Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

А. М. Тагирджанов, А. П. Киселев

ГАУССОВСКИЙ ПАКЕТ НА ОСНОВЕ "КОМПЛЕКСНОГО ИСТОЧНИКА"

§1. Введение

Известны два простых подхода[1] к конструированию локализованных точных решений волнового уравнения

$$\Box u = 0, \tag{1}$$

где $\Box := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$, $c = const > 0$. Один основан на комплексифицированных модификациях решения Бейтмена, другой – на комплексификации классических сферических волн, см., соответственно, работы [2–6] и [7–11]. Последний подход часто связывают с *"комплексным источником"*. Оба подхода опираются на *относительно неискажающиеся решения волнового уравнения*[2], содержащие произвольную функцию – *форму волны* – от фиксированного скалярного аргумента – *фазы* (см. формулы (3) и (16) соответственно). Построение локализованного решения (волнового пучка или волнового пакета) сводится к удачному выбору формы волны.

Рассматривавшиеся в бейтменовском подходе формы волны дают решения, удовлетворяющие волновому уравнению во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Для "комплексного источника" фаза содержит квадратный корень, при любом выборе ветви которого решение имеет скачок на некоторой поверхности $\mathcal{S}$ с краем – *антенне.* Поэтому оно удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\Box u = \mathcal{F}, \ \mathrm{supp}\mathcal{F} = \mathcal{S}. \tag{2}$$

Разумеется, $\mathcal{S}$ зависит от выбора разреза, а обобщенная функция $\mathcal{F}$ — еще и от выбора ветви корня. Вычисление *распределения токов* $\mathcal{F}$

Ключевые слова: Комплексный источник, точные решения, локализованные волны, гауссовы пучки, гауссовы пакеты, волновое уравнение.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 14-01-00535-а.

[1]Развивается также подход, основанный на интегральных преобразованиях, см., например, [1].

[2]Этот классический термин [12] имеет локальный характер т. е. допускает выполнения уравнения (1) не при всех значениях x, y, z и t.

для разных разрезов изложено в [13–15] в гармоническом по времени случае, когда форма волны имеет вид $f(\theta_{\mathscr{C}}) = e^{ik\theta_{\mathscr{C}}}$. Там же изучена связь между геометрией разреза (и, соответственно, антенны) и асимптотическим поведением соответствующих решений.

Бейтменовские решения "приходят из бесконечности", а решения, связанные с "комплексным источником" – "возбуждаются распределениями токов на антеннах". При этом решения, связанные с "комплексным источником" тоже "приходят из бесконечности", если антенна некомпактна, и излучаются с нее, если она компактна (и оказывается, что волны излучаемые вперед и назад качественно различны). Для гармонического случая об этом подробно говорится в [13] и [15]. Локализованные решения – гауссовы пучки и гауссовы пакеты – построенные на основе этих двух относительно неискажающихся решений оказываются похожими по своей аналитической структуре, но различными.

Настоящая заметка посвящена гауссовскому пакету, возникающему в рамках теории "комплексного источника" по аналогии с известными осессимметрическим бейтменовским [3, 4]. Рассматриваются пакеты для двух наиболее интересных фиксаций квадратного корня, названных в [9], соответственно, *beam choice* и *source choice*. Эти пакеты сравниваются с построенными в [3, 4]. Мы не рассматриваем высших мод, которые вызывают интерес и в бейтменовской теории, и для комплексного источника, см., например, [5] и [16].

