Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

А. Л. Пестов

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§1. Введение

Динамическая система. Изучаемая система описывается начально-краевой задачей

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0 \qquad 0 < x < h,\ 0 < t < T \tag{1.1}$$

$$u\big|_{t<\tau_1(x)} = 0 \tag{1.2}$$

$$u|_{x=0} = f \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.3}$$

Здесь ρ, γ, A, B суть гладкие [1] $2{\times}2$-матрицы-функции от $x \in [0,h]$, удовлетворяющие условиям

1. *положительности*: $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, $\rho_i > 0$ и $\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$, $\gamma_i > 0$,

2. *отделенности скоростей*: $0 < \sqrt{\frac{\gamma_2}{\rho_2}} < \sqrt{\frac{\gamma_1}{\rho_1}}$,

3. *самосопряженности*: $A^{\mathrm{tr}} = -A$, $A_x = B - B^{\mathrm{tr}}$ (tr – транспонирование);

$\tau_i(x) := \int\limits_0^x \sqrt{\frac{\rho_i(s)}{\gamma_i(s)}}ds$ – функции, называемые *эйконалами*; числовые параметры h и T связаны соотношением $T = \tau_1(h)$; $f = f(t)$ – *граничное управление* и $u = u^f(x,t)$ – решение ($\mathbb{R}^2$-значные функции). Эта задача гиперболическая и приведенная постановка является корректной.

В приложениях система (1.1)–(1.3) отвечает одномерным моделям, в которых имеются два типа волновых мод, распространяющихся с разными скоростями и взаимодействующих друг с другом. Один из примеров – балка Тимошенко.

Ключевые слова: двухскоростная динамическая система с граничным управлением, обратная задача.

[1] всюду в работе "гладкие" означает C^∞-гладкие

Оператор реакции. Системе (1.1)–(1.3) сопоставляются стандартные атрибуты теории управления – пространства и операторы. Один из них – *расширенный оператор реакции* R^{2T}, реализующий соответствие "вход–выход". Он вводится через задачу [2]

$$
\begin{array}{ll}
\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + A u_x + B u = 0 & 0 < x < h,\ 0 < t < 2T - \tau_1(x) \\
u\big|_{t<\tau_1(x)} = 0 & \\
u|_{x=0} = f & 0 \leqslant t \leqslant 2T
\end{array}
$$

соотношением $R^{2T} : f \mapsto \gamma(0) u_x^f\big|_{x=0}$ и имеет представление

$$
(R^{2T} f)(t) = -\nu f_t(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s)\, f(s)\, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T \tag{1.4}
$$

с постоянными матрицами $\nu = \mathrm{diag}\{\nu_1, \nu_2\}$, ω и гладкой матрицей-функцией $r(t) = r^{\mathrm{tr}}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2T$, называемой функцией отклика. В динамических обратных задачах оператор R^{2T} играет роль данных.

Основной результат. Оператор R^{2T} определяется коэффициентами ρ, γ, A, B. В обратных задачах для системы (1.1)–(1.3) ставится вопрос о том, в какой мере оператор реакции определяет ее коэффициенты. Набор ρ, γ, A, B с условиями **1.–3.** описывается *восемью* независимыми скалярными функциями $\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, a_{12}, b_{11}, b_{12}, b_{22}$, в то время как оператор R^{2T} задается набором ν, ω, r, содержащим *три* функции r_{11}, r_{12}, r_{22} и шесть чисел – элементов матриц ν и ω. В этой ситуации ожидать единственности решения обратной задачи, т.е. однозначного определения всех коэффициентов, не приходится и встает вопрос о ее разрешимости. В работах [1, 3] установлены необходимые и достаточные условия на оператор вида (1.4) (набор ν, ω, r), гарантирующие существование системы (1.1)–(1.3) с предписанными данными. Центральным условием, гарантирующим существование системы

[2] она является естественным расширением задачи (1.1)–(1.3), существующим и корректным в силу гиперболичности последней

(1.1)–(1.3), оказывается условие положительной определенности оператора $\mathcal{C}^T$, действующего в пространстве $L_2\left([0,T];\mathbb{R}^2\right)$ по правилу

$$\left(\mathcal{C}^T f\right)(t) := \nu f(t) + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2}\int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\,d\eta\right] f(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T \qquad (1.5)$$

Доказательство достаточности в [3] конструктивно: предложена процедура, восстанавливающая систему (1.1)–(1.3) по ν, ω, r. В процедуре предусмотрен выбор свободных параметров, за счет чего восстанавливаются *все* системы этого вида, обладающие заданными ν, ω, r. Подлежащими определению параметрами являются элементы матриц A и $B : a_{12}, b_{11}, b_{12}, b_{22}$. В работе [3] получено соотношение, из которого матрицы A и B определяются однозначно, однако явные представления для A и B не приводятся.

В первой части работы выводятся представления для матриц A и B, которые используются при их восстановлении по оператору реакции. Во второй части строится динамическая система вида (1.1)–(1.3) с ненулевыми матрицами A и B, обладающая оператором реакции вида

$$(R^{2T} f)(t) = -f_t(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T. \qquad (1.6)$$

Заметим, что таким же оператором реакции обладает система вида (1.1)–(1.3) с $A = B = 0$ при соответствующем выборе констант: $\rho_i(0), \rho_i'(0), \gamma_i(0), \gamma_i'(0)$, $i = 1, 2$. В такой системе распространяются две невзаимодействующие между собой волны, эволюция которых описывается двумя независимыми уравнениями:

$$\rho_i (u_i)_{tt} - (\gamma_i (u_i)_x)_x = 0, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, для внешнего наблюдателя, обладающего оператором реакции вида (1.6) для двухскоростной системы (1.1)–(1.3), система с нулевыми матрицами A,B и построенная во второй части работы система с ненулевыми матрицами A,B - неразличимы.

Благодарности. Автор признателен М. И. Белишеву за руководство работой и помощь в подготовке этой статьи.

§2. Двухскоростная система

2.1. Начально-краевая задача.

Постановка. Рассматривается задача

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0\,, \qquad x > 0,\, 0 < t < T \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \qquad x \geqslant 0 \tag{2.2}$$

$$u|_{x=0} = f \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.3}$$

в которой ρ, γ, A, B суть гладкие вещественные 2×2–матрицы-функции от $x \geqslant 0$; $T < \infty$ – финальный момент; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1(x), \rho_2(x)\}$ и $\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1(x), \gamma_2(x)\}$ – матрицы с положительными элементами; $f = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ – *граничное управление*. Решение $u = u^f(x,t) = \begin{pmatrix} u_1^f(x,t) \\ u_2^f(x,t) \end{pmatrix}$ описывает *волну*, инициированную управлением f и распространяющуюся вдоль полуоси $x \geqslant 0$. Функции $c_i := \sqrt{\frac{\gamma_i(x)}{\rho_i(x)}}$ называются *скоростями*.

Всюду в работе предполагаются выполненными условия

$$0 < c_2(x) < c_1(x)\,, \;\; x \geqslant 0; \qquad \int\limits_0^\infty \frac{dx}{c_1(x)} = \infty \tag{2.4}$$

и соотношения

$$A^{\mathrm{tr}}(x) = -A(x)\,, \quad A_x(x) = B(x) - B^{\mathrm{tr}}(x)\,, \quad x \geqslant 0 \tag{2.5}$$

(tr – транспонирование), равносильные равенствам

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -a(x) \\ a(x) & 0 \end{pmatrix}, \;\; b_{21}(x) - b_{12}(x) = a_x(x)\,, \quad x \geqslant 0.$$

Расходимость интеграла в (2.4) обеспечивает корректность задачи (2.1)–(2.3)при любом $T > 0$. В силу (2.5) оператор $y \mapsto (\gamma y_x)_x - Ay_x - By$ самосопряжен по Лагранжу, т.е. симметричен в $L_2\left((0,\infty);\mathbb{R}^2\right)$ на функциях с компактным носителем.

Функции

$$\tau_i(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{c_i(s)}$$

называются *эйконалами*. Это монотонные, строго возрастающие функции. Согласно (2.4) имеем: $\tau_1(x) < \tau_2(x)$, $x \geqslant 0$; $\tau_i(\infty) = \infty$. Функции $x_i(\tau)$, *обратные к эйконалам*, также суть строго возрастающие и $x_1(\tau) > x_2(\tau)$ при $\tau \geqslant 0$.

Обобщенные решения. Для дальнейшего удобно принять

Соглашение 1. (a) *Все функции, зависящие от времени, предполагаются продолженными нулем при* $t < 0$.

(b) *Пусть* $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ *есть прямоугольник или полуполоса со сторонами, параллельными координатным осям. Функцию* φ *мы называем гладкой в* Π *вне кривых* $S_1, \dots, S_p \subset \Pi$, *если она является гладкой в каждой из компонент связности множества* $\Pi \setminus \cup_{i=1}^{p} S_i$ *и продолжается до гладкой функции в окрестности этой компоненты.*

Обозначим $\theta := \operatorname{diag}\{\theta_1, \theta_2\}$, $\theta_i(x) := \left(\frac{\rho_i(0)\gamma_i(0)}{\rho_i(x)\gamma_i(x)}\right)^{\frac{1}{4}}$. Введем линеал

$$\mathcal{M}^T := \left\{f \in C^\infty\left([0,T]; \mathbb{R}^2\right) \mid \operatorname{supp} f \subset (0,T]\right\} \tag{2.6}$$

гладких управлений, аннулирующихся вблизи $t = 0$. О решении задачи (2.1)–(2.3) известно следующее.

Предложение 1. *Для управлений* $f \in \mathcal{M}^T$ *задача* (2.1)–(2.3) *имеет единственное классическое гладкое решение* $u^f(x,t)$. *Для него справедливо представление*

$$u^f(x,t) = \theta(x)\begin{pmatrix} f_1(t - \tau_1(x)) \\ f_2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int\limits_0^{t-\tau_1(x)} \widetilde{w}(x, t-s)\, f(s)\, ds \tag{2.7}$$

с матричным ядром $\widetilde{w}(x,t)$, *гладким в* $[0,\infty) \times [0,T]$ *вне характеристик* $t = \tau_i(x)$ *уравнения* (2.1) *и таким, что* $\widetilde{w}|_{t<\tau_1(x)} = 0$, $\widetilde{w}|_{x=0} = 0$.

Для управлений $f \in L_2\left([0,T]; \mathbb{R}^2\right)$ (обобщенное) решение задачи *определяется* как правая часть представления (2.7). Следствием такого определения являются соотношение

$$u^f\big|_{t<\tau_1(x)} = 0 \tag{2.8}$$

и локальный характер зависимости решения от коэффициентов: значения u^f при $0 \leqslant t \leqslant T$ определяются значениями $\rho, \gamma\, A, B$ при $0 \leqslant x \leqslant x_1(T)$ (не зависят от поведения коэффициентов при $x > x_1(T)$).

Эта локальность (причинность) является следствием гиперболичности уравнения (2.1) и отвечает конечности скорости распространения волн.

Из независимости коэффициентов уравнения (2.1) от времени следует известное соотношение

$$u^f(\cdot\,,s)\;=\;u^{\mathcal{T}^T_{T-s}f}(\cdot\,,T)\,,\qquad 0\leqslant s\leqslant T\,,\tag{2.9}$$

где $\mathcal{T}^T_{T-s}$ – действующий в $L_2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^2\right)$ оператор задержки:

$$(\mathcal{T}^T_{T-s}f)(t)\;:=\;f\left(t-(T-s)\right)$$

(запись использует Соглашение 1a).

2.2. Система $\mathfrak{s}^T$. С учетом отмеченных выше свойств решения u^f (см.(2.8)), задачу (2.1)–(2.3) можно записать в виде

$$\rho u_{tt}-(\gamma u_x)_x+Au_x+Bu=0\qquad 0<x<x_1(T),\;0<t<T\tag{2.10}$$

$$u|_{t<\tau_1(x)}\;=\;0\tag{2.11}$$

$$u|_{x=0}=f\,,\qquad 0\leqslant t\leqslant T\,.\tag{2.12}$$

Такая запись оптимальна в том смысле, что она не содержит значений коэффициентов $\{\rho,\gamma,A,B\}\big|_{x>x_1(T)}$, от которых решение не зависит.

Далее задача (2.10)–(2.12) рассматривается как *динамическая система.* Она обозначается символом $\mathfrak{s}^T$ и наделяется стандартными атрибутами теории управления.

