Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

В. Г. Фарафонов, Н. В. Вощинников, Е. Г. Семенова

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВОЛНОВЫМИ СФЕРОИДАЛЬНЫМИ И СФЕРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Введение

В настоящее время волновые сфероидальные функции часто используются при решении проблемы рассеяния волн несферическими, в особенности сфероидальными частицами [1–4]. Следует отметить, что сфероидальная модель несферических частиц является одной из наиболее подходящих при рассмотрении многих прикладных вопросов в разных областях – физике атмосферы и океана, радиофизике, биофизике, астрофизике и т.д. Наиболее сложными являются задачи рассеяния неоднородными, точнее слоистыми частицами. В последнем случае применение сферического базиса для решения задачи имеет существенные ограничения, связанные с формой слоев [5]. Для слоистых сфероидов эти ограничения указаны в работе [6]. В частности, для двухслойных конфокальных (софокусных) сфероидов метод расширенных граничных условий (Extended Boundary Condition Method, EBCM) имеет область применимости $a/b < \sqrt{2} + 1$, где a и b – большая и малая полуоси внешней оболочки частицы. В то же время базис, составленный из волновых сфероидальных функций, наиболее полно учитывает форму рассеивателей. В случае конфокальных слоистых сфероидов использование сфероидального базиса дает хорошие результаты для двухслойных и многослойных частиц как при применении обобщенного метода разделения переменных [7–10], так и при применении EBCM [11]. Для неконфокальных (несофокусных) слоистых сфероидов применение сфероидального базиса для численных расчетов [12] было принципиально затруднено отсутствием подходящих соотношений, связывающих волновые сфероидальные функции в разных системах координат.

Ключевые слова: сфероидальные функции, рассеяние света, многослойные несофокусные сфероиды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках конкурсной части госзадания ГУАП в 2014-16 гг. и гранта РФФИ 13-02-00138.

В данной работе рассматриваются новые соотношения между волновыми сфероидальными и сферическими функциями, а также между сфероидальными функциями в двух разных системах координат, имеющих общее начало и общую ось вращения. Обсуждаются области применимости полученных формул. Результаты тестовых численных расчетов показывают высокую эффективность найденных соотношений, особенно для волновых функций, содержащих радиальные функции 1-го рода. В частности, рассмотрены соотношения между сплюснутыми и вытянутыми волновыми сфероидальными функциями, содержащими радиальные функции 1-го и 2-го родов. Полученные соотношения необходимы для решения проблемы рассеяния волн несофокусными многослойными сфероидальными частицами.

§1. Соотношения между волновыми сфероидальными и сферическими функциями

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ), которая связана с декартовой системой (x, y, z) стандартным образом:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Кроме того, введем две сфероидальные системы (ξ_j, η_j, φ), которые имеют общее начало координат со сферической и декартовой системами и связаны с последней следующим образом [13]:

$$\begin{aligned} x =& \frac{d_j}{2}(\xi_j^2 - f_j)^{1/2}(1-\eta_j^2)^{1/2}\cos\varphi, \\ y =& \frac{d_j}{2}(\xi_j^2 - f_j)^{1/2}(1-\eta_j^2)^{1/2}\sin\varphi, \\ z =& \frac{d_j}{2}\xi_j\eta_j, \end{aligned} \tag{2}$$

где d_j – фокусные расстояния, $f_j = 1$, $\xi_j \in [1, \infty)$, $\eta_j \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ для вытянутых, но $f_j = -1$, $\xi_j \in [0, \infty)$, $\eta_j \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ для сплюснутых координат. Заметим, что азимутальный угол φ один и тот же во всех координатных системах, так как координатные поверхности (сфероиды)

$$\xi_j = \xi_j^0, \tag{3}$$

в обеих системах имеют не только общий центр, но и общую ось симметрии, совпадающую с осью z декартовой системы. Обозначим большие и меньшие полуоси сфероидов в первой системе через a_1 и b_1, а во второй – a_2 и b_2. Для конфокальных (софокусных) сфероидальных систем имеет место равенство

$$a_1^2 - b_1^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a_2^2 - b_2^2, \tag{4}$$

при этом все координатные сфероиды являются либо вытянутыми, либо сплюснутыми. В общем случае несофокусных систем одна из них может быть вытянутой, а другая – сплюснутой.

