\left(\left(\mathcal{S}^T\right)^* f\right)(\cdot, t) = f(\cdot, t) - f(\cdot, 2T - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Лемма 5.3. *На полях класса $\mathcal{M}_\nu^{T,0}$ справедливо представление*

$$\mathcal{C}^T = \frac{1}{2}(\mathcal{S}^T)^* \mathcal{J}^{2T} \mathcal{R}^{2T} \mathcal{S}^T. \tag{5.37}$$

Доказательство вполне аналогично, представленному в [9]. Как видно из (5.37), для нахождения $\mathcal{C}^T$ достаточно располагать значениями $\mathcal{R}^{2T}$ лишь на $\mathcal{S}^T \mathcal{M}_\nu^{T,0}$.

Оператор $\mathcal{C}^T$ позволяет находить изображения волн, используя так называемые *волновые базисы*. В подпространстве $\mathcal{F}_\nu^{T,\xi} \subset \mathcal{F}_\nu^T$ выберем полную систему управлений $\{f_j^\xi\}$: $\overline{\mathrm{Lin}}\{f_j^\xi\} = \mathcal{F}_\nu^{T,\xi}$ [9]; $(\mathcal{C}^T f_i^\xi, f_j^\xi)_{\mathcal{F}_\nu^T} = \delta_{ij}$.

[9] Lin – линейная оболочка

По свойству (5.8) и в силу (5.36), соответствующая система волн $\{\mathcal{W}^T f_j^\xi\}$ образует ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{G}^\xi$.

Выберем $f \in \mathcal{M}_\nu^T$; для волны $h^f(\cdot, T) = \mathcal{W}^T f$ имеем представление:

$$\begin{aligned} P_\perp^\xi \mathcal{W}^T f &= \mathcal{W}^T f - \sum_j (\mathcal{W}^T f, \mathcal{W}^T f_j^\xi)_{\mathcal{G}^T} \mathcal{W}^T f_j^\xi \\ &\overset{(5.36)}{=} \mathcal{W}^T f - \sum_j (\mathcal{C}^T f, f_j^\xi)_{\mathcal{F}_\nu^T} \mathcal{W}^T f_j^\xi. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Далее, во внешнем пространстве $\mathcal{F}_\nu^T$ выберем L_2-ортонормированный базис $\{g_k\}$. Имеем равенства:

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathcal{W}^T f, g_k)_{\mathcal{F}_\nu^T} &= (P_\perp^\xi \mathcal{W}^T f, \mathcal{W}^T g_k)_{\mathcal{G}^T} \\ &\overset{(5.38)}{=} (\mathcal{W}^T f, \mathcal{W}^T g_k)_{\mathcal{G}^T} - \sum_j (\mathcal{C}^T f, f_j^\xi)_{\mathcal{F}_\nu^T} (\mathcal{W}^T f_j^\xi, \mathcal{W}^T g_k)_{\mathcal{G}^T} \\ &\overset{(5.36)}{=} (\mathcal{C}^T f, g_k)_{\mathcal{F}_\nu^T} - \sum_j (\mathcal{C}^T f, f_j^\xi)_{\mathcal{F}_\nu^T} (\mathcal{C}^T f_j^\xi, g_k)_{\mathcal{F}_\nu^T}; \end{aligned}$$

они приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathcal{W}^T f &= \sum_k (\mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathcal{W}^T f, g_k)_{\mathcal{F}_\nu^T} g_k \\ &= \sum_k \left\{ (\mathcal{C}^T f, g_k)_{\mathcal{F}_\nu^T} - \sum_j (\mathcal{C}^T f, f_j^\xi)_{\mathcal{F}_\nu^T} (\mathcal{C}^T f_j^\xi, g_k)_{\mathcal{F}_\nu^T} \right\} g_k. \end{aligned} \tag{5.39}$$

В амплитудной формуле (5.35) положим $y = h = \mathcal{W}^T f$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}^T P_\perp^\xi h)(T - \xi - 0) &= (\mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathcal{W}^T f)(T - \xi - 0) \\ &= (\kappa_0 \mathcal{I}^T \mathcal{W}^T f)(\xi) = \kappa_0 \widetilde{h}^f(\xi, T). \end{aligned}$$

Вычисляя левую часть равенства

$$\kappa_0^{-1} (\mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathcal{W}^T f)(T - \xi - 0) = \widetilde{h}^f(\xi, T) \tag{5.40}$$

по представлению (5.39), восстанавливаем изображение волны h^f.

5.8. Восстановление скоростей. Пусть мы располагаем следующими данными о системе типа Ламе (3.1)–(3.3): ее оператор реакции R^{2T} задан при фиксированном $T > 0$ и известны функции $c_\alpha|_\Gamma$, $\frac{\partial c_\alpha}{\partial \nu}\big|_\Gamma$ $(\alpha = p, s)$. *Обратная задача* состоит в восстановлении скоростей c_s в Ω_s^T и c_p в Ω_p^T по этим данным. Приведем наш основной результат.

Теорема 5.1. *При любом положительном $T < T^{\mathrm{reg}}$ данные обратной задачи определяют скорости $c_\alpha|_{\Omega^T_\alpha}$ $(\alpha = p, s)$ единственным образом.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно подытожить предыдущие рассмотрения. Сделаем это в виде общей схемы решения обратной задачи.