Пространства и подпространства. Гильбертово пространство управлений $\mathcal{F}^T:=L_2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^2\right)$ со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathcal{F}^T}\;:=\;\int\limits_0^T f(t)\cdot g(t)\,dt\tag{2.13}$$

("$\cdot$" – стандартное произведение в $\mathbb{R}^2$) называется *внешним пространством* системы $\mathfrak{s}^T$. Оно содержит расширяющуюся (с ростом параметра ξ) цепочку подпространств

$$\mathcal{F}^{T,\xi}:=\left\{f\in\mathcal{F}^T\mid\operatorname{supp}f\subset[T-\xi,T]\right\}=\mathcal{T}^T_{T-\xi}\mathcal{F}^T\,,\qquad 0\leqslant\xi\leqslant T\,,$$

образованных запаздывающими управлениями [3]. Запаздывание управления ведет к запаздыванию волны: из (2.7) легко следует соотношение

$$u^f\big|_{t<\tau_1(x)+T-\xi} = 0\,, \qquad f\in\mathcal{F}^{T,\xi}\,,$$

уточняющее (2.8).

Пространство $\mathcal{H}^{x_1(T)} := L_{2,\,\rho}\left([0,x_1(T)]\,;\mathbb{R}^2\right)$ со скалярным произведением

$$(y,v)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} := \int\limits_0^{x_1(T)} [\rho(x)\,y(x)]\cdot v(x)\,dx \tag{2.14}$$

называется *внешним.* Как видно из (2.8), при всех $t\in[0,T]$ волны $u^f(\cdot,t)$ суть его элементы. Внешнее пространство содержит две цепочки подпространств

$$\mathcal{H}^{x_i(\xi)} := \left\{y\in\mathcal{H}^{x_1(T)}\mid \operatorname{supp} y\subset[0,x_i(\xi)]\right\}\,, \qquad 0\leqslant\xi\leqslant T, \quad i=1,2\,.$$

Оператор управления. По терминологии теории управления волна $u^f(\cdot,t)$ есть состояние системы $\mathfrak{s}^T$ в момент t, $\{u^t(\cdot,t)\mid 0\leqslant t\leqslant T\}$ – ее траектория. Соответствие "вход$\mapsto$состояние" реализуется *оператором управления* $W^T:\mathcal{F}^T\to\mathcal{H}^{x_1(T)}$,

$$W^T f := u^f(\cdot,T)\,.$$

Из (2.7) имеем представление

$$\left(W^T f\right)(x) = \theta(x)\begin{pmatrix} f_1\left(T-\tau_1\left(x\right)\right)\\ f_2\left(T-\tau_2\left(x\right)\right)\end{pmatrix} + \int\limits_0^{T-\tau_1(x)} w^T\left(x,t\right)f\left(t\right)\,dt, \quad x\geqslant 0,$$

с матричным ядром $w^T\left(x,t\right) := \widetilde{w}\left(x,T-t\right)$, гладким в $[0,x_1(T)]\times[0,T]$ вне характеристик $t=T-\tau_i\left(x\right)$ и таким, что $w^T|_{t>T-\tau_1(x)}=0$, $w^T|_{x=0}=0$. Из представления очевидно, что оператор управления ограничен. Отметим соотношения

$$W^T\mathcal{T}^T_{T-\xi}f = u^f(\cdot,\xi), \quad W^T\mathcal{F}^{T,\xi}\subset\mathcal{H}^{x_1(\xi)}\,, \qquad 0\leqslant\xi\leqslant T\,,$$

являющиеся формой записи (2.9) и (2.8). На управлениях, которым отвечают гладкие решения, имеем:

$$u^{f_{tt}} = u^f_{tt} \overset{(2.1)}{=} Lu^f$$

[3] $T-\xi$ есть запаздывание, ξ – время действия управления

где

$$Ly := \rho^{-1}\left((\gamma y_x)_x - Ay_x - By\right).$$

Отсюда следует соотношение

$$LW^T \;=\; W^T\,\frac{d^2}{dt^2}\;, \tag{2.15}$$

являющееся формой записи уравнения (2.1).

Оператор реакции. Соответствие "вход$\mapsto$выход" в системе $\mathfrak{s}^T$ описывается *оператором реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \mathcal{M}^T$,

$$\left(R^T f\right)(t) \;:=\; \gamma(0)\,u_x^f(0,t)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,.$$

Поскольку в действии оператора реакции участвует дифференцирование, он оказывается неограниченным.

Предложение 2. *Справедливо представление*

$$\left(R^T f\right)(t) = -\nu f_t(t) + \omega f\,(t) + \int\limits_0^t r(t-s)\,f(s)\,ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.16}$$

с постоянными матрицами

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \nu_i := c_i(0)\rho_i(0)\,,$$

$$\omega := \begin{pmatrix} -\frac{c_1(0)}{2}\,(c_1\rho_1)_x\big|_{x=0} & -\frac{c_1(0)}{c_1(0)+c_2(0)}\,a\,(0) \\ \\ \frac{c_2(0)}{c_1(0)+c_2(0)}\,a\,(0) & -\frac{c_2(0)}{2}\,(c_2\rho_2)_x\big|_{x=0} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

($a(x) = A_{21}(x)$) и гладкой матрицей-функцией

$$r\,(t) \;:=\; \gamma\,(0)\,\widetilde{w}_x\,(0,t)\;.$$

При этом выполняются соотношения

$$\nu_1,\,\nu_2\; > 0\,; \quad \omega_{12} = -\alpha\omega_{21}\,, \quad \alpha > 1\,; \quad r(t) = r(t)^{\rm tr}$$

и

$$\alpha = \frac{c_1\,(0)}{c_2\,(0)}, \quad \omega_{21} - \omega_{12} = a\,(0)\,. \tag{2.18}$$

Представление (2.16) устанавливается дифференцированием по x в (2.7) (см. [2]). Симметричность матричной *функции отклика* $r(t)$ выводится из условий самосопряженности (2.5).

Оператор R^{2T}. С системой $\mathfrak{s}^T$ связан еще один оператор, который вводится через начально-краевую задачу

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + A u_x + B u = 0\,, \qquad (x,t) \in \Delta^{2T} \tag{2.19}$$

$$u\big|_{t<\tau_1(x)} = 0 \tag{2.20}$$

$$u|_{x=0} = f\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T\,, \tag{2.21}$$

где $\Delta^{2T} = \{(x,t) \mid 0 < x < x_1(T),\ 0 < t < 2T - \tau_1(x)\}$. Ее корректность устанавливается стандартной техникой – сведением к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. При управлениях $f \in \mathcal{M}^{2T}$ (см. (2.6)) решение $u = u^f(x,t)$ оказывается классическим и гладким.

О задаче (2.19)–(2.21) можно говорить как о расширенной версии задачи (2.10)–(2.12), существующей в силу гиперболичности последней. Если управление f из (2.21) таково, что $f|_{[0,T]}$ совпадает с f из (2.3), то решения этих задач совпадают при временах $0 \leqslant t \leqslant T$. Важно отметить, что решения обеих задач вполне определяются поведением коэффициентов ρ, γ, A, B при $0 \leqslant x \leqslant x_1(T)$ (не зависят от их поведения при $x > x_1(T)$).

Задаче (2.19)–(2.21) сопоставим оператор $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$, $\operatorname{Dom} R^{2T} = \mathcal{M}^{2T}$,

$$\left(R^{2T} f\right)(t) := \gamma(0)\, u_x^f(0,t)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T\,,$$

который называется *расширенным* оператором реакции системы $\mathfrak{s}^T$.

Предложение 3. *Оператор* R^{2T} *определяется коэффициентами* $\{\rho, \gamma, A, B\}\big|_{0 \leqslant x \leqslant x_1(T)}$ *и имеет представление*

$$\left(R^{2T} f\right)(t) = -\nu f_t(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s)\, f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T \tag{2.22}$$

с матрицами ν, ω *из* (2.17) *и гладкой симметрической матрицей-функцией* $r(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2T$. *При этом* $r\big|_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *совпадает с функцией* r *из* (2.16).

Нетрудно заметить, что оператор R^{2T} совпадает с (нерасширенным) оператором реакции системы $\mathfrak{s}^{2T}$ с финальным моментом $t = 2T$[4]. Поэтому представление (2.22) не требует отдельного вывода: оно

[4]по этой причине мы не различаем их обозначениями

просто воспроизводит (2.16) с другим финальным моментом. Совпадение этих операторов есть следствие гиперболичности (конечности областей влияния).

Отмеченный в Предложении 3 характер зависимости от коэффициентов делает расширенный оператор атрибутом двухскоростной динамической системы *с финальным моментом* $t = T$: как и остальные элементы системы $\mathfrak{s}^T$, он определяется матричными коэффициентами $\{\rho, \gamma, A, B\}\big|_{0 \leqslant x \leqslant x_1(T)}$.

Как видно из (2.22), задание оператора R^{2T} равносильно заданию постоянных матриц ν, ω и симметрической функции $r|_{0 \leqslant t \leqslant 2T}$.

Связывающий оператор. Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$C^T := \left(W^T\right)^* W^T$$

называется *связывающим*. Определяющее его соотношение

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(W^T f, W^T g\right)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} = \left(u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T)\right)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}}$$

связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Оператор C^T ограничен (по ограниченности W^T), самосопряжен и неотрицателен. Более того, для него справедливо представление

$$\left(C^T f\right)(t) \;=\; \nu f(t) \;+\; \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta\right] f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\,.$$

Медленные волны. Несмотря на взаимодействие мод, в системе s^T существуют волны, передний фронт которых движется с медленной скоростью $c_2(x) = \frac{dx_2}{d\tau}\big|_{\tau=\tau_2(x)}$, то есть

$$u^f(x, t) \equiv 0 \;\; \text{при } x > x_2(t)\,. \tag{2.23}$$

В [1, 3] приводится описание управлений, инициирующих такие волны.

Предложение 4. *Существует единственная гладкая функция* $l = l(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T - \tau_1(x_2(T))$, *такая, что соотношение* (2.23) *равносильно связи*

$$f_1(t) = \int\limits_0^t l(t-s)\, f_2(s)\, ds\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant T - \tau_1(x_2(T))$$

между компонентами управления. Более того,

$$l(0) \; = \; \frac{\sqrt{\gamma_2(0)\rho_2(0)}}{\gamma_1(0)\rho_2(0) - \gamma_2(0)\rho_1(0)}\, a(0) \; = \; \frac{\alpha\omega_{21}}{(\alpha - 1)\nu_1}$$

(напомним, что $\alpha := \frac{c_1(0)}{c_2(0)} > 1$*).*

Примечательный факт состоит в том, что функция l *не зависит от* T и ее значения в интервале $0 \leqslant t \leqslant T - \tau_1\left(x_2(T)\right)$, используемом при данном T, определяются значениями коэффициентов ρ, γ, A, B лишь при $0 \leqslant x \leqslant x_2(T)$. Поэтому функцию $l\big|_{t\geqslant 0}$ естественно считать атрибутом задачи (2.1)–(2.3) с $T = \infty$.

§3. Процедура построения системы

3.1. Характеризация данных обратной задачи. В обратных задачах оператор реакции динамической системы играет роль данных, по которым требуется восстановить ее параметры. Характеристическое описание данных доставляет необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Как было показано в работе [3], применительно к системе $\mathfrak{s}^T$ [5] эти условия состоят в следующем.

Теорема 1. *Оператор* $\mathcal{R}^{2T} \; : \; L_2\left([0,2T];\mathbb{R}^2\right) \; \to \; L_2\left([0,2T];\mathbb{R}^2\right)$, $\operatorname{Dom}\mathcal{R}^{2T} = \mathcal{M}^{2T}$ *вида*

$$\left(\mathcal{R}^{2T} f\right)(t) = -\nu f_t(t) + \omega f(t) + \int\limits_0^t r(t-s) f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T \qquad (3.1)$$

с постоянными матрицами $\nu = \operatorname{diag}\{\nu_1, \nu_2\}$, ω *и гладкой матрицей-функцией* $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ *является расширенным оператором реакции некоторой системы* $\mathfrak{s}^T$ *если и только если выполнены условия:*

(1) $\nu_1, \nu_2 > 0, \quad \omega_{12} = -\alpha\omega_{21}$ *с* $\alpha > 1$;
(2) $[r(t)]^{\mathrm{tr}} = r(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant 2T$;
(3) *оператор* $\mathcal{C}^T$, *действующий в* $L_2\left([0,T];\mathbb{R}^2\right)$ *по правилу*

$$\left(\mathcal{C}^T f\right)(t) := \nu f(t) + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta\right] f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

[5] Напомним, что система $\mathfrak{s}^T$ определяется начально-краевой задачей (2.10)–(2.12) с гладкими коэффициентами, причем выполнены (2.4) и (2.5).