Волновые сферические функции, получающиеся разделением переменных в волновом уравнении в сферической системе координат, можно записать в виде

$$\begin{matrix} \Psi_{mn}^{(1)}(k,\vec{r}) \\ \Psi_{mn}^{(3)}(k,\vec{r}) \end{matrix} \ = \ \begin{matrix} j_n(kr) \\ h_n^{(1)}(kr) \end{matrix} \ P_n^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{5}$$

где k – волновое число, $j_n(kr)$ и $h_n^{(1)}(kr)$ сферические функции Бесселя и Ганкеля первого рода, $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра с нормировочным множителем $N_{mn}(0) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}}$. Другой набор волновых функций получается, если заменить $\cos m\varphi$ на $\sin m\varphi$.

Волновые вытянутые сфероидальные функции, получающиеся разделением переменных в волновом уравнении в вытянутой сфероидальной системе координат, записываются в виде

$$\begin{matrix} \Psi_{mn}^{(1)}(c,\vec{r}) \\ \Psi_{mn}^{(3)}(c,\vec{r}) \end{matrix} \ = \ \begin{matrix} R_{ml}^{(1)}(c,\xi) \\ R_{ml}^{(3)}(c,\xi) \end{matrix} \ S_{ml}(c,\eta)\ \cos m\varphi, \tag{6}$$

Здесь $R_{ml}^{(1),(3)}(c,\xi)$ – вытянутые радиальные сфероидальные функции первого и третьего рода, $S_{ml}(c,\eta)$ – вытянутые угловые сфероидальные функции с нормировочным множителем $N_{ml}(c)$, параметр $c = k\frac{d}{2}$ [13]. Волновые сплюснутые сфероидальные функции можно получить из вытянутых, если выполнить формальную замену $c \to (-ic)$, $\xi \to i\xi$.

Соотношения между волновыми вытянутыми сфероидальными функциями и сферическими функциями, содержащими радиальные функции 1-го порядка, были приведены в монографии [14]:

$$R_{mn}^{(1)}(c,\xi)S_{nm}(c,\eta) = \sum_{l=m}^{\infty} i^{l-n}\, d_{l-m}^{mn}(c)\, j_l(kr)P_l^m(\cos\theta), \tag{7}$$

$$j_n(kr)P_n^m(\cos\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} i^{l-n}\left(\frac{N_{mn}(0)}{N_{ml}(c)}\right)^2 d_{n-m}^{ml}(c)R_{ml}^{(1)}(c,\xi)S_{lm}(c,\eta), \tag{8}$$

где $d_r^{mn}(c)$ – коэффициенты разложения функции $S_{ml}(c,\eta)$ в ряд по функциям Лежандра $P_l^m(\eta)$. Отметим, что в монографиях [13, 14] в формуле (7) имеется опечатка, связанная с отсутствием множителя i^{l-n}.

Для волновых функций, имеющих особенность в начале координат, но удовлетворяющих условию излучения на бесконечности, т.е. для волновых функций, содержащих радиальные функции третьего рода $R_{ml}^{(3)}(c,\xi)$ и $h_l^{(1)}(kr)$, ранее приводились лишь некоторые интегральные соотношения.

Обратимся к разложениям функции Грина в свободном пространстве в сфероидальной и сферической системах координат [13, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{\exp ik|\vec{r}-\vec{r}'|}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{ik}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta_{0m})R_{ml}^{(1)}(c,\xi_<)R_{ml}^{(3)}(c,\xi_>) \\ &\times \bar{S}_{ml}(c,\eta)\bar{S}_{ml}(c,\eta')\,\cos m(\varphi-\varphi') \\ &= \frac{ik}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta_{0m})\, j_l(kr_<)\, h_l^{(1)}(kr_>) \\ &\times \bar{P}_l^m(\cos\theta)\,\bar{P}_l^m(\cos\theta')\,\cos m(\varphi-\varphi'), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\delta_{0m} = 1$ при $m = 0$ и $\delta_{0m} = 0$ при $m \neq 0$, кроме того $\xi_< = \min(\xi,\xi')$, $\xi_> = \max(\xi,\xi')$ и $r_< = \min(r,r')$, $r_> = \max(r,r')$. Здесь $\bar{P}_l^m(\cos\theta) = N_{ml}^{-1}(0)P_l^m(\cos\theta)$ и $\bar{S}_{lm}(c,\eta) = N_{ml}^{-1}(c)S_{lm}(c,\eta)$ – нормированные угловые функции. В силу ортогональности тригонометрических функций имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{l=m}^{\infty} R_{ml}^{(1)}(c,\xi_<)R_{ml}^{(3)}(c,\xi_>)\,\bar{S}_{ml}(c,\eta)\bar{S}_{ml}(c,\eta') \\ &\quad= \sum_{l=m}^{\infty} j_l(kr_<)\,h_l^{(1)}(kr_>)\,\bar{P}_l^m(\cos\theta)\,\bar{P}_l^m(\cos\theta'). \end{aligned} \tag{10}$$