§2. Гауссовский пакет на бейтменовской основе

2.1. Относительно неискажающееся решение. Осесимметрическое комплексифицированное решение Бейтмена, отвечающее распространению вдоль оси z (точнее, его фундаментальная мода – высших мод, см., например, [5], мы не касаемся) имеет вид

$$u = \frac{1}{\beta - i\epsilon} f(\theta_{\mathscr{B}}). \tag{3}$$

Здесь

$$\theta_{\mathscr{B}} = \alpha + \frac{\rho^2}{\beta - i\epsilon},\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{4}$$

– осесимметрическая фаза Бейтмена, $\epsilon > 0$ – свободный параметр, форма волны $f(\cdot)$ – произвольная аналитическая функция одного переменного, а

$$\alpha = z - ct, \ \beta = z + ct \tag{5}$$

– характеристические переменные. Поскольку, очевидно, $\operatorname{Im} \theta_{\mathscr{B}} \geqslant 0$, требуется, чтобы функция $f(\theta_{\mathscr{B}})$ была аналитична в области, содержащей замкнутую верхнюю полуплоскость. Формы волны, отвечающие локализованным решениям рассматривались в ряде работ, см., например, обзор [5].

2.2. Специальная форма волны — простейший гауссовский пакет. Простейший гауссовский пакет отвечает форме волны [3,4]

$$f(\theta_{\mathscr{B}}) = \exp\left[2k\epsilon\left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\theta_{\mathscr{B}}}{\epsilon}}\right)\right], \tag{6}$$

где ветвь корня имеет положительную вещественную часть, а постоянная k, играющая роль волнового числа, положительна. Решение локализовано вблизи пика – точки $\{\rho = 0, \ \alpha = 0\}$. Условие

$$k\epsilon \gg 1, \tag{7}$$

обеспечивает сильную локализацию. В [4] обсуждались и другие формы волны, отвечающие гауссовским пакетам.

Асимптотическое поведение решения вблизи пика получается разложением фазы до членов квадратичных относительно расстояния до пика [3,4].

2.3. Асимптотика вблизи пика при умеренных расстояниях. Вблизи пика, где $\rho/\Delta_{\mathscr{B}\perp}$, $\alpha/\Delta_{\mathscr{B}\|}$, β/ϵ принимают значения порядка $O(1)$ при $k\epsilon \to +\infty$,

$$u \approx \frac{1}{\beta - i\epsilon} \exp\left(i\Psi - \frac{\rho^2}{\Delta^2_{\mathscr{B}\perp}} - \frac{\alpha^2}{\Delta^2_{\mathscr{B}\|}}\right), \tag{8}$$

$$\Psi = k\alpha + \frac{\beta\rho^2}{\epsilon\Delta^2_{\mathscr{B}\perp}}, \tag{9}$$

где

$$\Delta_{\mathscr{B}\|} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{k}}, \quad \Delta_{\mathscr{B}\perp} = \sqrt{\frac{\beta^2 + \epsilon^2}{k\epsilon}} \tag{10}$$

— продольная и поперечная ширины пакета, соответственно.

2.4. Дальнее поле. В [4] выписаны асимптотики функции (3), (6) на больших расстояниях при условиях $ct \gg \epsilon$, $ct \gg |A|$ и $ct \ll -\epsilon$, $ct \ll -|B|$, где

$$A = R - ct, \quad B = R + ct \tag{11}$$

и $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Мы их не приводим.

2.5. Асимптотика вблизи пика при больших расстояниях. При $k\epsilon \gg 1$ асимптотики дальнего поля упрощаются вблизи пика. Для $|A| \ll \epsilon$, $\chi \ll 1$, где

$$\chi = \operatorname{arctg}\frac{\rho}{z} \tag{12}$$

— азимутальный угол, асимптотика дальнего поля принимает вид

$$u \approx \frac{1}{2R}\exp\left(ikA - \frac{\chi^2}{\Delta_\chi^2} - \frac{A^2}{\Delta_{\mathscr{B}\|}^2}\right), \quad \chi \ll 1, \tag{13}$$

где

$$\Delta_\chi = \frac{2}{\sqrt{k\epsilon}} \tag{14}$$

— угловая ширина пакета. Для $|B| \ll \epsilon$, $\pi - \chi \ll 1$

$$u \approx \frac{1}{2R}\exp\left(-ikB - \frac{(\pi-\chi)^2}{\Delta_\chi^2} - \frac{B^2}{\Delta_{\mathscr{B}\|}^2}\right), \quad \pi - \chi \ll 1. \tag{15}$$

При условии (7), параксиальная формула (8) сшивается с дальним полем (13), (15) вблизи пика. Для гармонического случая это детально прослежено в [17].