является положительным изоморфизмом.

Доказательство достаточности в [3] конструктивно: по заданному $\mathcal{R}^{2T}$ строится система $\mathfrak{s}^T$, оператор реакции которой совпадет с $\mathcal{R}^{2T}$. Построить систему (2.10)–(2.12) значит предъявить конкретные определяющие ее коэффициенты ρ, γ, A, B. С учетом условия (2.5), эти коэффициенты задаются восемью параметрами (скалярными функциями) $\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, a_{12}, b_{11}, b_{12}, b_{22}$. В то же время оператор R^{2T} определяется лишь тремя параметрами $r_{11}, r_{12} (= r_{21}), r_{22}$ (плюс постоянные матрицы νи ω). В этой ситуации ожидать единственности системы $\mathfrak{s}^T$ с заданным R^{2T} не приходится. Поэтому в работе [3] описываются *все* такие системы, а построение представителя семейства систем с заданным R^{2T} сводится к "самосогласованному" выбору свободных пяти (5=8-3) параметров и последующей проверке не противоречивости и правильности выбора. В качестве свободных пяти параметров выбираются диагональные элементы матриц-функций ρ и γ, а также функция l, определяющая связь компонент управлений, инициирующих медленные волны. Помимо выбора свободных параметров, для восстановления матриц A и B на отрезке $[0, x_1 (T)]$, необходимо специальным образом продолжить оператор реакции, т.е. выбрать продолжение симметричной матричной функции r на больший промежуток. После чего, как показано в [3], матрицы -функции A и B определяются на отрезке $[0, x_1 (T)]$ однозначно. Однако явных представлений для матриц A и B в [3] не приводится.

В следующем разделе проводится процедура, описанная в [3]. По ее результатам, в разделе 3.3 будет доказана Теорема 2 о представлениях для матриц A и B. Все предложения, встречающиеся ниже, доказаны в [3].

3.2. Выбор параметров. Итак, в нашем распоряжении данные $\nu, \omega, r|_{[0,2T]}$, удовлетворяющие условиям *1–3* Теоремы 1. Процедура построения системы начинается с выбора свободных параметров.

Шаг 1. По ω выберем $\alpha = \mathrm{const} > 1$ так, чтобы выполнялось условие *1.* На полуоси $x \geqslant 0$ выберем произвольный промежуток $[0, h]$. Все дальнейшие рассмотрения проводятся на этом промежутке.

Шаг 2. Выберем функции $c_1, c_2 \in C^\infty[0, h]$ так, чтобы выполнялись соотношения $0 < c_2(x) < c_1(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant h$ (ср. с (2.4)) и равенство

$$c_1(0) = \alpha c_2(0) \tag{3.2}$$

(ср. с (2.18)). Определим

$$\tau_i(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{c_i(s)}\,, \qquad T' := \tau_2(h)\,;$$

пусть $x_1(t), x_2(t)$ суть функции, обратные к $\tau_1(x), \tau_2(x)$ и заданные на промежутках $[0,T]$ и $[0,T']$ соответственно. Отметим соотношения $T' > T,\ x_1(T) = x_2(T') = h$, следующие из определений.

Шаг 3. Выберем функции $\rho_1, \rho_2 \in C^\infty[0,h],\ \rho_i > 0$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\rho_i(0) = \frac{\nu_i}{c_i(0)}\,, \quad -\frac{c_i(0)}{2}\,(c_i\rho_i)_x\,\big|_{x=0} = \omega_{ii}\,. \tag{3.3}$$

Эти равенства накладывают условия лишь на $\rho_i(0)$ и $\frac{d\rho_i}{dx}(0)$, и такой выбор функций ρ_i, очевидно, возможен. Положим

$$\gamma_i(x) := \rho_i(x)c_i^2(x)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant h\,.$$

Шаг 4. Введем функции

$$\pi_1^{T'}(\xi) := T' - \tau_2(x_2(\xi)) = T' - \xi\,, \tag{3.4}$$

$$\pi_2^{T'}(\xi) := T' - \tau_1(x_2(\xi)), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T'\,. \tag{3.5}$$

Выберем функцию $l \in C^\infty[0, \pi_2^{T'}(T')]$ так, чтобы выполнялось равенство

$$l(0) = \frac{\alpha\omega_{21}}{(\alpha-1)\nu_1}. \tag{3.6}$$

К этому моменту динамической системе, которую мы строим, предписаны коэффициенты (матрицы) ρ, γ и функция l, которая определяет связь компонент медленных волн (см. Предложение 4). Независимо от того, какими в дальнейшем окажутся оставшиеся коэффициенты A, B, оператор реакции системы заведомо будет иметь вид (2.22) с постоянными матрицами ν, ω, *совпадающими* с одноименными матрицами из (3.1). Это совпадение обеспечено наложением условий (3.2)–(3.6).

Шаг 5. Здесь матрица-функция r из (3.1), заданная при $0 \leqslant t \leqslant 2T$, продолжается на больший промежуток $0 \leqslant t \leqslant 2T'$.

Скажем, что функция $r\big|_{[0,2T']}$ является *эрмитово-положительным продолжением* функции $r\big|_{[0,2T]}$, если оператор

$$\left(\mathcal{C}^{T'} f\right)(t) := \nu f(t) + \int\limits_0^{T'} \left[\frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T'-t-s} r(\eta)\, d\eta\right] f(s)\, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T', \tag{3.7}$$

есть положительный изоморфизм в пространстве $L_2\left([0,T'];\mathbb{R}^2\right)$ (как и $\mathcal{C}^T$ в $L_2\left([0,T];\mathbb{R}^2\right)$). Способ продолжения подробно описан в [3]; он использует вспомогательную *односкоростную* систему и позволяет получить *все* гладкие эрмитово-положительные продолжения r.

К настоящему моменту для конструируемой двухскоростной системы $\mathfrak{s}^T$ выбраны матрицы-функции $\rho, \gamma\big|_{0\leqslant x\leqslant h}$, функция $l\big|_{0\leqslant t\leqslant \pi_2^{T'}(T')}$ и продолжение $r\big|_{0\leqslant t\leqslant 2T'}$. Этот набор определяется *восемью* параметрами (скалярными функциями) $\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, l$ и $\{r_{11}, r_{12}, r_{22}\}\big|_{2T\leqslant t\leqslant 2T'}$. Поэтому свобода выбора параметров исчерпана, и остальные элементы системы определятся уже однозначно.

Пространства, операторы, волны. **Пространства.** Обозначим $\mathcal{F}^{T'} := L_2\left([0,T'];\mathbb{R}^2\right)$. Функция l определяет в $\mathcal{F}^{T'}$ семейство подпространств

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l^{T',\xi} := \Bigg\{ f \in \mathcal{F}^{T'} \,\Bigg|\, & f\big|_{[0,T'-\xi]} = 0, \\ & f_1(t) = \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{t} l(t-s) f_2(s)\, ds, \pi_1^{T'}(\xi) \leqslant t \leqslant \pi_2^{T'}(\xi) \Bigg\}, \\ & 0 < \xi < T'; \qquad \mathcal{F}_l^{T',0} := \{0\}, \quad \mathcal{F}_l^{T',T'} =: \mathcal{F}_l^{T'} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Наибольшее из них $\mathcal{F}_l^{T'}$ будем называть *внешним пространством*, а его элементы – *управлениями*. Пространство $L_{2,\rho}\left([0,h];\mathbb{R}^2\right) =: \mathcal{H}^h$ назовем *внутренним* (напомним, что $h = x_2(T') = x_1(T)$).

Проекторы. *Определим* $\mathcal{P}_l^{T',\xi}$ как (косой) проектор в $\mathcal{F}^{T'}$ на $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$ параллельно подпространству $(\mathcal{C}^{T'})^{-1}[\mathcal{F}^{T'} \ominus \mathcal{F}_l^{T',\xi}]$. Эквивалентным является определение

$$\mathcal{P}_l^{T,\xi} := e_l^{T',\xi}\left[(e_l^{T',\xi})^*\mathcal{C}^{T'}e_l^{T',\xi}\right]^{-1}(e_l^{T',\xi})^*\mathcal{C}^{T'}, \qquad 0\leqslant\xi\leqslant T' \tag{3.9}$$

в котором $e_l^{T',\xi} : \mathcal{F}_l^{T',\xi} \to \mathcal{F}^{T'}$ есть оператор вложения. Определение корректно, поскольку $\mathcal{C}^{T'}$ и все его блоки $(e_l^{T',\xi})^*\mathcal{C}^{T'}e_l^{T',\xi}$ суть изоморфизмы в соответствующих $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$. Для описания действия проектора $\mathcal{P}_l^{T,\xi}$ введем оператор

$$\Lambda^\xi : L_2[\pi_1^{T'}(\xi),\pi_2^{T'}(\xi)] \to L_2[\pi_1^{T'}(\xi),\pi_2^{T'}(\xi)],$$

действующий по правилу

$$\left(\Lambda^\xi g\right)(t) := \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{t} l(t-s)g(s)\,ds\,, \qquad \pi_1^{T'}(\xi)\leqslant t\leqslant\pi_2^{T'}(\xi). \tag{3.10}$$

В [3] доказано представление

$$(\mathcal{P}_l^{T',\xi}f)(t) = \begin{cases} 0\,, & 0<t\leqslant\pi_1^{T'}(\xi),\\ \begin{pmatrix}\Lambda^\xi f_2\\ f_2\end{pmatrix}(t) + \int\limits_0^{\pi_2^{T'}(\xi)} p^{T',\xi}(t,s)f(s)\,ds\,, & \pi_1^{T'}(\xi)<t\leqslant\pi_2^{T'}(\xi),\\ f\,(t) + \int\limits_0^{\pi_2^{T'}(\xi)} p^{T',\xi}(t,s)f(s)\,ds\,, & \pi_2^{T'}(\xi)<t\leqslant T'. \end{cases} \tag{3.11}$$

Матричное ядро $p^{T',\xi}(t,s)$ является гладким в $[\pi_1^{T'}(\xi),\pi_2^{T'}(\xi)]$ вне диагонали $t=s$ и прямых $t=\pi_2^{T'}(\xi)$ и $s=\pi_1^{T'}(\xi)$; для него выполнено $|p^{T',\xi}(t,s)|\leqslant\mathrm{const}$ с постоянной, не зависящей от ξ,t,s. Помимо этого, выполнены равенства

$$\lim_{\xi\to 0}(\mathcal{P}_l^{T',\xi}f)_i\langle\pi_{\bar{i}}^{T'}(\xi)\rangle = f_i(T')\,, \qquad i=1,2,$$

где используется обозначение

$$y\langle s\rangle := y(s+0)-y(s-0)\,.$$

В дальнейшем также понадобятся обозначения для разрывов функций нескольких переменных:

$$z\left(\langle t\rangle, x\right) := z\left(t+0, x\right) - z\left(t-0, x\right), \tag{3.12}$$

$$z\left(t, \langle x\rangle\right) := z\left(t, x+0\right) - z\left(t, x-0\right). \tag{3.13}$$

Здесь $z\left(t,x\right)$ и $y\left(s\right)$ могут быть скалярными или матричными функциями.

Волны. Обозначим

$$\theta := \operatorname{diag}\{\theta_1, \theta_2\}, \quad \theta_i(x) := \left(\frac{\rho_i(0)\gamma_i(0)}{\rho_i(x)\gamma_i(x)}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Введем плотный в $\mathcal{F}_l^{T'}$ линеал гладких управлений

$$\mathcal{M}_l^{T'} := \mathcal{F}_l^{T'} \cap \{f \in C^\infty\left([0,T'];\mathbb{R}^2\right) \mid \operatorname{supp} f \subset (0,T']\}, \tag{3.14}$$

аннулирующихся в окрестности $t = 0$. *Определим* оператор $\mathcal{W}_l^{T'}: \mathcal{F}_l^{T'} \to \mathcal{H}^h$, $\operatorname{Dom}\mathcal{W}_l^{T'} = \mathcal{M}_l^{T'}$,

$$\left(\mathcal{W}_l^{T'} f\right)(x) := \theta(x) \begin{pmatrix} (\mathcal{P}^{T',\tau_2(x)} f)_1 \langle T' - \tau_1(x)\rangle \\ (\mathcal{P}^{T',\tau_2(x)} f)_2 \langle T' - \tau_2(x)\rangle \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h.$$

Образы $u^f(\cdot, T') := \mathcal{W}_l^{T'} f$ будем называть *волнами*.