1. Оператор реакции R^{2T} определяет оператор реакции $\mathcal{R}^{2T}$ системы (5.1)–(5.3) : $\mathcal{R}^{2T} f = \left(R^{2T} f\right)^\nu$ для любого $f \in \mathcal{F}^{2T}_\nu \cap \mathcal{M}^{2T}$;

2. по $\mathcal{R}^{2T}$ находится связывающий оператор $\mathcal{C}^T$ системы (5.1)–(5.3) (лемма 5.3);

3. по выбранным $a \in \mathcal{T} \cap C^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^3)$, $\xi \in (0, T)$ найдем

$$\kappa_0 \widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi} a}(\tau, T) = (\mathcal{O}^T P^\tau_\perp \mathcal{W}^T[\theta^0_{T-\xi} a])(T - \tau - 0)$$

согласно (5.40);

4. по (5.20) имеем $\kappa_0^2 = |a|^{-1} |\kappa_0 \widetilde{h}^{\theta^0_{T-\xi} a}(\xi - 0, T)|$; тем самым функция $\kappa_0 = \kappa_0(\gamma)$ определена;

5. по (5.21) найдем $H(\xi)\kappa_0\, a$; меняя a и ξ, восстановим семейство операторов $H(\xi)$, $0 < \xi < T$;

6. согласно (4.62), операторы $H(\xi)$ определяют функцию на выкройке $c_p(\gamma, \xi)$, по которой однозначно находится быстрая скорость $c_p(x)$ в подобласти Ω^T_p (теорема 4.1).

Восстановление медленной скорости c_s в Ω^T_s по оператору реакции $\mathcal{R}^{2T}_m$ максвелловской подсистемы (3.16)–(3.18), который на касательных к Γ управлениях класса $\mathcal{M}^{2T}$ определен равенством $\mathcal{R}^{2T}_m f = (R^{2T} f)_\theta$, проведено в [8]. Отметим, что основным пространством в этом случае будет $\mathcal{H}^T$ и его подпространство J^T соленоидальных полей.

Шаги (2)–(5) нашего доказательства по существу аналогичны шагам (i)–(iv) работы [8]. Дальнейшее отличие в том, что по соответствующему (подсистеме Максвелла) семейству операторов $H(\xi)$, $0 < \xi < T$ сначала определяется тензор $\{h_{\alpha\beta}\}$ медленной метрики и лишь потом скорость $c_s(\gamma, \xi)$ на Θ^T. Для этого рассматривается так называемая *задача Ямабе*, решение которой сводится к решению некоторого эллиптического уравнения. Для единственности его решения необходимо знать также значения c_s и $\frac{\partial c_s}{\partial \tau}$ на Γ (Теорема 1.1 в [8]). По скорости $c_s(\gamma, \xi)$ на Θ^T восстанавливается медленная скорость $c_s(x)$ в Ω^T_s (теорема 4.1).

Теорема доказана. $\square$

Автор признателен М. И. Белишеву за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Москва, Наука, 1972.
2. М. И. Белишев, *Об унитарном преобразовании в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, связанном с разложением Вейля.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **275** (2001), 25–40.
3. M. I. Belishev, *Dynamical inverse problem for a Lame type system.* — J. Inv. Ill-Posed Problems, **14** (2006), No. 8, 751–766.
4. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inv. Problems, **13** (1997), No. 5, R1–R45.
5. М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн.* СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1999.
6. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems, **23** (2007), No. 5, R1–R67.
7. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *К проектированию в пространстве соленоидальных векторных полей.* — Зап. Научн.Семин. ПОМИ, **257** (1999), 16–43.
8. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод).* — Алгебра и анализ, **12**, No. 2 (2000), 131–187.
9. M. I. Belishev, I. Lasiecka, *The dynamical Lame system: regularity of solutions, boundary controllability and boundary data continuation.* — J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculues of Variations, **8** (2002), 143–167.
10. М. И. Белишев, В. Г. Фоменко, *О достижимых множествах динамической системы типа Ламе.* — Пробл. мат. анализа, **70** (2013), 57–70.
11. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, *Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР, **59** (1960), 5–36.
12. M. Eller, *Symmetric hyperbolic systems with boundary conditions that do not satisfy the Kreiss-Sakamoto condition.* — Appl. Math., **35** (2008), 323–333.
13. M. Eller, V. Isakov, G. Nakamura, D. Tataru, *Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell's and elasticity systems.* — Nonlinear PDE and Applications, Eds. D.Cioranescu, J-L. Lions, College de France Seminar, **14**, 329–349. Studies in Mathematics and its applications, v.31, North-Holland, Elsevier Science, 2002.
14. В. Г. Фоменко, *Оператор реакции системы Ламэ.* — Сложные системы и процессы, **1**, No. 17 (2010), 13–18.
15. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Москва, Наука, 1970.
16. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задачи магнитогидродинамики.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, **38** (1973), 46–93.

17. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Москва, Мир, 1971.
18. J. Sylvester, G. Uhlmann, *Inverse boundary value problems at the boundary – continuous dependence.* — Comm. Pure Appl. Math., **XLI**, 197–219 (1988). 329–349.
19. Б. Р. Вайнберг, *Асимптотические методы в уравнениях матемаической физики.* Москва, изд-во МГУ, 1982.
20. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **215** (1994), 9–37.

Fomenko V. G. Dynamical inverse problem for the Lame type system (the BC-method).

In the paper, for a Lame-type system, the inverse problem on recovering the fast and slow wave velocities from the boundary dynamical data (the response operator) is solved. The velocities are determined in the near-boundary domain, the depth of determination being proportional to the observation time. We use the BC-method, which is an approach to inverse problems based on their connections with boundary control theory.

С.-Петербургский
государственный университет,
ул. Ульяновская, д.3,
Петродворец, 198504,
С.-Петербург, Россия
E-mail: fomenkovova@mail.ru

Поступило 27 октября 2014 г.