§3. Относительно неискажающееся решение отвечающее “комплексному источнику”. Специальная форма волны.

Комплексифицированная нестационарная сферическая волна (мы не рассматриваем высших мод, в частности, мультиполей, см. например [16]) имеет вид

$$u = \frac{f(\theta_{\mathscr{C}})}{R_*}, \quad \theta_{\mathscr{C}} = R_* - ct + ia, \tag{16}$$

где

$$R_* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2} \tag{17}$$

— “расстояние до комплексного источника”, $a > 0$ — свободный параметр, форма волны $f(\cdot)$ — произвольная аналитическая функция одного переменного. Включение в $\theta_{\mathscr{C}}$ постоянной ia удобно для дальнейших рассмотрений.

Функция R_* имеет ветвление на окружности $\mathcal{C} = \{\rho = a,\ z = 0\}$. Несложно установить, что при любом выборе ветви этой функции комплексифицированная фаза $\theta_{\mathscr{C}}$ принимает значения в полосе

$$-\infty < \operatorname{Re}\theta_{\mathscr{C}} < +\infty,\ 0 \leqslant \operatorname{Im}\theta_{\mathscr{C}} \leqslant 2a. \tag{18}$$

Мы будем предполагать, что область аналитичности $f(\cdot)$ содержит эту полосу.

По аналогии с (6) рассмотрим специальную форму волны

$$f(\theta_{\mathscr{C}}) = \frac{1}{2}\exp\left[2ka\left(1-\sqrt{Q}\right)\right],\ Q = 1 - \frac{i\theta_{\mathscr{C}}}{a}, \tag{19}$$

где ветвь корня определяется условием $\operatorname{Re}\sqrt{Q} \geqslant 0$, а постоянная k положительна. В формулу (19) введен дополнительный по сравнению с (6) множитель $\frac{1}{2}$. Функция (16), (19) описывает гауссов пакет, сильно локализованный при условии

$$ka \gg 1. \tag{20}$$

§4. Гауссовский пакет в случае *beam choice*

В этом пункте ветвь квадратного корня R_* фиксируется условием [10, 13, 15]

$$\operatorname{Im} R_* \geqslant 0. \tag{21}$$

В результате антенна оказывается плоскостью с исключенным диском, $\mathcal{S} = \{\rho \geqslant a,\ z = 0\}$.

4.1. Распределение токов на антенне. Вычисление правой части уравнения (2) подробно описано в [15] для решения с гармонической временной зависимостью, $f(\theta_{\mathscr{C}}) = \exp(ik\theta_{\mathscr{C}})$. Для произвольной формы волны $f(\cdot)$ функция $\mathcal{F}$ находится совершенно аналогично. В результате получается

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1\delta'(z) + \mathcal{F}_2\delta(z), \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \frac{f(\theta_0^+) + f(-\theta_0^-)}{r_0} H(\rho - a),\\
\mathcal{F}_2 &= -ia\left(\frac{f'(\theta_0^+) - f'(-\theta_0^-)}{r_0^2} - \frac{f(\theta_0^+) + f(-\theta_0^-)}{r_0^3}\right) H(\rho - a),
\end{aligned} \tag{23}$$

где $\theta_0^{\pm} = r_0 \mp ct$ и $r_0 = R_*|_{z=+0} = \sqrt{\rho^2 - a^2}$. Здесь

$$H(\rho - a) = \begin{cases} 1, & \rho \geqslant a, \\ 0, & \rho < a \end{cases}$$

— функция Хевисайда. При $\rho = a$ функция $\mathcal{F}_2$ имеет неинтегрируемую особенность; соответствующая регуляризация подробно описана (для гармонического случая) в [15].