Теперь используем связь (7) между регулярными в начале координат волновыми сфероидальными и сферическими функциями:

$$R_{ml}^{(1)}(c,\xi_<)S_{ml}(c,\eta') = \sum_{n=m}^{\infty} i^{n-l}\, d_{n-m}^{ml}(c)\, j_n(kr_<)P_n^m(\cos\theta'), \tag{11}$$

где предполагается, что одновременно выполняются два неравенства $\xi' < \xi$ и $r' < r$. После подстановки соотношения (11) в равенство (10), учитывая ортогональность угловых функций $\{j_n(kr_<)P_n^m(\cos\theta')\}_{n=m}^{\infty}$, получим искомую формулу

$$\begin{aligned} &h_n^{(1)}(kr_>)\; P_n^m(\cos\theta) \\ &\quad = \sum_{l=m}^{\infty} i^{n-l}\left(\frac{N_{mn}(0)}{N_{ml}(c)}\right)^2 d_{n-m}^{ml}(c)R_{ml}^{(3)}(c,\xi_>)S_{ml}(c,\eta), \end{aligned} \tag{12}$$

т.е. аналог соотношения (8) для регулярных волновых функций.

Аналогично, если использовать соотношение (8)

$$\begin{aligned} &j_l(kr_<)P_l^m(\cos\theta') \\ &\quad = \sum_{n=m}^{\infty} i^{n-l}\left(\frac{N_{ml}(0)}{N_{mn}(c)}\right)^2 d_{l-m}^{mn}(c)R_{mn}^{(1)}(c,\xi_<)S_{mn}(c,\eta'), \end{aligned} \tag{13}$$

то после его подстановки в равенство (10) найдем

$$R_{mn}^{(3)}(c,\xi_>)S_{mn}(c,\eta) = \sum_{l=m}^{\infty} i^{n-l}\, d_{l-m}^{mn}(c)\, h_l^{(1)}(kr_>)P_l^m(\cos\theta), \tag{14}$$

т.е. аналог формулы (7).

Если сравнить соотношения (7) и (8) с соответствующими формулами (14) и (12), то видно, что отличие наблюдается только в знаке степени мнимой единицы, т.е. множитель i^{l-n} в первом случае заменяется на множитель i^{n-l} во втором. Принимая во внимание соотношения между радиальными функциями третьего и первого рода $R_{mn}^{(3)}(c,\xi) = R_{mn}^{(1)}(c,\xi) + i\,R_{mn}^{(2)}(c,\xi)$, может показаться, что уравнения (7) и (14) не согласуются друг с другом. Различие для функций $R_{mn}^{(1)}(c,\xi)$ сводится к замене в полученной выше формуле (7) знака мнимой единицы: $i \to (-i)$. В действительности, подобная замена не меняет результат, так как разность индексов $(n-l)$ обязательно четна в силу равенства $d_{l-m}^{mn}(c) = 0$ в противном случае. С учетом приведенных выше замечаний соотношения между волновыми сфероидальными и сферическими функциями, состоящими из радиальных функций

j-го рода и нормированных угловых функций, можно переписать следующим образом:

$$R_{mn}^{(j)}(c,\xi)\bar{S}_{nm}(c,\eta)=\sum_{l=m}^{\infty} i^{l-n}\,\frac{N_{mn}(0)}{N_{ml}(c)}d_{l-m}^{mn}(c)\,\zeta_l^{(j)}(kr)\bar{P}_l^m(\cos\theta), \quad (15)$$

$$\zeta_n^{(j)}(kr)\bar{P}_n^m(\cos\theta)=\sum_{l=m}^{\infty} i^{l-n}\frac{N_{mn}(0)}{N_{ml}(c)}d_{n-m}^{ml}(c)R_{ml}^{(j)}(c,\xi)\bar{S}_{lm}(c,\eta), \quad (16)$$

где $\zeta_n^{(j)}(kr)$ – радиальная сферическая функция j-го рода, т.е. функция Бесселя, Неймана или Ганкеля 1-го или 2-го рода.

