

А. А. Мацковский

**О ВОЛНОВЫХ ФРОНТАХ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ  
БУЛДЫРЕВА И ВОЛН ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим плоскость разделенную на две полуплоскости, границей разделения которых является прямая. Пусть  $x$  – декартова координата вдоль этой прямой, а  $z$  – ортогональная ей ось (см. рис. 1). Полуплоскость с положительными значениями параметра  $z$  далее будем называть – область I, вторую полуплоскость соответственно – область II.

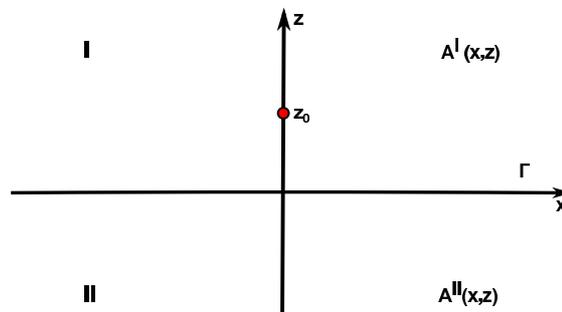


Рис. 1. Постановка задачи.

Обозначим  $A^j(x, z)$  – волновое поле в полуплоскости с номером  $j$  ( $j = I, II$ ). Предположим, что колебания гармонические – соответствующий множитель  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega = kc_1$ ,  $c_1$  – скорость распространения волн в области I,  $k$  – волновое число в I) мы всюду опускаем и волновой процесс описывается уравнениями

$$\Delta A^I + k^2 A^I = -\delta(x)\delta(z - z_0), \quad z > 0, \quad z_0 > 0, \quad (1)$$

$$\Delta A^{II} + k^2(\alpha_1 + \alpha_2 z)A^{II} = 0, \quad z < 0, \quad (2)$$

---

*Ключевые слова:* дифракция, волны шепчущей галереи, головная волна интерференционного типа, головная волна Булдырева.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Постоянные  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  удовлетворяют условиям:

$$0 < \alpha_1 < 1, \tag{3}$$

$$\alpha_2 > 0. \tag{4}$$

Правая часть уравнения (1) соответствует точечному источнику колебаний, расположенному в точке с координатами  $x = 0$  и  $z = z_0$  области I,  $k$  - большой параметр задачи.

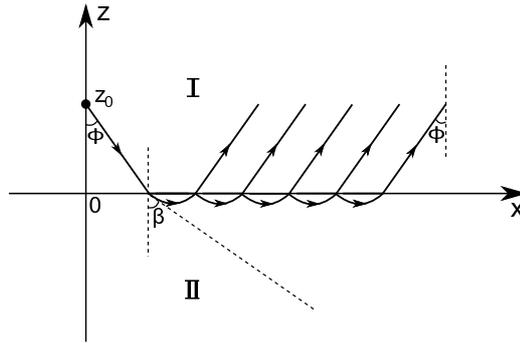


Рис. 2. Многократное переотражение лучей от внутренней границы раздела сред.

Выполнены классические краевые условия непрерывности волнового поля и его первой производной при  $z = 0$ :

$$A^I(x, 0) = A^{II}(x, 0),$$

$$\left( \frac{\partial A^I(x, z)}{\partial z} \right)_{z=0} = \left( \frac{\partial A^{II}(x, z)}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

При  $r \rightarrow \infty$ , где  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  требуется выполнение принципа предельного поглощения (см. [11]).

Ниже приводятся результаты полученные в работе [11].

Заметим, что (4) обеспечивают положительность так называемой эффективной кривизны  $\frac{1}{P}$  (термин введен В. С. Булдыревым, см. [3, 4]) границы раздела плоскостей I и II:

$$\frac{1}{P} = -\frac{1}{c_2(z)} \left( \frac{\partial c_2(z)}{\partial z} \right)_{z=0}, \tag{5}$$

$$c_2(z) = \frac{c_1}{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 z}}, \quad (6)$$

где  $P$  – эффективный радиус кривизны границы раздела,  $c_1$  – постоянная, равная скорости распространения волн в области I и  $c_2(z)$  – соответствующая скорость в полуплоскости II. В нашем случае  $P = \rho_0$ ,  $\rho_0 = \frac{2}{\alpha_2}$ .