Предложение 5. *При $f \in \mathcal{M}_l^{T'}$ справедливо представление*

$$u^f\left(x,T'\right) = (\mathcal{W}_l^{T'} f)(x) = \theta(x) \begin{pmatrix} f_1\left(T' - \tau_1\left(x\right)\right) \\ f_2\left(T' - \tau_2\left(x\right)\right) \end{pmatrix} + \int\limits_0^{T'-\tau_1(x)} w(x,t) f\left(t\right) dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant h \tag{3.15}$$

с ядром w, гладким в $[0,h] \times [0,T']$ вне кривых $t = T' - \tau_i(x)$, аннулирующимся при $t > T' - \tau_1(x)$. Более того,

$$w_{11}\left(x,s\right) = \theta_1\left(x\right) p_{11}^{T,\tau_2(x)}\left(\langle T - \tau_1\left(x\right)\rangle, s\right),$$

$$w_{12}\left(x,s\right) = \theta_1\left(x\right) \left(p_{12}^{T,\tau_2(x)}\left(\langle T - \tau_1\left(x\right)\rangle, s\right) - l_x\left(T - \tau_1\left(x\right) - s\right)\right),$$

$$w_{21}\left(x,s\right) = \theta_2\left(x\right) p_{21}^{T',\tau_2(x)}\left(T - \tau_2\left(x\right), s\right),$$

$$w_{22}\left(x,s\right) = \theta_2\left(x\right) p_{22}^{T',\tau_2(x)}\left(T - \tau_2\left(x\right), s\right),$$

где

$$l_x(s) := \begin{cases} l(s)\,, & 0 < s < \tau_2(x) - \tau_1(x), \\ 0\,, & s > \tau_2(x) - \tau_1(x). \end{cases}$$

Об операторе $\mathcal{W}_l^{T'}$. Как видно из представления (3.15), оператор $\mathcal{W}_l^{T'}$ ограничен. Его расширение по непрерывности с $\mathcal{M}_l^{T'}$ на $\mathcal{F}_l^{T'}$ имеет тот же вид, и мы сохраняем за ним обозначение $\mathcal{W}_l^{T'}$. Образы при действии расширения мы тоже называем волнами.

В силу гладкости входящих в (3.15) функций θ_i, τ_i и характера гладкости ядра w, оператор $\mathcal{W}_l^{T'}$ сохраняет гладкость: $\mathcal{W}_l^{T'}\mathcal{M}_l^{T'} \subset C^\infty([0,h];\mathbb{R}^2)$.

Сопряженный оператор.

Соглашение 2. *Элементы внутреннего пространства $\mathcal{H}^h$ определены при $x \in [0,h]$. Доопределим функции $g \in \mathcal{H}^h$ при $x > h$ нулем: $g\,(x) = 0$, $x > h$.*

Например, с учетом Соглашения 2 для $g \in \mathcal{H}^h$

$$g(x_1(T'-t)) \;=\; \begin{cases} 0\,, & 0 \leqslant t < \pi_2^{T'}(T'), \\ g(x_1(T'-t))\,, & \pi_2^{T'}(T') \leqslant t \leqslant T'. \end{cases} \tag{3.16}$$

В обозначении

$$\widehat{y}\,(t) := \begin{pmatrix} y_1\,(x_1\,(T'-t)) \\ y_2\,(x_2\,(T'-t)) \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T' \tag{3.17}$$

первая компонента понимается с учетом Соглашения 2. В последующих двух предложениях используется обозначение (3.17)

Предложение 6. *Оператор $(\mathcal{W}_l^{T'})^* : \mathcal{H}^h \to \mathcal{F}_l^{T'}$ действует на элементы $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ по правилу*

$$\Big((\mathcal{W}_l^{T'})^* y\Big)\,(t) = \varphi(t)\widehat{y}\,(t) + \int\limits_0^{\min\left(h,x_1(T'-t)\right)} w^*(t,x)\,y(x)dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T',$$

где

$$\varphi = \mathrm{diag}\{\varphi_1,\varphi_2\}, \quad \varphi_i\,(t) := \left(\left(\rho_i(0)\gamma_i\,(0)\,\rho_i\,(x_i\,(T'-t))\,\gamma_i\,(x_i\,(T'-t))\right)\right)^{\frac{1}{4}},$$

а ядро w^* является гладким в $[0,T'] \times [0,h]$ вне кривых $t = T' - \tau_i\,(x)$ и аннулируется при $t > T' - \tau_1\,(x)$.

Обратный оператор В [3] устанавливается обратимость $\mathcal{W}_l^{T'}$ и выводится представление для $(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}$.

Предложение 7. *Оператор* $(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} : \mathcal{H}^h \to \mathcal{F}_l^{T'}$ *действует на элементы* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *по правилу*

$$\left((\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y\right)(t) = \theta^\sharp(t)\widehat{y}\,(t) + \int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v\,(t,x)\; y\,(x)\,dx, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T', \tag{3.18}$$

где $\theta^\sharp = \operatorname{diag}\{\theta_1^\sharp, \theta_2^\sharp\}$,

$$\theta_i^\sharp\,(t) := \left(\frac{\rho_i(0)\gamma_i(0)}{\rho_i(x_i(T'-t))\gamma_i(x_i(T'-t))}\right)^{-\frac{1}{4}} = \theta_i^{-1}(x_i(T'-t)),$$

а ядро v *является гладким в* $[0,h]\times[0,T']$ *вне кривых* $t = T' - \tau_i(x)$ *и аннулируется при* $x < x_2(T'-t)$.

Оператор L. Здесь вводится оператор, который определяет эволюцию конструируемой динамической системы. Определим во внутреннем пространстве $\mathcal{H}^h$ всюду плотные гладкие линеалы

$$\mathcal{N}^h := \{y \in C^\infty([0,h];\mathbb{R}^2) \mid \operatorname{supp} y \subset [0,h)\}\,, \tag{3.19}$$

$$\mathcal{N}_0^h := \{y \in \mathcal{N}^h \mid y(0) = 0\}.$$

Ориентируясь на соотношение (2.15), во внутреннем пространстве *определим* оператор $L : \mathcal{H}^h \to \mathcal{H}^h$, $\operatorname{Dom} L = \mathcal{N}^h$,

$$L := \mathcal{W}_l^{T'} \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}\,, \tag{3.20}$$

для которого в [3] была доказана корректность определения и

Предложение 8. *Оператор* L *обладает следующими свойствами:*
1) *локальность: для* $y \in \operatorname{Dom} L$, *выполнено* $\operatorname{supp} Ly \subset \operatorname{supp} y$;
2) *симметричность на плотном линеале* $\mathcal{N}_0^h$*: для* $v, y \in \mathcal{N}_0^h$ *выполнено*

$$(Lv, y)_{\mathcal{H}^h} = (v, Ly)_{\mathcal{H}^h};$$

3) *для* $y \in \operatorname{Dom} L$,

$$Ly = \rho^{-1}\left[(\gamma y_x)_x - Ay_x - By\right] \tag{3.21}$$

с гладкими A *и* B, *удовлетворяющими условиям* (2.5).

В [3] Свойство 3) доказывается с помощью свойств 1) и 2). Подстановкой представлений (3.18) и (3.15) в правую часть (3.20) и последующим интегрированием по частям для оператора L выводится представление:

$$
\begin{aligned}
(Ly)(x) = \rho^{-1}(x)\Big[(\gamma(x)y'(x))' - A(x)y'(x) - B(x)y(x)\Big] \\
+ C(x)y'(x_2(\tau_1(x))) + D(x)y(x_2(\tau_1(x))) \\
+ \widetilde{C}(x)y'(x_1(\tau_2(x))) + \widetilde{D}(x)y(x_1(\tau_2(x))) \\
+ \int\limits_{x_2(\tau_1(x))}^{h} J(x,s)\,y(s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

где $y(x_1(\tau_2(x)))$ понимается с учетом Соглашения 2, а $A, B, C, D, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ суть гладкие матрицы-функции, J – кусочно-гладкое матричное ядро.

Из свойства локальности оператора L следует, что матрицы C, D, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ суть нулевые, также как и интегральное слагаемое. Из свойства симметричности следует, что матрицы A и B удовлетворяют условиям (2.5). В следующем разделе выводятся представления матриц A и B через матричные ядра w и v интегральных частей операторов $\mathcal{W}_l^{T'}$ и $(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}$ (см. (3.15), (3.18)).

3.3. Матрицы A и B. Частные производные будем записывать:

$$
z'_{(1)}(t,x) = \frac{\partial z}{\partial t}(t,x)\,, z'_{(2)}(t,x) = \frac{\partial z}{\partial x}(t,x)\,.
$$

Для разрывов используем обозначения (3.12),(3.13). Нам понадобится

Лемма 1. *Для разрывов матриц-функций $w(x,t)$ и $v(t,x)$ на кривых $t = T - \tau_i(x)$ при $x \in [0,h]$ имеют место соотношения*

$$
\begin{aligned}
w\left(x, \langle T' - \tau_i(x)\rangle\right) = w\left(\langle x\rangle, T' - \tau_i(x)\right), \\
v\left(\langle T' - \tau_i(x)\rangle, x, \right) = v\left(T' - \tau_i(x), \langle x\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Из Предложения 5 известно, что матрица-функция $w(x,t)$ является гладкой в $[0,h] \times [0,T']$ вне монотонно убывающих кривых $t = T' - \tau_i(x)$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
w\left(x, T' - \tau_i(x) + 0\right) = w\left(x + 0, T' - \tau_i(x)\right), \\
w\left(x, T' - \tau_i(x) - 0\right) = w\left(x - 0, T' - \tau_i(x)\right),
\end{aligned}
$$

откуда следует первое равенство Леммы 1. Аналогично, второе равенство следует из того, что матрица $v\,(t,x)$ является гладкой в $[0,T'] \times [0,h]$ вне монотонно убывающих кривых $t = T' - \tau_i(x)$. $\square$

Теорема 2. *Для элемента $a\,(x)$ антидиагональной матрицы A на отрезке $[0,h]$ справедливы два представления*

$$a\,(x) = -\frac{\rho_1\rho_2\left[c_1^2 - c_2^2\right]}{\theta_2\sqrt{\rho_2\gamma_2}}\,(x)\,w_{12}\left(x, \langle T' - \tau_2\,(x)\rangle\right) \tag{3.23}$$

$$= -\frac{\rho_1\rho_2\left[c_1^2 - c_2^2\right]}{\theta_1\sqrt{\rho_1\gamma_1}}\,(x)\,w_{21}\left(x, \langle T' - \tau_1\,(x)\rangle\right). \tag{3.24}$$