Для исследования областей сходимости найденных соотношений (бесконечных рядов) между волновыми функциями необходимо знать асимптотики при больших значениях индекса как коэффициентов, так и соответствующих угловых и радиальных функций. Сначала приведем асимптотики коэффициентов [4] (см. также [13, 14]):

1) $r\leqslant n-m$

$$d_r^{mn}(c)=\left(\frac{c^2}{16}\right)^{\frac{n-m-r}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n+m+r+1}{2})\;d_{n-m}^{mn}(c)}{\Gamma(\frac{n-m-r}{2}+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (17)$$

2) $r\geqslant n-m$

$$d_r^{mn}(c)=\left(\frac{-c^2}{16}\right)^{\frac{r-n+m}{2}}\frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})\;d_{n-m}^{mn}(c)}{\Gamma(\frac{r-n+m}{2}+1)\Gamma(\frac{n+r+m+3}{2})}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right], \quad (18)$$

где

$$d_{n-m}^{mn}(c)=1+O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (19)$$

Асимптотики радиальных сферических функций можно представить следующим образом [14]:

$$j_n(kr)=\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\;(kr)^n\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (20)$$

$$h_n^{(1)}(kr)=\frac{(2n)!}{2^n n!}\;(kr)^{-(n+1)}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (21)$$

Соответствующие асимптотики сфероидальных функций имеют вид [4]

$$
\begin{aligned}
S_{mn}(c,\eta) &= P_n^m(\cos\vartheta)\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= n^m\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\vartheta}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{mn}^{(1)}(c,\xi) &= \left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-f}}{2\sqrt{\xi^2-f}}\right)^{\frac{1}{2}} j_n\Big(\frac{c}{2}\big(\xi+\sqrt{\xi^2-f}\big)\Big) \\
&\quad\times\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-f}}{2\sqrt{\xi^2-f}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n!}{(2n+1)!}\Big[c\left(\xi+\sqrt{\xi^2-f}\right)\Big]^n \\
&\quad\times\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{mn}^{(3)}(c,\xi) &= \left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-f}}{2\sqrt{\xi^2-f}}\right)^{\frac{1}{2}} h_n^{(1)}\Big(\frac{c}{2}\big(\xi+\sqrt{\xi^2-f}\big)\Big) \\
&\quad\times\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= -2i\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-f}}{2\sqrt{\xi^2-f}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2n)!}{n!}\Big[c\left(\xi+\sqrt{\xi^2-f}\right)\Big]^{-(n+1)} \\
&\quad\times\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где $\cos\vartheta=\eta$ и $\vartheta\in[0,\pi]$. Отметим, что соотношения (17)–(18) и (22)–(24) справедливы как для вытянутых, так и для сплюснутых сфероидальных функций.

Бесконечные ряды будем анализировать с помощью признака Даламбера. Сходимость соотношений для волновых функций первого рода, т.е. содержащих радиальные функции 1-го рода, очевидна за исключением множества особых точек – фокусного отрезка для вытянутых и фокусного круга для сплюснутых функций.

Для волновых сфероидальных функций 2-го рода ряд (15) сходится при условии

$$\frac{c^2}{4l^2}\ \frac{16l^4}{4l^2\ (kr)^2}=\frac{(d/2)^2}{r^2}<1. \tag{25}$$

Таким образом, здесь сходимость имеет место вне шара с центром в начале координат и радиусом равным половине фокусного расстояния $d/2$. Данный результат вполне согласуется с расположением особых точек радиальных сфероидальных функций 2-го рода. Для волновых сфероидальных функций 3-го и 4-го родов получаются те же результаты.

Для волновых сферических функций 2-го рода ряд (16) сходится при условии

$$\frac{c^2}{4l^2}\ \frac{16l^4}{l^2\ c^2\left(\xi+\sqrt{\xi^2-f}\right)^2}=\frac{4}{\left(\xi+\sqrt{\xi^2-f}\right)^2}<1. \tag{26}$$

Данное условие соответствует внешности вытянутого или сплюснутого сфероида, сумма полуосей которого равна фокусному расстоянию $a+b=d$. Для этого сфероида большая и меньшая полуоси равны $a=\frac{5}{4}\ d/2$ и $b=\frac{3}{4}\ d/2$, а отношение полуосей равно $a/b=5/3\simeq 1.67$. Условия для радиальной координаты имеет вид $\xi>1.25$ для вытянутых и $\xi>0.75$ для сплюснутых функций.