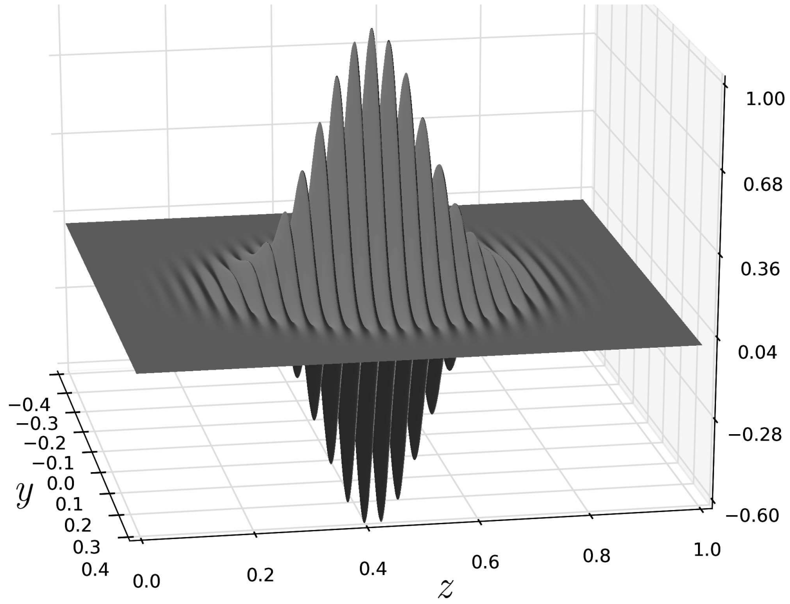

Рис. 1. $\mathrm{Re}\, u$ для $ka = 200$ и $x = 0$ при $t = a/2c$.

4.2. Асимптотика вблизи пика на умеренных расстояниях. Раскладывая R_* в параксиальной области

$$\rho \ll |z - ia|, \quad k\rho^4 \ll |z - ia|^3, \tag{24}$$

до квадратичных членов, получим

$$R_* \approx z - ia + \frac{\rho^2}{2(z - ia)}, \tag{25}$$

откуда

$$\theta_{\mathscr{C}} \approx \alpha + \frac{\rho^2}{2(z-ia)} = \alpha + \frac{z\rho^2}{2(z^2+a^2)} + \frac{ia\rho^2}{2(z^2+a^2)}. \tag{26}$$

Вблизи пика $\{\rho = 0,\ \alpha = 0\}$

$$\sqrt{Q} \approx 1 - \frac{i\theta_{\mathscr{C}}}{2a} + \frac{\theta_{\mathscr{C}}^2}{8a^2}. \tag{27}$$

Будем считать, что, как и в [4], $\rho/\Delta_{\mathscr{C}\perp}$, $\alpha/\Delta_{\mathscr{C}\parallel}$, z/a принимают значения порядка $O(1)$ при $ka \to +\infty$. Ограничиваясь квадратичными членами по ρ и α, получим

$$u \approx \frac{1}{2(z-ia)} \exp\left(i\Psi - \frac{\rho^2}{\Delta_{\mathscr{C}\perp}^2} - \frac{\alpha^2}{\Delta_{\mathscr{C}\parallel}^2}\right), \tag{28}$$

$$\Psi = k\alpha + \frac{\beta}{2a}\frac{\rho^2}{\Delta_{\mathscr{C}\perp}^2}, \tag{29}$$

где

$$\Delta_{\mathscr{C}\perp} = \sqrt{\frac{2(z^2+a^2)}{ka}} \text{ и } \Delta_{\mathscr{C}\parallel} = 2\sqrt{\frac{a}{k}} \tag{30}$$

— поперечная и продольная ширины пакета. Соответствующее поле изображено на Рис. 1.

Заметим, что если положить $a = \epsilon/2$, то выражение (28)–(29) совпадает при $\alpha = 0$ (и тогда $\beta = 2z$) с соответствующим результатом бейтменовской теории (8). Кроме того, (28)–(29), как и (8), согласуется с результатом лучевой теории, полученным в [18]. Однако, вдали от пика фазы (8) и (28)–(29) различны.