Для матрицы B на отрезке $[0,h]$ справедливо представление

$$\begin{aligned} B\,(x) = {} & \frac{1}{16}\rho^{-1}\,(x)\left((\rho\gamma)'\left(\ln\left(\rho^5\gamma\right)\right)' - 4\,(\rho\gamma)''\right)(x) \\ & + \theta\,(x)\,\rho\,(x)\left(\frac{1}{2}\left(\gamma\rho^{-1}\right)'\widetilde{v} - 2\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\widetilde{v}_{\mathbf{I}} + \gamma\rho^{-1}\widetilde{v}_{\mathbf{II}}\right)(x) \\ & - \rho\,(x)\left(\widetilde{w}_{\mathbf{II}}\theta^{-1} + \frac{1}{4}\widetilde{w}\left(\theta^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}\,(\gamma\rho)'\right)\right)(x) \\ & + \rho\,(x)\sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}} w\left(x, \langle T - \tau_i\,(x)\rangle\right) v\left(T - \tau_i\,(x), \langle x\rangle\right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$\ln\left(\rho^5\gamma\right) = \begin{pmatrix} \ln\left(\rho_1^5\gamma_1\right) & 0 \\ 0 & \ln\left(\rho_2^5\gamma_2\right) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{v}\,(x) = \begin{pmatrix} \left(\langle T' - \tau_1\,(x)\rangle, x\right) & v_{12}\left(\langle T' - \tau_1\,(x)\rangle, x\right) \\ v_{21}\left(\langle T' - \tau_2\,(x)\rangle, x\right) & v_{22}\left(\langle T' - \tau_2\,(x)\rangle, x\right) \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

$$\widetilde{v}_{\mathbf{I}}(x) = \begin{pmatrix} (v_{21})'_{(1)}(\langle T' - \tau_1(x)\rangle, x) & (v_{12})'_{t(1)}(\langle T' - \tau_1(x)\rangle, x) \\ (v_{21})'_{(1)}(\langle T' - \tau_2(x)\rangle, x) & (v_{22})'_{(1)}(\langle T' - \tau_2(x)\rangle, x) \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

$$\widetilde{v}_{\mathbf{II}}(x) = \begin{pmatrix} (v_{11})'_{(2)}(\langle T' - \tau_1(x)\rangle, x) & (v_{12})'_{(2)}(\langle T' - \tau_1(x)\rangle, x) \\ (v_{21})'_{(2)}(\langle T' - \tau_2(x)\rangle, x) & (v_{22})'_{(2)}(\langle T' - \tau_2(x)\rangle, x) \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

$$\widetilde{w}(x) = \begin{pmatrix} w_{11}(x, \langle T' - \tau_1(x)\rangle) & w_{12}(x, \langle T' - \tau_2(x)\rangle) \\ w_{21}(x, \langle T' - \tau_1(x)\rangle) & w_{22}(x, \langle T' - \tau_2(x)\rangle) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{w}_{\mathbf{II}}(x) = \begin{pmatrix} (w_{11})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_1(x)\rangle) & (w_{12})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_2(x)\rangle) \\ (w_{21})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_1(x)\rangle) & (w_{22})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_2(x)\rangle) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Доказательство Теоремы 2 разобьем на 5 этапов:
1. найдем представления для $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y$ и $\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y$ при $y \in \mathcal{N}^h$;
2. получим представление для первого слагаемого $\mathcal{W}_l^{T'}\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y$;
3. получим представление для второго слагаемого $\mathcal{W}_l^{T'}\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y$;
4. предъявим представления для матриц A и B;
5. уточним представление для матрицы A.
Ниже используются Соглашение 2 и обозначение (3.17).

Этап 1. Представления для $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y$ и $\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y$.

Лемма 2. *Для $y \in \mathcal{N}^h$ справедливы формулы*

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y\right)(t) = -\theta_i^{\sharp}(t)\begin{pmatrix} \left(\gamma_1^{\frac{1}{2}}\rho_1^{-\frac{1}{2}}y_1'\right)(x_1(T'-t)) \\ \left(\gamma_2^{\frac{1}{2}}\rho_2^{-\frac{1}{2}}y_2'\right)(x_2(T'-t)) \end{pmatrix}$$
$$-\frac{1}{4}\theta_i^{\sharp}(t)\begin{pmatrix} \left(\gamma_1^{-\frac{1}{2}}\rho_1^{-\frac{3}{2}}(\gamma_1\rho_1)' y_1\right)(x_1(T'-t)) \\ \left(\gamma_2^{-\frac{1}{2}}\rho_2^{-\frac{3}{2}}(\gamma_2\rho_2)' y_2\right)(x_2(T'-t)) \end{pmatrix}$$
$$+\sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}(x_i(T'-t))\, v(t, \langle x_i(T'-t)\rangle)\, y(x_i(T'-t))$$
$$+\int_{x_2(T'-t)}^{h} v'_{(1)}(t,x)\, y(x)\, dx, \tag{3.29}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y\right)(t) = (Ey)(t) + (Gy)(t)$$
$$+\int_{x_2(T'-t)}^{h} v''_{(2)}(t,x)\, y(x)\, dx, \tag{3.30}$$

где

$$(Ey)(t) := \left(\theta^{\sharp}\right)''(t)\,\widehat{y}(t) + 2\left(\theta^{\sharp}\right)'(t)\,\widehat{y}'(t) + \theta^{\sharp}(t)\,\widehat{y}''(t)\,, \tag{3.31}$$

$$(Gy)(t) := \sum_{i=1,2} A_i(t)\,y'\left(x_i\left(T'-t\right)\right) + \sum_{i=1,2} B_i(t)\,y\left(x_i\left(T'-t\right)\right), \tag{3.32}$$

$$M_i(t) := -\frac{\gamma_i}{\rho_i}\left(x_i\left(T'-t\right)\right) v\left(t, \langle x_i\left(T'-t\right)\rangle\right), \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} N_i(t) := {} & 2\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_i\left(T'-t\right)\right) v'_{(1)}\left(t, \langle x_i\left(T'-t\right)\rangle\right) \\ & - \frac{\gamma_i}{\rho_i}\left(x_i\left(T'-t\right)\right) v'_{(2)}\left(t, \langle x_i\left(T'-t\right)\rangle\right) \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)'\left(x_i\left(T'-t\right)\right) v\left(t, \langle x_i\left(T'-t\right)\rangle\right). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Здесь $M_i(t), N_i(t)$ суть матричные коэффициенты перед $y'(x_i(T'-t))$ и $y(x_i(T'-t))$ соответственно, $i = 1, 2$.

Доказательство. Функции $x_i(t)$, $i = 1, 2$ являются обратными к эйконалам $\tau_i(x)$ и могут быть записаны в виде

$$x_i(t) = \int\limits_0^t \sqrt{\frac{\gamma_i}{\rho_i}}\left(x_i(s)\right) ds = \int\limits_0^t c_i\left(x_i(s)\right) ds, \quad i = 1, 2.$$

Ниже мы используем следующие простые формулы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i\left(T'-t\right) &= -\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_i\left(T'-t\right)\right), \\ \frac{d^2}{dt^2} x_i\left(T'-t\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)'\left(x_i\left(T'-t\right)\right). \end{aligned}$$

Дифференцируя (3.18), имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y\right)(t) = {} & \left(\theta^{\sharp}\right)'(t)\,\widehat{y}(t) + \theta^{\sharp}(t)\,\widehat{y}'(t) \\ & + \frac{d}{dt}\int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v(t,x)\,y(x)\,dx, \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y\right)(t) = (Ey)(t) + \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v\left(t,x\right) y\left(x\right) dx.$$

Выпишем производные $\widehat{y}_i\left(t\right) = y_i\left(x_i\left(T'-t\right)\right)$

$$\widehat{y}_i'\left(t\right) = -\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}} y_i'\left(x_i\left(T'-t\right)\right), \tag{3.36}$$

$$\widehat{y}_i''\left(t\right) = \left(\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right) y_i'' + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)' y_i'\right)\left(x_i\left(T'-t\right)\right) \tag{3.37}$$

и производные $\theta_i^\sharp\left(t\right) = \nu_i^{-\frac{1}{2}}\left(\gamma_i\rho_i\right)^{\frac{1}{4}}\left(x_i\left(T'-t\right)\right)$,

$$\left(\theta_i^\sharp\right)'(t) = -\frac{1}{4}\left(\theta_i^\sharp\gamma_i^{-\frac{1}{2}}\rho_i^{-\frac{3}{2}}\left(\gamma_i\rho_i\right)'\right)\left(x_i\left(T'-t\right)\right), \tag{3.38}$$

$$(\theta_i^\sharp)''(t) = \frac{1}{16}\left(\theta_i^{-1}\rho_i^{-2}\left(4(\rho_i\gamma_i)'' - (\rho_i\gamma_i)'\left(\ln(\rho_i^5\gamma_i)\right)'\right)\right)\left(x_i(T'-t)\right). \tag{3.39}$$

Далее имеем:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v\left(t,x\right) y\left(x\right) dx = \int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v_{(1)}'\left(t,x\right) y\left(x\right) dx + \sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_i\left(T'-t\right)\right) v\left(t,\langle x_i\left(T'-t\right)\rangle\right) y\left(x_i\left(T'-t\right)\right). \tag{3.40}$$

Подставляя первые производные (3.36), (3.38), (3.40) в (3.35), приходим к (3.29). Продифференцируем каждое из слагаемых правой части (3.40) еще раз по t. Производная интегрального слагаемого есть

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v_{(1)}'\left(t,x\right) y\left(x\right) dx = \int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v_{(1)}''\left(t,x\right) y\left(x\right) + \sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_i\left(T'-t\right)\right) v_{(1)}'\left(t,\langle x_i\left(T'-t\right)\rangle\right) y\left(x_i\left(T'-t\right)\right).$$

Для производной i-го слагаемого суммы имеем:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_i\left(T'-t\right)\right) v\left(t,\langle x_i\left(T'-t\right)\rangle\right) y\left(x_i\left(T'-t\right)\right)\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)(x_i(T'-t))\,v\,(t,\langle x_i(T'-t)\rangle)\right]y'(x_i(T'-t))$$
$$+\left[\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}(x_i(T'-t))\,v'_{(1)}(t,\langle x_i(T'-t)\rangle)\right]y(x_i(T'-t))$$
$$-\left[\frac{\gamma_i}{\rho_i}(x_i(T'-t))\,v'_{(2)}(t,\langle x_i(T'-t)\rangle)\right]y(x_i(T'-t))$$
$$-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)'(x_i(T'-t))\,v\,(t,\langle x_i(T'-t)\rangle)\right]y(x_i(T'-t)).$$

Отсюда

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v\,(t,x)\,y\,(x)\,dx = (Gy)\,(t) + \int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v''_{(2)}(t,x)\,y\,(x)\,dx, \quad (3.41)$$

$$(Gy)\,(t) := \sum_{i=1,2} M_i\,(t)\,y'(x_i(T'-t)) + \sum_{i=1,2} N_i\,(t)\,y\,(x_i(T'-t))$$

с M_i и N_i, заданными в (3.33) и (3.34) соответственно. Суммируя (3.41) с $(Ey)\,(t)$ приходим к (3.30). $\square$

В силу представления (3.15) для $\mathcal{W}_l^{T'}$, имеем:

$$\left(\mathcal{W}_l^{T'}\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}y\right)(x) = \theta(x)\begin{pmatrix}\left(\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}y\right)_1(T'-\tau_1(x))\\ \left(\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}y\right)_2(T'-\tau_2 t(x))\end{pmatrix}$$
$$+\int\limits_0^{T'-\tau_1(x)} w(x,t)\left(\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}y\right)(t)\,dt. \quad (3.42)$$

Дальнейшее преобразование правой части (3.42) производится на Этапах 2 и 3. На Этапе 2 с учетом (3.30) находится представление для первого слагаемого в (3.42). На Этапе 3 второе слагаемое в (3.42) интегрируется по частям и преобразуется с помощью формулы (3.29).

При таком преобразовании возникают слагаемые вида:

$$
\begin{aligned}
&C\left(x\right)y'\left(x_1\left(\tau_2\left(x\right)\right)\right), \quad D\left(x\right)y\left(x_1\left(\tau_2\left(x\right)\right)\right), \quad \widetilde{C}\left(x\right)y'\left(x_2\left(\tau_1\left(x\right)\right)\right),\\
&\widetilde{D}\left(x\right)y\left(x_2\left(\tau_1\left(x\right)\right)\right), \quad \int\limits_0^h J\left(x,s\right)y\left(s\right)ds,
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

где $C, D, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ суть некоторые гладкие матрицы-функции, J – кусочно-гладкая матрица-функция. Из представления (3.21) для оператора L следует, что сумма всех слагаемых такого вида равна нулю. Поэтому в дальнейших выкладках за слагаемыми вида (3.43) можно не следить и заменять многоточием.

Этап 2. Представление для первого слагаемого в (3.42).

Лемма 3. *Справедливо представление*

$$
\begin{aligned}
&\theta(x)\begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)_1\left(T'-\tau_1\left(x\right)\right)\\ \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)_2\left(T'-\tau_2\left(x\right)\right)\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad = \rho^{-1}\left(x\right)\left(\left(\gamma y'\right)'-M_3y'-\left(N_3+q\right)y\right)\left(x\right)+\ldots,
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

где

$$
q := \frac{1}{16}\rho^{-1}\left(\left(\rho\gamma\right)'\left(\ln\left(\rho^5\gamma\right)\right)'-4\left(\rho\gamma\right)''\right), \tag{3.45}
$$

$$
M_3 := \theta\gamma\widetilde{v}, \quad N_3 := \theta\rho\left(\frac{1}{2}\left(\gamma\rho^{-1}\right)'\widetilde{v}-2\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\widetilde{v}_{\mathbf{I}}+\gamma\rho^{-1}\widetilde{v}_{\mathbf{II}}\right), \tag{3.46}
$$

матрицы-функции $\widetilde{v}, \widetilde{v}_{\mathbf{I}}, \widetilde{v}_{\mathbf{II}}$ *определены в* (3.26)–(3.28).