§2. Соотношения между волновыми сфероидальными функциями, определенными в разных системах координат

Введем векторы

$$\vec{u}^{(1)}(k)=\{u_l^{(1)}(k)\}_{l=m}^{\infty}=\{i^l j_l(kr)\bar{P}_l^m(\cos\theta)\}_{l=m}^{\infty}, \tag{27}$$

$$\vec{v}^{(1)}(c)=\{v_l^{(1)}(c)\}_{l=m}^{\infty}=\{i^l R_{ml}^{(1)}(c,\xi)\bar{S}_{lm}(c,\eta)\}_{l=m}^{\infty}, \tag{28}$$

а также матрицы

$$D_1(c)=\{d_{nl,1}(c)\}_{n,\,l=m}^{\infty}=\left\{\frac{N_{ml}(0)}{N_{mn}(c)}\,d_{l-m}^{mn}(c)\right\}_{n,\,l=m}^{\infty} \tag{29}$$

$$D_2(c)=\{d_{nl,2}(c)\}_{n,\,l=m}^{\infty}=\left\{\frac{N_{mn}(0)}{N_{ml}(c)}\,d_{n-m}^{ml}(c)\right\}_{n,\,l=m}^{\infty} \tag{30}$$

Отметим очень важное свойство вектора $\vec{u}^{(1)}(k)$ – он зависит только от волнового числа k и не зависит от фокусных расстояний d_j (или от параметров c_j), которые отличаются друг от друга в разных сфероидальных системах координат. В то же время векторы $\vec{v}^{(1)}(c_j)$ дополнительно привязаны к определенным сфероидальным системам, при этом $c_1 = kd_1/2$ и $c_2 = kd_2/2$, а волновое число k используется одно и то же. Формулы (7)–(8), связывающие волновые сфероидальные и сферические функции, можно записать следующим образом:

$$\vec{v}^{(1)}(c) = D_1(c)\ \vec{u}^{(1)}(k). \tag{31}$$

$$\vec{u}^{(1)}(k) = D_2(c)\ \vec{v}^{(1)}(c). \tag{32}$$

Теперь ясно, что матрица из соотношения (32) будет обратной, но она одновременно является транспонированной, т.е.

$$D_2(c) = D_1^{-1}(c) = D_1^T(c), \tag{33}$$

Заметим, что критерием правильности расчета этих матриц могут служить соотношения

$$D_1(c) \cdot D_1^T(c) = I, \quad D_1^T(c) \cdot D_1(c) = I, \tag{34}$$

где I – единичная матрица. Равенство единице диагональных элементов в первом равенстве очевидно, как и равенство нулю элементов с нечетной суммой индексов. Справедливость других равенств нетривиальна.

Соотношения (31)–(33) позволяют найти связь между волновыми сфероидальными функциями в двух разных системах:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(1)}(c_2) = D_1(c_2)\ \vec{u}^{(1)}(k) = D_1(c_2) \cdot D_1^T(c_1)\ \vec{v}^{(1)}(c_1) \\ = \Delta(c_2, c_1)\ \vec{v}^{(1)}(c_1), \end{aligned} \tag{35}$$

где введена новая матрица, элементы которой вычисляются по формуле

$$\delta_{nl}^m(c_2, c_1) = N_{mn}^{-1}(c_2)\ N_{ml}^{-1}(c_1) \sum_{s=m}^{\infty} d_{s-m}^{mn}(c_2)\ d_{s-m}^{ml}(c_1)\ N_{ms}^2(0). \tag{36}$$

Если ввести векторы

$$\vec{u}^{(3)}(k) = \{u_l^{(3)}(k)\}_{l=m}^{\infty} = \{i^l h_l^{(1)}(kr)\bar{P}_l^m(\cos\theta)\}_{l=m}^{\infty}, \tag{37}$$

$$\vec{v}^{(3)}(c) = \{v_l^{(3)}(c)\}_{l=m}^{\infty} = \{i^l R_{ml}^{(3)}(c,\xi)\bar{S}_{lm}(c,\eta)\}_{l=m}^{\infty}, \tag{38}$$

то соотношения аналогичные (31)–(32) и (35) следует переписать в виде

$$\vec{v}^{(3)}(c) = D_1(c)\ \vec{u}^{(3)}(k). \tag{39}$$

$$\vec{u}^{(3)}(k) = D_2(c)\ \vec{v}^{(3)}(c). \tag{40}$$

и

$$\vec{v}^{(3)}(c_2) = \Delta(c_2, c_1)\ \vec{v}^{(3)}(c_1). \tag{41}$$

Элементы матрицы $\Delta(c_2, c_1)$ по-прежнему вычисляются по формуле (36).