Пусть  $\phi$  – угол, который луч образует с осью  $z$  (см. рис. 2). Из (3) и (6) следует, что  $c_2(0) > c_1$ , а значит существует значение  $\phi_0$ , такое, что лучи с  $\phi > \phi_0$  испытывают полное внутреннее отражение от границы раздела сред, а с  $\phi < \phi_0$  преломляются, порождая лучевую картину, изображенную на рис. 2. Назовем  $\phi_0$  предельным углом полного внутреннего отражения. Угол  $\phi_0$  определяется соотношением  $\sin(\phi_0) = \sqrt{\alpha_1}$ . Вследствие положительности эффективной кривизны границы раздела (5) имеют место следующие явления (см. [3]): лучи, соответствующие волнам вышедшим из источника колебаний под углами, меньшими предельного угла полного внутреннего отражения, порождают в неоднородной среде (область II) преломленные криволинейные лучи, многократно отражающиеся от этой границы (см. рис. 2). Такие лучи образуют так называемый эффект шепчущей галереи. Выделение волн шепчущей галереи из общего решения описанной выше задачи дифракции рассматривается в статье [8].

Оказывается (см. [3]), что совокупность волн, вышедших из точки  $z = z_0$  под углами  $\phi$ :  $\phi_0 - \phi = O(k^{-\frac{2}{3}})$ , рефрагируя в область II распространяются в малой окрестности границы раздела сред и интерферируют между собой. Ширина этой окрестности также имеет порядок  $O(k^{-\frac{2}{3}})$ . В результате такой интерференции в среде II образуется волновое поле  $A_M(x, z)$  имеющее при  $k \rightarrow \infty$  характер дифракционного пограничного слоя. Распространяясь в среде II вблизи границы раздела  $z = 0$ , волна  $A_M(x, z)$  преломляется в полупространство I порождая “головную волну интерференционного типа”. Её мы будем называть головной волной Булдырева.

Головная волна Булдырева описывается функцией  $G_M$  (см. [3], [4]):

$$G_M(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{L}_d} e^{i\tilde{\gamma}\tilde{\zeta}} \frac{1}{v(\tilde{\zeta})w_2(\tilde{\zeta})} \left[ \frac{w_1(\tilde{\zeta})}{w_2(\tilde{\zeta})} \right]^M d\tilde{\zeta},$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{k\rho_0}{2} \right]^{\frac{1}{3}} \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{z + z_0}{\sqrt{1 - \alpha_1}} \right),$$

где  $M$  – целое положительное число. Здесь  $v$ ,  $w_1$  и  $w_2$  – функции Эйри в определении В. А. Фока (см. [7, 9]). Вывод и детальное исследование этой формулы в настоящей работе производиться не будут. Ограничимся исследованием структуры и взаимного расположения волновых фронтов волн шепчущей галереи и волны Булдырева.

## §2. ГЕОМЕТРИЯ ЛУЧЕЙ

Рассмотрим луч, вышедший из источника излучения, находящегося в точке с координатами  $(0, z_0)$  (см. рис. 3). Пусть этот луч вышел под углом  $0 < \theta < \phi_0$ , где  $\phi_0$  – предельный угол полного внутреннего отражения. В силу постоянства волнового числа  $k$  в области I, в начале луч будет прямой линией. На границе раздела произойдет его отражение и преломление в область II. Искомая траектория является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\vec{s}_0}{c} \right) = \nabla \left( \frac{1}{c} \right), \quad (7)$$

где  $\vec{s}_0 = (\cos \phi, \sin \phi)$  – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением распространения луча. Скорость распространения волн в нижней полуплоскости равна

$$c(z) = \frac{\omega}{k(z)},$$

следовательно

$$\frac{1}{c(z)} = \frac{k}{\omega} \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 z}.$$

Выполняя дифференцирование в (7), приходим к системе дифференциальных уравнений с неизвестными функциями  $\phi(s)$ ,  $z(s)$ , где  $s$  – натуральный параметр естественной параметризации траектории луча:

$$\begin{cases} -2\dot{\phi} \sin \phi \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 z) + \cos \phi \cdot \alpha_2 \dot{z} = 0, \\ 2\dot{\phi} \cos \phi \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 z) + \sin \phi \cdot \alpha_2 \dot{z} = \alpha_2. \end{cases} \quad (8)$$

Точка над функцией в формулах (8) обозначает дифференцирование по переменной  $s$ . Обозначим за  $\beta$  угол преломления луча из верхней полуплоскости в нижнюю. Зная угол падения  $\theta$ , вычислив коэффициент преломления  $n = \frac{k(z=-0)}{k(z=+0)}$ , этот угол может быть вычислен по формуле Снеллиуса

$$\sin \beta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\alpha_1}}. \quad (9)$$

Решая систему (8), приходим к результату:

$$|\cos \phi| = \frac{c |\sin \beta|}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z}}. \quad (10)$$

Проанализируем полученное выражение. При  $z = 0$  угол  $\phi$  должен быть равен  $\frac{\pi}{2} - \beta$ , откуда находим неизвестную константу  $c = 1$ .