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&\theta(x)\begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)_1\left(T'-\tau_1\left(x\right)\right)\\ \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)_2\left(T'-\tau_2\left(x\right)\right)\end{pmatrix}\\
&\qquad = \theta(x)\begin{pmatrix}\left(Ey\right)_1\left(T'-\tau_1\left(x\right)\right)\\ \left(Ey\right)_2\left(T'-\tau_2\left(x\right)\right)\end{pmatrix}+\theta(x)\begin{pmatrix}\left(Gy\right)_1\left(T'-\tau_1\left(x\right)\right)\\ \left(Gy\right)_2\left(T'-\tau_2\left(x\right)\right)\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad +\theta(x)\int\limits_{x_2(T'-t)}^{h} v''_{(1)}(t,x)y(x)dx.
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

Из (3.31) с учетом (3.36)–(3.39) можно вывести

$$(Ey)_i\,(T'-\tau_i\,(x)) = \rho_i^{-1}\theta_i^{-1}\left(\left(\gamma_i\,(y_i)'\right)'-q_iy_i\right)(x)\,, \tag{3.48}$$

где q_i определено в (3.45). Из представления (3.32) с M_i, N_i определенными в (3.33), (3.34), следует

$$\begin{pmatrix}(Gy)_1\,(T'-\tau_1\,(x))\\(Gy)_2\,(T'-\tau_2\,(x))\end{pmatrix} = -\left(\gamma\rho^{-1}\widetilde{v}\right)(x)\,y'\,(x)$$
$$+\left(2\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\widetilde{v}_{\mathbf{I}}-\gamma\rho^{-1}\widetilde{v}_{\mathbf{II}}-\frac{1}{2}\left(\gamma\rho^{-1}\right)'\widetilde{v}\right)(x)\,y\,(x)+\ldots\,. \tag{3.49}$$

Подставляя (3.48) и (3.49) в (3.47), приходим к (3.44) с матрицами M_3, N_3, определенными в (3.46). □

Этап 3. Представление для второго слагаемого (3.42).

Лемма 4. *Справедливо представление*

$$\int\limits_0^{T'-\tau_1(x)} w\,(x,s)\left(\frac{d^2}{ds^2}\left(\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)\right)(s)\,ds = \left(\widetilde{w}\theta^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\right)(x)\,y'\,(x)$$
$$+\left(\widetilde{w}_{\mathbf{II}}\theta^{-1}+\frac{1}{4}\widetilde{w}\theta^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}\,(\gamma\rho)'\right)(x)\,y\,(x)$$
$$-\left(\sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}(x)\,w\,(x,\langle T'-\tau_i\,(x)\rangle)\,v\,(T'-\tau_i\,(x)\,,\langle x\rangle)\right)y\,(x)+\ldots\,.$$

Доказательство. Пусть

$$\psi\,(s) := \left(\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)(s)\,.$$

Ядро $w\,(x,s)$ может иметь собственные разрывы и разрывы производных на кривых $s = T'-\tau_i\,(x)$. Интегрируем по частям с учетом

$\psi\left(0\right)=0,$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{0}^{T'-\tau_1(x)} w\left(x,s\right)\left(\frac{d^2}{ds^2}\left(\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)\right)\left(s\right)ds\\
&=\sum_{i=1,2} w'_{(2)}\left(x,\langle T'-\tau_i\left(x\right)\rangle\right)\psi\left(T'-\tau_i\left(x\right)\right)\\
&-\sum_{i=1,2} w\left(x,\langle T'-\tau_i\left(x\right)\rangle\right)\psi'\left(T'-\tau_i\left(x\right)\right)\\
&+\int\limits_{0}^{T'-\tau_1(x)} w''_{(2)}\left(x,s\right)\psi\left(s\right)ds.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Далее, из (3.18) выводим соотношения

$$
\begin{aligned}
\psi\left(T'-\tau_1\left(x\right)\right)&=\begin{pmatrix}\left(\left[\frac{\rho_1\gamma_1}{\rho_1(0)\gamma_1(0)}\right]^{\frac14}y_1\right)(x)\\ \left(\left[\frac{\rho_2\gamma_2}{\rho_2(0)\gamma_2(0)}\right]^{\frac14}y_2\right)\left(x_2\left(\tau_1\left(x\right)\right)\right)\end{pmatrix}\\
&+\int\limits_{x_2(\tau_1(x))}^{h} v\left(T'-\tau_1\left(x\right),s\right)y\left(s\right)ds,\\
\psi\left(T'-\tau_2\left(x\right)\right)&=\begin{pmatrix}\left(\left[\frac{\rho_1\gamma_1}{\rho_1(0)\gamma_1(0)}\right]^{\frac14}y_1\right)\left(x_1\left(\tau_2\left(x\right)\right)\right)\\ \left(\left[\frac{\rho_2\gamma_2}{\rho_2(0)\gamma_2(0)}\right]^{\frac14}y_2\right)(x)\end{pmatrix}\\
&+\int\limits_{x}^{h} v\left(T'-\tau_2\left(x\right),s\right)y(s)ds,
\end{aligned}
$$

с учетом которых получаем:

$$
\sum_{i=1,2} w'_{(2)}(x,\langle T'-\tau_i(x)\rangle)\psi(T'-\tau_i(x))=(\widetilde{w}_{\mathbf{II}}\theta^{-1})(x)y(x)+\dots. \tag{3.51}
$$

Из (3.29) имеем соотношения

$$\psi'\left(T'-\tau_1\left(x\right)\right)=-\theta^{-1}\left(x\right)\begin{pmatrix}\left(\gamma_1^{\frac{1}{2}}\rho_1^{-\frac{1}{2}}y_1'+\frac{1}{4}\gamma_1^{-\frac{1}{2}}\rho_1^{-\frac{3}{2}}\left(\gamma_1\rho_1\right)'y_1\right)(x)\\ 0\end{pmatrix}$$
$$+\left(\frac{\gamma_1}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x\right)v\left(T-\tau_1\left(x\right),\langle x\rangle\right)y\left(x\right)+\dots ,$$
$$\psi'\left(T'-\tau_2\left(x\right)\right)=-\theta^{-1}\left(x\right)\begin{pmatrix}0\\ \left(\gamma_2^{\frac{1}{2}}\rho_2^{-\frac{1}{2}}y_2'+\frac{1}{4}\gamma_2^{-\frac{1}{2}}\rho_2^{-\frac{3}{2}}\left(\gamma_2\rho_2\right)'y_2\right)(x)\end{pmatrix}$$
$$+\left(\frac{\gamma_2}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x\right)v\left(T'-\tau_2\left(x\right),x\right)y\left(x\right)+\dots ,$$

с учетом которых

$$\sum_{i=1,2}w\left(x,\langle T'-\tau_i\left(x\right)\rangle\right)\psi'\left(T'-\tau_i\left(x\right)\right)=-\widetilde{w}\left(x\right)\left(\theta^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x\right)y'\left(x\right)$$
$$-\frac{1}{4}\widetilde{w}\left(x\right)\left(\theta^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}\left(\gamma\rho\right)'\right)\left(x\right)y\left(x\right) \tag{3.52}$$
$$+\left(\sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x\right)w\left(x,\langle T-\tau_i\left(x\right)\rangle\right)v\left(T-\tau_i\left(x\right),\langle x\rangle\right)\right)y\left(x\right)+\dots .$$

Подставляя (3.51) и (3.52) в (3.50), приходим к утверждению Леммы 4. □

Этап 4. Вывод представлений для матриц A и B.

Складывая представления, полученные в Леммах 3 и 4, имеем:

$$\left(Ly\right)\left(x\right)=\rho^{-1}\left(x\right)\left(\left(\gamma y'\right)'-M_3y'-\left(N_3+q\right)y\right)\left(x\right)$$
$$+\left(\widetilde{w}\theta^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x\right)y'\left(x\right)$$
$$+\left(\widetilde{w}_{\mathbf{II}}\theta^{-1}+\frac{1}{4}\widetilde{w}\theta^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}\left(\gamma\rho\right)'\right)\left(x\right)y\left(x\right)$$
$$-\left(\sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}(x)w\left(x,\left\langle T'-\tau_i(x)\right\rangle\right)v\left(T'-\tau_i(x),\langle x\rangle\right)\right)y(x)+\dots .$$

В силу Свойства 3) Леммы 8

$$L=\rho^{-1}\left[\frac{d}{dx}\gamma\frac{d}{dx}-A\frac{d}{dx}-B\right],$$

где

$$A\,(x) = \left(\theta\gamma\widetilde{v} - \rho\widetilde{w}\theta^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\right)(x)\,, \tag{3.53}$$

$$B\,(x) = \left(q + N_3 - \rho\widetilde{w}_{\mathbf{II}}\theta^{-1} - \frac{1}{4}\rho\widetilde{w}\theta^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}\,(\gamma\rho)'\right)(x)$$
$$+\,\rho\,(x)\left(\sum_{i=1,2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}} w\,(x, \langle T-\tau_i\,(x)\rangle)\,v\,(T-\tau_i\,(x)\,, \langle x\rangle)\right),$$

где матрицы-функции q и N_3 заданы в (3.45) и (3.46) соответственно. Тем самым, представление (3.25) для матрицы B доказано.

Этап 5. Представление (3.53) для матрицы $A\,(x)$ допускает следующее уточнение.

Лемма 5. *Разрывы матриц-функций v и w на кривых $t = T' - \tau_i\,(x)$ связаны следующим образом:*

$$\widetilde{v}\,(x) = \theta^{-1}(x)\widetilde{w}\,(x)\,\theta^{-1}(x)\tau'\,(x)\,. \tag{3.54}$$

Доказательство. Для распределения $y_0\,(x) = \delta_{x_0}\,(x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $x_0 \in [0,h]$ имеем:

$$\left((\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}y_0\right)(t) \;=\; \theta^{\sharp}(t)\delta_{x_0}\,(x_1\,(T'-t))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{11}\,(t,x_0)\\v_{21}\,(t,x_0)\end{pmatrix}.$$

В силу соотношения $\mathcal{W}_l^{T'}(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} = \mathbb{I}_{\mathcal{H}^h}$ имеем:

$$\begin{aligned}
y_0\,(x) &= \left(\mathcal{W}_l^{T'}(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}y_0\right)(x)\\
&= y_0\,(x) + \theta_1^{-1}(x_0)\tau_1'\,(x_0)\begin{pmatrix}w_{11}(x,T'-\tau_1\,(x_0))\\w_{21}(x,T'-\tau_1\,(x_0))\end{pmatrix}\\
&+\theta\,(x)\begin{pmatrix}v_{11}\,(T'-\tau_1\,(x)\,,x_0)\\v_{21}\,(T'-\tau_2\,(x)\,,x_0)\end{pmatrix}\\
&+\int\limits_0^{T'-\tau_1(x)} w(x,s)\begin{pmatrix}v_{11}\,(s,x_0)\\v_{21}\,(s,x_0)\end{pmatrix}ds.
\end{aligned}$$

Сокращая $y_0(x)$ в левой и правой части, получим:

$$\theta_1^{-1}(x_0)\tau_1'(x_0)\begin{pmatrix} w_{11}(x,T'-\tau_1(x_0)) \\ w_{21}(x,T'-\tau_1(x_0)) \end{pmatrix} + \theta(x)\begin{pmatrix} v_{11}(T'-\tau_1(x),x_0) \\ v_{21}(T'-\tau_2(x),x_0) \end{pmatrix} = -\int\limits_0^{T'-\tau_1(x)} w(x,s)\begin{pmatrix} v_{11}(s,x_0) \\ v_{21}(s,x_0) \end{pmatrix} ds.$$