Более подробно соотношения (35) и (41), связывающие между собой волновые сфероидальные функции в двух разных системах, можно представить следующим образом:

$$R^{(1)}_{mn}(c_2,\xi_2)\bar{S}_{mn}(c_2,\eta_2) = \sum_{l=m}^{\infty}\delta^{(m)}_{nl}(c_2,c_1)\, i^{l-n} R^{(1)}_{ml}(c_1,\xi_1)\bar{S}_{ml}(c_1,\eta_1), \tag{42}$$

$$R^{(3)}_{mn}(c_2,\xi_2)\bar{S}_{mn}(c_2,\eta_2) = \sum_{l=m}^{\infty}\delta^{(m)}_{nl}(c_2,c_1)\, i^{l-n} R^{(3)}_{ml}(c_1,\xi_1)\bar{S}_{ml}(c_1,\eta_1), \tag{43}$$

где $c_1 = kd_1/2$ и $c_2 = kd_2/2$ в сфероидальных системах (ξ_1, η_1, φ) и (ξ_2, η_2, φ).

Сфероидальные функции связаны с разными системами, но вычисляются в одной и той же точке. В силу этого справедливы следующие соотношения:

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 (\xi_2^2 - f_2 + f_2\eta_2^2) = r^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 (\xi_1^2 - f_1 + f_1\eta_1^2), \tag{44}$$

$$\frac{d_2}{2}\xi_2\eta_2 = z = \frac{d_1}{2}\xi_1\eta_1, \tag{45}$$

Если известны координаты точки в первой системе ξ_1 и η_1, а также фокусные расстояния d_1 и d_2, то координаты точки во второй сфероидальной системе можно вычислить по следующим формулам:

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{(\tilde{r}^2 + f_2) + \sqrt{(\tilde{r}^2 + f_2)^2 - 4f_2\tilde{z}^2}}{2}}, \quad \eta_2 = \frac{\tilde{z}}{\xi_2}, \tag{46}$$

где введены параметры $\tilde{z} = \xi_1\eta_1\frac{d_1}{d_2}$ и $\tilde{r}^2 = (\xi_1^2 - f_1 + f_1\eta_1^2)(\frac{d_1}{d_2})^2$. Стоит напомнить, что параметры f_1 и f_2 принимают значения 1 или (-1) в зависимости от того, являются соответствующие координаты вытянутыми или сплюснутыми. Кроме того, справедливо соотношение

$\frac{d_1}{d_2} = \frac{c_1}{c_2}$, так как волновое число k не должно изменяться при переходе от одной системы к другой.

Для волновых сплюснутых сфероидальных функций все рассуждения полностью аналогичны и соответствующие результаты легко получить, если сделать стандартную замену $d \to -id$, $c \to -ic$ и $\xi \to i\xi$.

Для обсуждения областей сходимости рядов (42)–(43), необходимо найти асимптотику матричных элементов $\delta_{nl}^{(m)}(c_2, c_1)$ при больших значениях индекса l. В этом случае главный вклад в сумму (36) дают следующие слагаемые:

$$\begin{aligned} \delta_{nl}^{m}(c_2, c_1) &= N_{mn}^{-1}(c_2)\ N_{ml}^{-1}(c_1) \\ &\times \sum_{s=n}^{l} d_{s-m}^{mn}(c_2)\ d_{s-m}^{ml}(c_1) N_{ms}^{2}(0) \left[1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right]. \end{aligned} \tag{47}$$

Слагаемые данного ряда являются знакопеременными (см. (17)–(18)), при этом они сначала возрастают до номера $(r+m) = \frac{c_2^2}{c_1^2+c_2^2}\, l\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, а затем убывают. Оценка элемента $\delta_{nl}^{m}(c_2, c_1)$ определяется слагаемым с соответствующим номером. При сравнении двух матричных элементов в предположении, что они оцениваются слагаемым с одинаковым номером, получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{nl+2}^{m}(c_2, c_1)}{\delta_{nl}^{m}(c_2, c_1)} &= \frac{c_1^2}{4[l(l+1) - (m+r)(m+r+1)]}\ \left[1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right] \\ &= \frac{c_1^2 + c_2^2}{4l^2}\ \left[1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right]. \end{aligned} \tag{48}$$

С учетом асимптотик (23)–(24) для радиальных сфероидальных функций можно сделать вывод о том, что ряд (42) для волновых функций 1-го рода сходится всегда за исключением особых точек, а ряд (43) для волновых функций 2-го рода сходится при условии (см. также (26))

$$\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - f}\right)^2 < \frac{4(c_1^2 + c_2^2)}{c_1^2}. \tag{49}$$