4.3. Дальнее поле. В дальнем поле функция (16), (21) имеет скачок на антенне $\mathcal{S}$ (т.е. при $z = 0$ и, соответственно, $\chi = \pi/2$, см. (12)). Поэтому мы будем рассматривать поле при $z > 0$ и $z < 0$ по отдельности.

Для $z > 0$, что соответствует значениям $0 \leqslant \chi < \pi/2$, при $R \gg a$

$$R_* = \sqrt{R^2 - 2iaz - a^2} \approx R - ia\cos\chi, \tag{31}$$

откуда

$$\theta_{\mathscr{C}} \approx A + ia(1-\cos\chi) = A + 2ia\sin^2\frac{\chi}{2}. \tag{32}$$

В дальнем поле, т.е. при $R \gg ka^2$, вблизи фронта, где $|A| \ll a$, получим

$$u \approx \frac{1}{2R} \exp\left(ik\frac{A}{\Lambda_+} - 2ka(\Lambda_+ - 1) - \frac{1}{\Lambda_+^3}\frac{A^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\|}}\right), \tag{33}$$

где $\Lambda_+ = \sqrt{1 + 2\sin^2(\chi/2)}$.

Для $z < 0$, что соответствует значениям $\pi/2 < \chi \leqslant \pi$,

$$R_* = \sqrt{R^2 - 2iaz - a^2} \approx -(R - ia\cos\chi), \tag{34}$$

откуда

$$\theta_{\mathscr{C}} \approx -B + ia(1 + \cos\chi) = -B + 2ia\cos^2\frac{\chi}{2}, \tag{35}$$

и вблизи фронта, где $|B| \ll a$,

$$u \approx -\frac{1}{2R} \exp\left(-ik\frac{B}{\Lambda_-} - 2ka(\Lambda_- - 1) - \frac{1}{\Lambda_-^3}\frac{B^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\|}}\right), \tag{36}$$

где $\Lambda_- = \sqrt{1 + 2\cos^2(\chi/2)}$.

В формулах (33) и (36) ka не предполагается большим.

4.4. Асимптотика вблизи пика на больших расстояниях. При $ka \gg 1$ выражение (33) упрощается при малых χ и A до

$$u \approx \frac{1}{2R} \exp\left(ikA - \frac{\chi^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\chi}} - \frac{A^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\|}}\right), \quad |\chi| \ll 1, \tag{37}$$

где

$$\Delta_{\mathscr{C}\chi} = \sqrt{\frac{2}{ka}} \tag{38}$$

— угловая ширина пакета. Аналогично, (36) упрощается до

$$u \approx -\frac{1}{2R} \exp\left(-ikB - \frac{(\pi - \chi)^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\chi}} - \frac{B^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\|}}\right), \quad |\pi - \chi| \ll 1. \tag{39}$$

Дальнее поле вблизи пика изображено на Рис. 2.

Как нетрудно видеть из (12), (30), (38), в параксиальной области дальнее поле и поле вблизи пика (28) сшиваются.

Заметим, что если положить $a = \epsilon/2$, то выражения (37)–(39) совпадают с асимптотиками бейтменовского решения (13)–(15).