Аналогично, для распределения $\delta_{x_0}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ выводится соотношение:

$$\theta_2^{-1}(x_0)\tau_2'(x_0)\begin{pmatrix} w_{12}(x,T'-\tau_2(x_0)) \\ w_{22}(x,T'-\tau_2(x_0)) \end{pmatrix} + \theta(x)\begin{pmatrix} v_{12}(T'-\tau_1(x),x_0) \\ v_{22}(T'-\tau_2(x),x_0) \end{pmatrix} = -\int\limits_0^{T'-\tau_1(x)} w(x,s)\begin{pmatrix} v_{12}(s,x_0) \\ v_{22}(s,x_0) \end{pmatrix} ds.$$

Объединяя два предыдущих равенства, имеем:

$$\begin{pmatrix} w_{11}(x,T'-\tau_1(x_0)) & w_{12}\big(x,T'-\tau_2(x_0)\big) \\ w_{21}(x,T'-\tau_1(x_0)) & w_{22}\big(x,T'-\tau_2(x_0)\big) \end{pmatrix}\theta^{-1}(x_0)\tau'(x_0) + \theta(x)\begin{pmatrix} v_{11}(T'-\tau_1(x),x_0) & v_{12}(T'-\tau_1(x),x_0) \\ v_{21}(T'-\tau_2(x),x_0) & v_{22}(T'-\tau_2(x),x_0) \end{pmatrix} = -\int\limits_0^{T'-\tau_1(x)} w(x,s)v(s,x_0)\,ds.$$

Слагаемые в левой части при $x = x_0$ имеют скачки, в то время как правая часть скачка при $x = x_0$ не имеет. Соотношение (3.54) следует из равенства амплитуд скачков первого и второго слагаемых левой части. □

С учетом (3.54) представление (3.53) для матрицы $A(x)$ примет вид

$$A(x) = (\gamma\widetilde{w}\rho - \rho\widetilde{w}\gamma)(x)\left(\theta^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\right)(x),$$

откуда, с учетом условия самосопряженности (2.5), для элемента $a(x)$ матрицы $A(x)$ справедливы два представления (3.23)–(3.24). Доказательство теоремы завершено. □

§4. Система с нулевой функцией отклика

В системе

$$\rho u_{tt} - \gamma u_{xx} + A u_x + B u = 0\,, \qquad 0 < x < T,\ 0 < t < T, \tag{4.1}$$

$$u|_{t<x} = 0\,, \tag{4.2}$$

$$u|_{x=0} = f\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{4.3}$$

положим

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = B = 0\,. \tag{4.4}$$

Ее оператор реакции имеет (простейший из возможных) вид

$$R^{2T} = -\frac{d}{dt} \tag{4.5}$$

(см.(1.4)).

В этом разделе мы приведем пример системы (4.1)–(4.3) с *ненулевыми* [6] коэффициентами A, B и оператором реакции (4.5). Примечателен следующий факт. С точки зрения внешнего наблюдателя, делающего заключения о свойствах системы по оператору реакции, системы с одним и тем же оператором реакции в принципе неразличимы. Между тем, в первой из систем (с $A = B = 0$) волны распространяются независимо и не взаимодействуют друг с другом, в то время как во второй взаимодействие имеет место и, соответственно, физическая картина волновых процессов сложнее.

Перейдем к построению второй системы. Выбранным ρ и γ соответствуют скорости $c_1 := \sqrt{\frac{\gamma_1(0)}{\rho_1(0)}} = 1$, $c_2 := \sqrt{\frac{\gamma_2(0)}{\rho_2(0)}} = \frac{1}{2}$ и параметр $\alpha := \frac{c_1(0)}{c_2(0)} = 2$. Тогда эйконалы $\tau_1(x) := x$ и $\tau_2(x) := 2x$ определены на отрезке $[0,T]$, а обратные к эйконалам функции $x_1(t) := t$ и $x_2(t) := \frac{1}{2}t$ определены на отрезках $[0,T]$ и $[0,T']$ соответственно, где $T' = 2T$. Функции $\pi_i^{T'}(\xi)$, определенные в (3.4)–(3.5), примут вид:

$$\pi_1^{T'}(\xi) := T' - \xi, \quad \pi_2^{T'}(\xi) := T' - \frac{\xi}{2}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T'.$$

Далее, следуя шагу 4 процедуры, описанной в разделе 3.2 выбираем функцию $l = l(t)$ на отрезке $[0,T\,]$ с условием $l\,(0) = 0$.

[6] и удовлетворяющими условиям (2.5)

Шаг 5. Выберем нулевое продолжение матрицы $r|_{[0,2T]}$:

$$r|_{[0,2T']} = 0.$$

Такое продолжение является эрмитово-положительным, так как оператор (3.7) оказывается тождественным:

$$\mathcal{C}^{T'} = \mathbb{I}. \tag{4.6}$$

В пространстве $\mathcal{F}^{T'} := L_2\left([0,T'];\mathbb{R}^2\right)$ со скалярным произведением (2.13) функция l определяет семейство подпространств $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$, для $0 \leqslant \xi \leqslant T'$ (см.(3.8)). Проектор $\mathcal{P}_l^{T',\xi}$, определенный в (3.9), действует в пространстве $\mathcal{F}^{T'}$ на подпространство $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$ параллельно подпространству $(\mathcal{C}^{T'})^{-1}[\mathcal{F}^{T'} \ominus \mathcal{F}_l^{T',\xi}]$. В силу (4.6) оператор $\mathcal{P}_l^{T',\xi}$ совпадает с ортопроектором на $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$. В работе [3] такой ортопроектор обозначался $X_l^{T',\xi}$. Там же, используя определенный в (3.10) оператор Λ^ξ, для ортопроектора $X_l^{T',\xi}$ (в нашем обозначении – $\mathcal{P}_l^{T',\xi}$) было доказано следующее

Предложение 9. *Для* $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^{T'}$, $0 \leqslant \xi \leqslant T'$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_l^{T',\xi} f\big|_{0\leqslant t<\pi_1^{T'}(\xi)} &= 0, \\
\mathcal{P}_l^{T',\xi} f\big|_{\pi_1^{T'}(\xi)\leqslant t<\pi_2^{T'}(\xi)} &= \begin{pmatrix} \Lambda^\xi\left[\mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^*\Lambda^\xi\right]^{-1}\left[(\Lambda^\xi)^* f_1 + f_2\right] \\ \left[\mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^*\Lambda^\xi\right]^{-1}\left[(\Lambda^\xi)^* f_1 + f_2\right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Lambda^\xi f_2(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} p^{T',\xi}(t,s) f(s)\, ds\,, \\
\mathcal{P}_l^{T',\xi} f\big|_{\pi_2^{T'}(\xi)\leqslant t\leqslant T'} &= f(t).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Матричное ядро $p^{T',\xi}(t,s)$ *кусочно-гладкое в*

$$[\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)] \times [\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)],$$

гладкое вне диагонали $t = s$*; для него выполнено* $|p^{T',\xi}(t,s)| \leqslant \mathrm{const}$ *с постоянной, не зависящей от* ξ, t, s.

Лемма 6. *Элементы* $p_{11}^{T',\xi}, p_{12}^{T',\xi}, p_{21}^{T',\xi}$ *матричного ядра* $p^{T',\xi}$ *выражаются через элемент* $p_{22}^{T',\xi}$ *следующим образом:*

$$p_{11}^{T',\xi}(t,s) = \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} l(t-\eta)\, l(s-\tau)\, p_{22}^{T',\xi}(\eta,\tau)\, d\tau d\eta + \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} l(t-\eta)\, l(s-\eta)\, d\eta, \tag{4.8}$$

$$p_{12}^{T',\xi}(t,s) = \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} l(t-\eta)\, p_{22}^{T',\xi}(\eta,s)\, d\eta, \tag{4.9}$$

$$p_{21}^{T',\xi}(t,s) = l(s-t) + \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} l(s-\eta)\, p_{22}^{T',\xi}(t,\eta)\, d\eta. \tag{4.10}$$

Функция $p_{22}^{T',\xi}$ *является непрерывной в* $[\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)] \times [\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)]$ *и гладкой вне диагонали* $t = s$. *Более того,* $p_{22}^{T',\xi}(t,s) = p_{22}^{T',\xi}(s,t)$.

Доказательство. Обратимся к представлениям (4.7) и (3.10) для элементов ядра $p^{T',\xi}$. Для $\lambda \in L_2[\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)]$ имеем:

$$\left(\left(\Lambda^\xi\right)^* \Lambda^\xi \lambda\right)(t) = \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} l(\tau - t)\left(\Lambda^\xi \lambda\right)(\tau)\, d\tau = \int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} L^T(t,s)\, \lambda(s)\, ds,$$

где непрерывное ядро

$$L^{T'}(t,s) = \int\limits_{\max(t,s)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} l(\tau - t)\, l(\tau - s)\, d\tau$$

определено на квадрате $\left[\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)\right] \times \left[\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)\right]$ и является гладким вне диагонали $t = s$. Более того, $L^{T'}(t,s) = L^{T'}(s,t)$.

Оператор $\mathbb{I}+\left(\Lambda^{\xi}\right)^{*}\Lambda^{\xi}$ является оператором Фредгольма и положительным изоморфизмом в пространстве $L_2\left(\left[\pi_1^{T'}(\xi),\pi_2^{T'}(\xi)\right];\mathbb{R}\right)$. Следовательно, существует обратный оператор $\left[\mathbb{I}+\left(\Lambda^{\xi}\right)^{*}\Lambda^{\xi}\right]^{-1}$, который также является оператором Фредгольма:

$$\left(\left[\mathbb{I}+\left(\Lambda^{\xi}\right)^{*}\Lambda^{\xi}\right]^{-1}\lambda\right)(t)=\lambda(t)+\int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)}p_{22}^{T',\xi}(t,s)\,\lambda(s)\,ds.$$

Здесь $p_{22}^{T',\xi}$ - функция, которая является элементом матричного ядра $p^{T',\xi}$. Эта функция обладает теми же свойствами, что и ядро $L^{T'}$: $p_{22}^{T',\xi}$ непрерывна в квадрате $\left[\pi_1^{T'}(\xi),\pi_2^{T'}(\xi)\right]\times\left[\pi_1^{T'}(\xi),\pi_2^{T'}(\xi)\right]$ и является гладкой вне диагонали $t=s$. Как и ядро $L^{T'}$, функция $p_{22}^{T',\xi}$ симметрична: $p_{22}^{T',\xi}(t,s)=p_{22}^{T',\xi}(s,t)$. Остальные матричные элементы ядра $p^{T',\xi}$ выражаются через функцию $p_{22}^{T',\xi}$:

$$\left(\left[\mathbb{I}+\left(\Lambda^{\xi}\right)^{*}\Lambda^{\xi}\right]^{-1}\left(\Lambda^{\xi}\right)^{*}\lambda\right)(t)=\int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)}p_{21}^{T',\xi}(t,s)\,\lambda(s)\,ds$$

с гладким вне диагонали $s=t$ ядром

$$p_{21}^{T',\xi}(t,s)=l(s-t)+\int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)}p_{22}^{T',\xi}(t,\tau)\,l(s-\tau)\,d\tau.$$

Элементы $p_{11}^{T',\xi},p_{12}^{T',\xi}$ первой строки матрицы $p^{T',\xi}$ получаются из элементов второй строки $p_{21}^{T',\xi},p_{22}^{T',\xi}$ сверткой с функцией l по первому аргументу:

$$p_{11}^{T',\xi}(t,s)=\left(\Lambda^{\xi}p_{21}^{T',\xi}(\cdot,s)\right)(t)=\int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)}l(t-\eta)\,p_{21}^{T',\xi}(\eta,s)\,d\eta,$$

$$p_{12}^{T',\xi}(t,s)=\left(\Lambda^{\xi}p_{22}^{T',\xi}(\cdot,s)\right)(t)=\int\limits_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)}l(t-\eta)\,p_{22}^{T',\xi}(\eta,s)\,d\eta.$$

Откуда следуют соотношения (4.8) и (4.9). □

Введем внутреннее пространство $\mathcal{H}^T := L_{2,\rho}\left([0,T];\mathbb{R}^2\right)$ со скалярным произведением (2.14) и линеал гладких волн $\mathcal{N}^T \subset \mathcal{H}^T$, аннулирующихся в окрестности $x = T$, определенный в (3.19). Внешнее пространство $\mathcal{F}^{T'}$ содержит линеал гладких управлений $\mathcal{M}_l^{T'}$, аннулирующихся в окрестности $t = 0$, определенный в (3.14).