Таблица 1. Вычисление волновых вытянутых сфероидальных функций с параметрами $m = 1$, $c_2 = 1.0$, $\xi_2 = 1.1$, $\eta_2 = 0$ при использовании соотношений (42)–(43) и волновых вытянутых сфероидальных функций с параметрами $m = 1$, $c_1 = 2.0$, $\xi_1 = 1.0259142$, $\eta_1 = 0$.

n	соотн. (43)	$R^{(1)}_{mn}(c_2,\xi_2)\bar{S}_{mn}(c_2,\eta_2)$	$R^{(2)}_{mn}(c_2,\xi_2)\bar{S}_{mn}(c_2,\eta_2)$
1	слева	1.2948694-01	-2.5926922+00
1	справа	1.2948694-01	-2.5926896+00
3	слева	3.4299837-03	-4.9885247+01
3	справа	3.4299837-03	-4.9885643+01
5	слева	2.4381878-05	-4.8853263+03
5	справа	2.4381878-05	-4.8852136+03
7	слева	8.0343568-08	-1.1204602+06
7	справа	8.0343568-08	-1.1204646+06
9	слева	1.5524193-10	-4.6332151+08
9	справа	1.5524193-10	-4.6347574+08
11	слева	1.9828416-13	-3.0137219+11
11	справа	1.9828416-13	-3.0087565+11

В заключение отметим, что расходящиеся ряды для волновых функций 2-го рода тем не менее можно использовать для численных расчетов, поскольку они сходятся "асимптотически" (более подробно см. [13, 14], а также табл.1–2).

Формулы (42)–(43) были использованы для численных расчетов с удвоенной точностью волновых сфероидальных функций в двух разных сфероидальных системах (см. табл.1–3). Отметим, что при вычислении вытянутых радиальных сфероидальных функций применялся алгоритм, изложенный в статье [15]. Количество слагаемых в суммах выбиралось равным $N = 40$. Расчет координат в сфероидальной системе с индексом 1 проводился с помощью формул (46), при этом параметр c_1 и параметры второй системы задавались заранее. Результаты расчетов показывают, что волновые функции 1-го рода вычисляются с очень высокой точностью. Точность расчетов волновых сфероидальных функций 2-го рода значительно меньше. Это связано с тем, что

Таблица 2. Вычисление волновых вытянутых сфероидальных функций с параметрами $m = 1$, $c_2 = 1.0$, $\xi_2 = 1.3$, $\eta_2 = 0$ при использовании соотношения (42)–(43) и волновых вытянутых сфероидальных функций с параметрами $m = 1$, $c_1 = 2.0$, $\xi_1 = 1.0828204$, $\eta_1 = 0$.

n	соотн. (43)	$R^{(1)}_{mn}(c_2,\xi_2)\bar{S}_{mn}(c_2,\eta_2)$	$R^{(2)}_{mn}(c_2,\xi_2)\bar{S}_{mn}(c_2,\eta_2)$
1	слева	2.2351149-01	-1.2728840+00
1	справа	2.2351149-01	-1.2728840+00
3	слева	8.9090450-03	-1.2389176+01
3	справа	8.9090450-03	-1.2389176+01
5	слева	1.0899585-04	-6.4205268+02
5	справа	1.0899585-04	-6.4205261+02
7	слева	6.5080972-07	-7.8726762+04
7	справа	6.5080972-07	-7.8726780+04
9	слева	2.3189024-09	-1.7426747+07
9	справа	2.3189024-09	-1.7426800+07
11	слева	5.4976226-12	-6.0688892+09
11	справа	5.4976226-12	-6.0686631+09

вычисления этих функций проводились вне области сходимости соответствующих рядов. Кроме того, в этих случаях наблюдается весьма существенное понижение точности из-за потери большого числа значащих цифр. Отметим, что в случаях, когда слева и справа в соотношениях (42)–(43) стоят либо вытянутые, либо сплюснутые волновые сфероидальные функции точность расчетов примерно одинакова. Если же справа и слева находятся разные виды сфероидальных функций, то точность несколько снижается (см. табл.3). В целом, можно констатировать, что результаты численных расчетов подтверждают теоретические выводы.