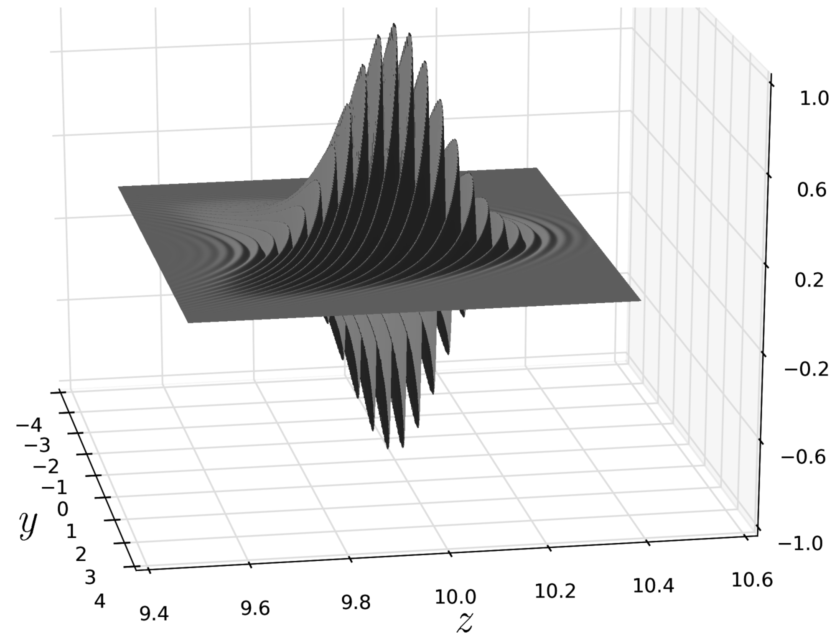

Рис. 2. $\operatorname{Re} u$ для $ka = 200$ и $x = 0$ при $t = 10a/c$.

§5. Гауссовский пакет в случае *source choice*

В этом пункте ветвь квадратного корня R_* фиксируется условием [10,13,15]

$$\operatorname{Re} R_* \geqslant 0. \tag{40}$$

Антенна оказывается диском $\mathcal{S} = \{\rho \leqslant a,\ z = 0\}$, при подходящем выборе формы волны излучающим преимущественно в направлении положительных z и слабо излучающим в противоположном направлении. Поле испытывает на диске скачок.

5.1. Распределение токов на антенне. Выражение для правой части (2) получается из (22)–(23) заменой r_0 на $-ir_1$, где $r_1 = \sqrt{a^2 - \rho^2} \geqslant 0$, и $H(\rho - a)$ на $H(a - \rho)$.

5.2. Параксиальная асимптотика вблизи пика на умеренных расстояниях. В параксиальной области поле имеет скачок при $z = 0$.

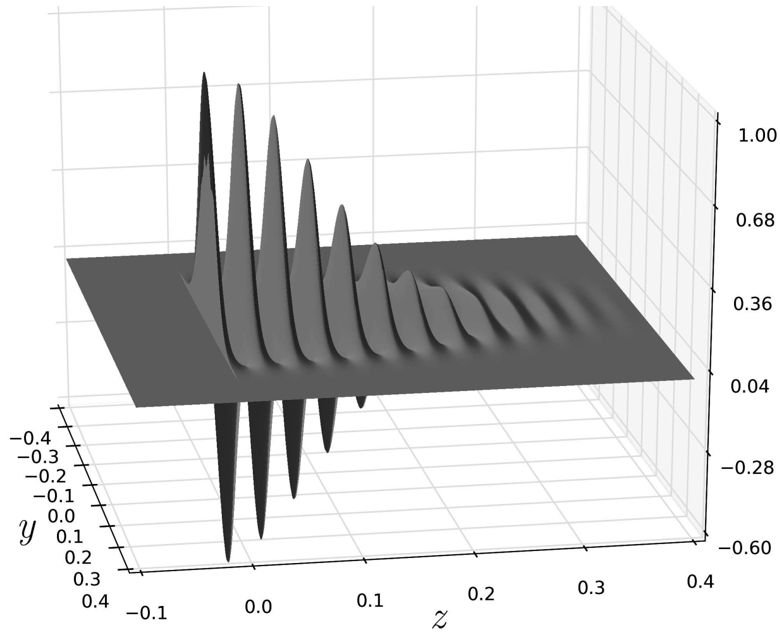

Рис. 3. $\operatorname{Re} u$ при $x = 0$ в случае *source choice* при $ka = 200$, $t = 0$. При $z = 0$ виден скачок поля на антенне.

При $z > 0$ справедливо разложение (25), и, следовательно, поведение поля вблизи пика описывается формулами (28)–(29), аналогичными возникающим в бейтменовском случае (см. (8)).