Оператор $\mathcal{W}_l^{T'} : \mathcal{F}_l^{T'} \to \mathcal{H}^T$, $\operatorname{Dom} \mathcal{W}_l^{T'} = \mathcal{M}_l^{T'}$,

$$\left(\mathcal{W}_l^{T'} f\right)(x) := \begin{pmatrix} (\mathcal{P}^{T',2x} f)_1 \langle T' - x\rangle \\ (\mathcal{P}^{T',2x} f)_2 \langle T' - 2x\rangle \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant x \leqslant T$$

действует изоморфно из $\mathcal{M}_l^{T'}$ на $\mathcal{N}^T$ и имеет представление

$$(\mathcal{W}_l^{T'} f)(x) = \begin{pmatrix} f_1\,(T' - x) \\ f_2\,(T' - 2x) \end{pmatrix} + \int\limits_{T'-2x}^{T'-x} w(x,t) f\,(t)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant T \tag{4.11}$$

с ядром w, гладким в $[0,T] \times [0,T']$ вне прямых $t = T' - x$, $t = T' - 2x$. При $t > T' - x$ и $t < T' - 2x$ ядро аннулируется, при $T' - 2x \leqslant t \leqslant T' - x$ ядро $w(x,t)$ определяется следующим образом:

$$w_{11}\,(x,t) = -\int\limits_{T'-2x}^{T'-x} l\,(T' - x - \eta)\, l\,(t - \eta)\, d\eta -$$

$$- \int\limits_{T'-2x}^{T'-x} \int\limits_{T'-2x}^{T'-x} l\,(T' - x - \eta)\, l\,(t - s)\, p_{22}^{T',2x}\,(\eta, s)\, ds d\eta, \tag{4.12}$$

$$w_{12}\,(x,t) = -\int\limits_{T'-2x}^{T'-x} l\,(T' - x - \eta)\, p_{22}^{T',2x}\,(\eta, t)\, d\eta - l\,(T' - x - t)\,, \tag{4.13}$$

$$w_{21}\,(x,t) = \int\limits_{T'-2x}^{T'-x} l\,(t - \eta)\, p_{22}^{T,2x}\,(T' - 2x, \eta)\, d\eta + l\,(t - T' + 2x)\,, \tag{4.14}$$

$$w_{22}\,(x,t) = p_{22}^{T',2x}\,(T' - 2x, t)\,. \tag{4.15}$$

Формулы (4.12)–(4.15) следуют из (4.8)–(4.10).

Сопряженный оператор $\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^* : \mathcal{N}^T \to \mathcal{M}_l^{T'}$ действует по правилу

$$\left(\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^* y\right)(t) = \begin{pmatrix} y_1\left(T'-t\right) \\ y_2\left(\frac{T'-t}{2}\right) \end{pmatrix} + \int\limits_{\frac{T'-t}{2}}^{T} w^*\left(t,x\right)\, y\left(x\right) dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T'$$

где $y_1\left(T'-t\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant T'$ понимается с учетом Соглашения 2, а ядро

$$w^*\left(t,x\right) = w^{tr}\left(x,t\right)\rho, \quad \left(t,x\right) \in \left[0,T'\right] \times \left[0,T\right]$$

является гладким вне прямых $t = T'-x, t = T'-2x$ и аннулируется при $x > T'-t$ и $x < \frac{T'-t}{2}$.

Заметим, что оператор $\mathcal{W}_l^{T'} : \mathcal{M}_l^{T'} \to \mathcal{N}^T$ – унитарный. Действительно, как было показано в [3], справедливо равенство

$$\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^* \mathcal{W}_l^{T'} = \mathcal{C}_l^{T'},$$

где $\mathcal{C}_l^{T'} := \left(e_l^{T'}\right)^* \mathcal{C}^{T'} e_l^{T'}$ – блок оператора (3.7) в подпространстве $\mathcal{F}_l^{T'} \subset \mathcal{F}^{T'}$. Здесь $e_l^{T'} : \mathcal{F}_l^{T'} \hookrightarrow \mathcal{F}^{T'}$ оператор вложения. В силу (4.6)

$$\mathcal{C}_l^{T'} = \left(e_l^{T'}\right)^* \mathcal{C}^{T'} e_l^{T'} = \left(e_l^{T'}\right)^* e_l^{T'} = \mathbb{I}_{\mathcal{F}_l^{T'}}.$$

Следовательно, для $\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} : \mathcal{N}^T \to \mathcal{M}_l^{T'}$ справедливо представление

$$\left(\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1} y\right)(t) = \begin{pmatrix} y_1\left(T'-t\right) \\ y_2\left(\frac{T'-t}{2}\right) \end{pmatrix} + \int\limits_{\frac{T'-t}{2}}^{T} v\left(t,x\right)\, y\left(x\right) dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T' \tag{4.16}$$

с гладким вне прямых $t = T'-x, t = T'-2x$ ядром

$$v\left(t,x\right) = w^{tr}\left(x,t\right)\rho, \quad \left(t,x\right) \in \left[0,T'\right] \times \left[0,T\right], \tag{4.17}$$

аннулирующимся при $x > T'-t$ и $x < \frac{T'-t}{2}$.

Оператор $L : \mathcal{H}^T \to \mathcal{H}^T$, $\mathrm{Dom}L = \mathcal{N}^T$, задается формулой (3.20). Учитывая представления (4.11), (4.16) для операторов $\mathcal{W}_l^{T'}, \left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}$, выражения для матриц A и B, полученные в Теореме 2, упрощаются, и справедлива

Лемма 7. *Для элемента* $a(x)$ *антидиагональной матрицы* $A(x)$ *на отрезке* $[0,T]$ *справедливо представление*

$$a(x) = \frac{3}{2}\left(l(x) + \int\limits_0^x p_{22}^{T',2x}(T'-2x, T'-x-s)\, l(s)\, ds\right). \tag{4.18}$$

Причем $a(x) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $l(x) \equiv 0$. *Для матрицы* B *на отрезке* $[0,T]$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned} B(x) = {} & \gamma\left(\widetilde{w}_{\mathbf{I}}\right)^{tr}(x)\,\rho - 2\left(\widetilde{w}_{\mathbf{II}}\right)^{tr}(x)\,\rho - \rho\widetilde{w}_{\mathbf{II}}(x) \\ & + \rho w(x, \langle T'-x\rangle)\, w^{tr}(x, \langle T'-x\rangle)\,\rho + \\ & + \frac{1}{2}\rho w(x, \langle T'-2x\rangle)\, w^{tr}(x, \langle T'-2x\rangle)\,\rho, \end{aligned} \tag{4.19}$$

где

$$\widetilde{w}(x) = \begin{pmatrix} w_{11}(x, \langle T'-x\rangle) & w_{12}(x, \langle T'-2x\rangle) \\ w_{21}(x, \langle T'-x\rangle) & w_{22}(x, \langle T'-2x\rangle) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{w}_{\mathbf{I}}(x) = \begin{pmatrix} (w_{11})'_{(1)}(x, \langle T'-x\rangle) & (w_{12})'_{(1)}(x, \langle T'-2x\rangle) \\ (w_{21})'_{(1)}(x, \langle T'-x\rangle) & (w_{22})'_{(1)}(x, \langle T'-2x\rangle) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{w}_{\mathbf{II}}(x) = \begin{pmatrix} (w_{11})'_{(2)}(x, \langle T'-x\rangle) & (w_{12})'_{(2)}(x, \langle T'-2x\rangle) \\ (w_{21})'_{(2)}(x, \langle T'-x\rangle) & (w_{22})'_{(2)}(x, \langle T'-2x\rangle) \end{pmatrix}.$$

А элементы матрицы w *определяются через функции* l *и* $p_{22}^{T',2x}$ *по формулам* (4.12)–(4.15).

Доказательство. С учетом (4.17) представление (3.53) для матрицы A упрощается:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -a(x) \\ a(x) & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$a(x) = \frac{1}{2} w_{12}(x, \langle T'-2x\rangle) - 2w_{21}(x, \langle T'-x\rangle).$$

С учетом того, что матрица-функция $w(x,t)$ аннулируется при $t > T'-x$ и $t < T'-2x$, а при $T'-2x \leqslant t \leqslant T'-x$ элементы $w_{12}(x,t)$ и $w_{21}(x,t)$ определяются формулами (4.13)–(4.14), можем записать

$$a(x) = \frac{1}{2} w_{12}(x, \langle T'-2x\rangle) - 2w_{21}(x, \langle T'-x\rangle)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int\limits_{T-2x}^{T-x} l\left(T'-x-\eta\right) p_{22}^{T',2x}\left(\eta, T'-2x\right) d\eta + l\left(x\right)\right)$$

$$+ 2\left(\int\limits_{T'-2x}^{T'-x} l\left(T'-x-\eta\right) p_{22}^{T',2x}\left(T'-2x, \eta\right) d\eta + l\left(x\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int\limits_{T'-2x}^{T'-x} l\left(T'-x-\eta\right) p_{22}^{T,2x}\left(T'-2x, \eta\right) d\eta + l\left(x\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(l\left(x\right) + \int\limits_{0}^{x} p_{22}^{T',2x}\left(T'-2x, T'-x-s\right) l\left(s\right) ds\right),$$

где предпоследнее равенство справедливо в силу симметричности функции $p_{22}^{T',2x}$:

$$p_{22}^{T',2x}\left(T'-2x, \eta\right) = p_{22}^{T',2x}\left(\eta, T'-2x\right).$$

Из теории уравнений Вольтерра для уравнения

$$l\left(x\right) + \int\limits_{0}^{x} K\left(x, s\right) l\left(s\right) ds = 0$$

с гладким ядром

$$K\left(x, s\right) = p_{22}^{T',2x}\left(T'-2x, T'-x-s\right)$$

следует, что равенство $a\left(x\right) \equiv 0$ равносильно $l\left(x\right) \equiv 0$.

Для матрицы B представление (4.19) следует из (3.25) с учетом (4.17). □

Итак, выбирая гладкую *ненулевую* функцию $l \in C^{\infty}\left[0, T\right]$, такую что $l\left(0\right) = 0$, мы можем найти гладкую функцию $p_{22}^{T',2x}\left(T'-2x, s\right)$, при $T'-2x \leqslant s \leqslant T'-x$. Далее, по формулам (4.18) и (4.19) соответственно определяются матрицы $A\left(x\right)$ и $B\left(x\right)$ на отрезке $\left[0, T\right]$. Из работы [3] следует, что система (4.1)–(4.3) с постоянными матрицами ρ, γ, определенными в (4.4), и матрицами A и B, определенными по выбранной функции $l \in C^{\infty}\left[0, T\right]$, обладает оператором реакции

$$(R^{2T} f)(t) = -\frac{df}{dt}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Таким образом, приведен пример динамической системы (4.1)–(4.1) с *ненулевыми* A и B и оператором реакции (4.5).

Литература

1. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Характеризация данных динамической обратной задачи для двухскоростной системы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **259** (1999) 19–45.
2. М. И. Белишев, А. Л. Пестов, *Прямая динамическая задача для балки Тимошенко.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **369** (2009), 16–47.
3. М. И. Белишев, А. Л. Пестов, *Характеризация данных обратной задачи для одномерной двухскоростной динамической системы.* — Алгебра и анализ, **26** (2013), no. 3, 89–130.

Pestov A. L. On an inverse problem for a one-dimensional two-velocity dynamical system.

Evolution of the dynamical system under consideration is governed by the wave equation $\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0$, $x > 0$, $t > 0$ with the zero initial Cauchy data and Dirichlet boundary control at $x = 0$. Here, ρ, γ, A, B are the smooth 2×2–matrix-functions of x; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$ и $\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ – the matrices with positive entries; $u = u(x,t)$ – a solution (an $\mathbb{R}^2$-valued function). In applications, the system corresponds to one-dimensional models, in which there are two types of the wave modes, which propagate with different velocities and interact to one another.

The 'input $\to$ state' correspondence is realized by a response operator $R : u(0,t) \mapsto \gamma(0)u_x(0,t)$, $t \geqslant 0$, which plays the role of inverse data. The representations for the coefficients A and B, which are used for their determination via the response operator, are derived. We provide an example of two systems with the same response operator, such that in the first system the wave modes do not interact, whereas in the second one the interaction does occur.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия

E-mail: pestov@pdmi.ras.ru

Поступило 27 октября 2014 г.