Таблица 3. Вычисление волновых сплюснутых сфероидальных функций с параметрами $m = 1$, $c_2 = 1.0$, $\xi_2 = 1.0$, $\eta_2 = 0$ при использовании соотношения (42)–(43) и волновых вытянутых сфероидальных функций с параметрами $m = 1$, $c_1 = 2.0$, $\xi_1 = 1.2247449$, $\eta_1 = 0$.

n	соотн.(43)	$R^{(1)}_{mn}(-ic_2, i\xi_2)\bar{S}_{mn}(-ic_2, \eta_2)$	$R^{(2)}_{mn}(-ic_2, i\xi_2)\bar{S}_{mn}(-ic_2, \eta_2)$
1	слева	3.3256780-01	-7.8528916-01
1	справа	3.3256780-01	-7.8527041-01
3	слева	1.2209301-02	-6.0887965+00
3	справа	1.2209301-02	-6.0865233+00
5	слева	1.7800805-04	-2.4250935+02
5	справа	1.7800805-04	-2.4191264+02
7	слева	1.3317250-06	-2.3180293+04
7	справа	1.3317250-06	-2.2931008+04
9	слева	6.0201820-09	-4.0049247+06
9	справа	6.0201820-09	-3.8629202+06

Литература

1. S. Asano, G. Yamamoto, *Light scattering by spheroidal particle.* — Appl. Opt., **14** (1975), 29–49.
2. N. V. Voshchinnikov, V. G. Farafonov, *Optical properties of spheroidal particles.* — Astrophys. Space Sci., **204** (1993), 19–86.
3. V. G. Farafonov, *A unified approach, using spheroidal functions, for solving the problem of light scattering by a axisymmetric particles.* — J. Math. Sci., **175** (2011), 698–723.
4. V. G. Farafonov, *Application of non-orthogonal bases in the theory of light scattering by spheroidal particles.* — In: *Light Scattering Reviews 8.* A. A. Kokhanovsky (ed), Berlin: Springer-Praxis, (2013), 189–266.
5. A. Vinokurov, V. Farafonov, V. Il'in, *Separation of variables method for multilayered nonspherical particles.* — JQSRT, **110** (2009), 1356–1368.
6. В. Г. Фарафонов, В. Б. Ильин, *О применимости сферического базиса для сфероидальных слоистых рассеивателей.* — Опт. и спектр., **115** (2013), 836-843.
7. T. Onaka, *Light scattering by spheroidal grains.* — Ann Tokyo Astron. Observ., **18** (1980), 1-54.
8. V. G. Farafonov, N. V. Voshchinnikov, V. V. Somsikov, *Light scattering by a core-mantle spheroidal particle.* — Appl. Opt., **35** (1996), 5412–5426.
9. I. Gurwich, M. Kleiman, N. Shiloah, A. Cohen, *Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure.* — Appl. Opt., **39** (2000), 470-477.

10. I. Gurwich, M. Kleiman, N. Shiloah, D. Oaknin, *Scattering by an arbitrary multilayered spheroid: theory and numerical results.* — JQSRT, **79-80** (2003) , 649-653.
11. V. Farafonov, N. Voshchinnikov, *Light scattering by a multilayered spheroidal particle.* — Appl. Opt., **51** (2012), 1586–1597.
12. Y. Han, H. Zhang H, X. Sun, *Scattering of shaped beam by an arbitrarily oriented spheroid having layers with non-confocal boundaries.* — Appl. Phys., **B 84** (2006), 485–492.
13. В. И. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.* М., Наука, (1976).
14. К. Фламмер *Таблицы волновых сфероидальных функций.* М., ВЦ АН СССР, (1962).
15. Н. В. Вощинников, В. Г. Фарафонов, *Вычисление вытянутых радиальных сфероидальных функций с использованием разложения Яффе.* — ЖВМиМФ, **43** (2003), 1353–1363.

Farafonov V. G., Voshchinnikov N. V., Semonova E. G. Some relations between the spheroidal and spherical wave functions.

We find new relations between the spheroidal and spherical wave functions as well as between the spheroidal functions related to different spheroidal coordinate systems. The systems should have a common origin of coordinate and a common symmetry axis of coordinate surfaces. The applicability ranges of the relations obtained are discussed. Numerical test calculations have demonstrated the high efficiency of the relations in particular those for wave functions including the radial functions of the first kind. As a particular case we consider the relations between the prolate and oblate spheroidal wave functions including the radial functions of the first and second kinds. These relations are necessary to solve the light scattering problem for nonconfocal layered spheroidal particles.

Государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
ул. Б. Морская, д. 67, 190000,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: far@aanet.ru

Поступило 23 сентября, 2014 г.