При $z < 0$

$$R_* \approx -(z - ia) - \frac{\rho^2}{2(z - ia)}. \tag{41}$$

Последнее слагаемое в правой части (41) имеет другой знак, чем в (25), и это кардинально меняет характер поля. Фаза теперь принимает вид

$$\theta_{\mathscr{C}} = 2ia - T, \tag{42}$$

где

$$T = -(R_* - \tau - ia) \approx \beta + \frac{\rho^2}{2(z - ia)} = \beta + \frac{z\rho^2}{2(z^2 + a^2)} + \frac{ia\rho^2}{2(z^2 + a^2)} \tag{43}$$

обращается в нуль в бегущей точке $\{\rho = 0,\ \beta = 0\}$. Перепишем $\sqrt{Q}$ в виде

$$\sqrt{Q} = \sqrt{1 - \frac{i\theta_{\mathscr{C}}}{a}} = \sqrt{3 + \frac{iT}{a}} = \sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{iT}{3a}}. \tag{44}$$

Разложение $\sqrt{Q}$ по степеням T до квадратичных членов дает

$$\sqrt{Q} \approx \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{iT}{2a} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{T^2}{8a^2}, \tag{45}$$

откуда, ограничиваясь квадратичными членами по β и ρ, получим

$$u \approx -\frac{\exp(-2ka(\sqrt{3}-1))}{2(z-ia)}\exp\left(i\Psi + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\rho^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\perp}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\beta^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\parallel}}\right), \tag{46}$$

где

$$\Psi = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(k\beta + \frac{\alpha}{2a}\frac{\rho^2}{\Delta^2_{\mathscr{C}\perp}}\right). \tag{47}$$

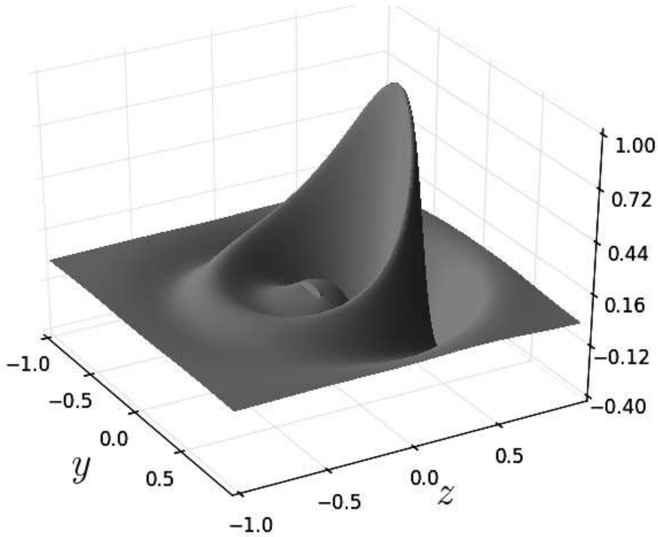

Рис. 4. $\mathrm{Re}\, u$ при $x = 0$ в случае *source choice* при $ka = 2$, $t = 5a/c$. Для этого не слишком большого значения ka хорошо видно поле, описываемое (46).

Выражение (46) описывает поле, бегущее против оси z. Оно гауссовски убывает в продольном направлении, но растет в поперечном. При выполнении (20) поле (46) экспоненциально мало относительно большого параметра ka.

5.3. Дальнее поле. В дальнем поле функция R_* непрерывна при $z = 0$, и для всех $0 \leqslant \chi \leqslant \pi$ выполняется (31). Таким образом, асимптотика дальнего поля всюду описывается выражением (33). Выражение (33) принимает максимальное значение при $\chi = 0$, и с ростом χ монотонно убывает.

Мы отметили, что (33) сшивается с (28)–(29) для $\chi \ll 1$. Нетрудно убедиться, что (33) сшивается и с (46) для $\pi - \chi \ll 1$.

§6. Заключение

Вблизи пика поле (28)–(29) асимптотически совпадает с (8) и получается оттуда заменой β на $2z$ и ϵ на $2a$. Эти формулы прекрасно согласуются с результатами лучевого метода [18] (сравнению бейтменовских формул с [18] посвящена заметка [19]). Поле, излучаемое антенной в сторону отрицательных z для случая *source choice* на ранее известные поля не похоже.

Рассмотрение других, чем (19) форм волны, из числа предложенных в [4] для моделирования гауссовских пакетов, по-видимому, не даст неожиданных результатов.

Авторы благодарят Ю. И. Бобровницкого, А. В. Попова и П. Саари за полезные обсуждения.

Литература

1. I. M. Besieris, A. M. Shaarawi, A. M. Attiya, *Bateman conformal transformations within the framework of the bidirectional spectral representation.* — Progress in Electromagnetics Research, **48** (2004), 201–231.
2. P. Hillion, *Generalized phases and nondispersive waves.* – Acta Appl. Math., **30**, No. 1 (1993), 35–45.
3. А. П. Киселев, М. В. Перель, *Гауссовские волновые пакеты.* — Оптика и Спектроскопия, **86**, No. 3 (1999), 257–259.

4. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys., **41**, No. 4 (2000), 1934–1955.
5. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравненя (Обзор).* — Оптика и Спектроскопия, **102**, No. 4 (2007), 661–681.
6. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, *Nonparaxial wave beams and packets with general astigmatism.* — Phys. Rev. A **85**, No. 4, (2012), pap. 043835.
7. А. А. Изместьев, *Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве.* — Изв. вузов. Радиофизика, **13**, No. 9 (1970), 1380–1388.
8. G. A. Deschamps, *Gaussian beam as a bundle of complex rays.* — Electron. Lett., **7**, No. 23 (1971), 684–685.
9. L. B. Felsen, *Complex-source-point solutions of the field equations and their relation to the propagation and scattering of Gaussian beams.* — Symposia Matematica, Istituto Nazionale di Alta Matematica, **18** (1976), Academic Press, London, 40–56.
10. E. Heyman and L. B. Felsen, *Complex-source pulsed-beam fields.* — J. Opt. Soc. Amer. A, **6**, No. 6 (1989), 806–817.
11. E. Heyman, *Complex source pulsed beam representation of transient radiation.* — Wave Motion **11** No. 4 (1989), 337–349.
12. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, ГТТИ, М.–Л., 1945.
13. A. M. Tagirdzhanov, A. S. Blagovestchenskii and A. P. Kiselev, *"Complex source" wavefields: sources in real space.* — J. Phys. A: Math. Theor., **44**, No. 42 (2011), pap. 425203.
14. А. М. Тагирджанов, *"Комплексный источник" в двумерном пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **409** (2012), 176–186.
15. А. М. Тагирджанов, А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, *Гармонические по времени поля "комплексных источников" и их источники в вещественном пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **422** (2014), 131–149.
16. S. Orlov, P. Banzer, *Vectorial complex-source vortex beams.* — Phys. Rev. A, **90**, No. 2 (2014), pap. 023832.
17. В. Э. Грикуров, А. П. Киселев, *Гауссовы пучки на больших дальностях,* — Изв. вузов. Радиофизика, **29**, No. 3 (1986), 307–313.
18. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и "квазифотоны".* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **117** (1981), 5–11.
19. А. П. Киселев, М. В. Перель, *О природе "квазифотонов".* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **239** (1997), 117–122.

Tagirdzhanov A. M., Kiselev A. P. Gaussian wave packet based on the "complex source".

The paper concerns a simple solution of the linear wave equation with 3 spacial variables which describes a wave packet exponentially localized

near a point moving with the light speed. The construction is based on the "complex source".

С.-Петербургский
государственный университет,
Ульяновская ул. д. 3,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: aztagr@gmail.com
E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
РАН, Фонтанка 27,
С.-Петербург 191023;
Институт
проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В.О., 61,
С.-Петербург 199178,
Россия
E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru

Поступило 30 октября 2014 г.