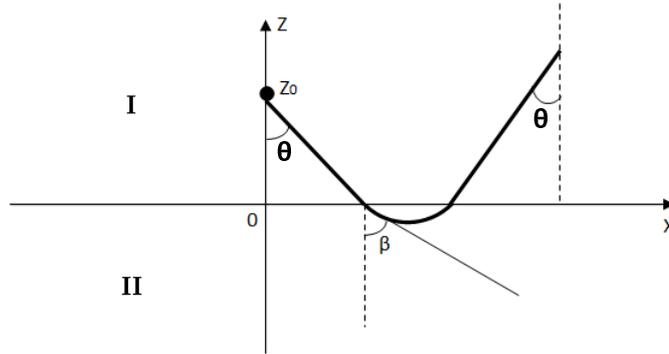


Рис. 3. Форма луча вышедшего из источника колебаний и испытавшего преломление на границе раздела сред.

Зададимся вопросом, есть ли такая точка на луче, в которой касательная к нему параллельна границе раздела сред. Если бы такая точка существовала, это бы означало, что волна соответствующая рассматриваемому лучу, преломившись в нижнюю полуплоскость, движется так, что начиная с некоторого момента вновь доходит до границы раздела сред, впоследствии отражаясь от нее и преломляясь в верхнюю полуплоскость. Эта точка определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \phi(z) = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11) приходим к выводу о том, что  $z$  — координата точки, начиная с которой волна начинает свое обратное движение в сторону границы, определяется формулой

$$z^* = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cos^2 \beta. \quad (12)$$

Посчитаем расстояние, которое проходит луч в нижней полуплоскости. Интегрируя тождество  $\operatorname{tg} \phi = \frac{dz}{dx}$ , имеем

$$x(z) = x(0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin \beta \int_{\cos^2 \beta}^{\cos^2 \beta + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z} \frac{dp}{\sqrt{p}},$$

$$x(z) - x(0) = 2 \sin \beta \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[ |\cos \beta| - \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z} \right]. \quad (13)$$

Выражение  $2 \cdot (x(z^*) - x(0))$  есть ни что иное, как длина проекции пути, пройденного лучем в области II на ось  $x$ , которую мы обозначим  $l_x$ . Подставляя (12) в (13), находим:

$$l_x = \frac{4}{\alpha_2} |\sin \theta| \sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \theta}. \quad (14)$$

### §3. ФРОНТ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ БУЛДЫРЕВА

В условиях поставленной задачи, волновой фронт головной волны Булдырева совпадает с фронтом классической головной волны (см. [1]). Соответствующий волновой фронт (участки  $b_1 b_3$  и  $a_3 a_5$  на рис. 4) представляет собой линию, к которой концентрируются поверхности постоянных фаз волн шепчущей галереи. Для построения этой линии зададимся постоянной  $f$  — значением фазы исследуемой волны и рассмотрим луч вышедший из источника под предельным углом полного внутреннего отражения  $\phi_0$ . Такой луч представляет собой ломанную состоящую из двух прямолинейных отрезков  $z_0 a_1$  и  $a_1 a_3$  (см. рис. 4). В силу (9) участок  $a_1 a_3$  — прямолинейный отрезок, который проходит преломленный луч, идущий вдоль границы раздела областей I и II. Точка  $a_3$  является функцией фазы  $f$ , соответствующая зависимость выражается формулой  $f = \frac{\omega}{c_1} |z_0 a_1| + \frac{\omega}{c_2} |a_1 a_3|$ . Распространяясь в области II, преломленная волна в каждой точке своего пути излучает вторичные волны, рефрагирующие в область I под углом  $\phi_0$ . Нетрудно проверить, что в момент времени  $t$ , в который волна, распространяющаяся вдоль границы раздела сред, достигнет точки  $a_3$ , каждая из соответствующих вторичных волн достигнет отрезка  $a_5 a_3$ , и лучи этих волн будут располагаться под прямым углом к указанному отрезку. Это доказывает тот факт, что волновой фронт головной волны Булдырева представляет собой прямолинейный отрезок  $a_3 a_5$ .

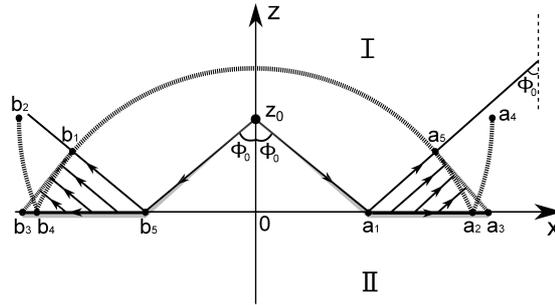


Рис. 4.  $b_1b_3$  и  $a_3a_5$  - волновой фронт головной волны Булдырева.  $b_4b_2$  и  $a_2a_4$  - части фронта падающей волны.  $b_4b_1$  и  $a_5a_2$  - части волнового фронта отраженной волны.

В настоящей работе подробные выкладки, необходимые для исследования структуры волновых фронтов опускаются. Пользуясь результатами раздела 2 настоящей статьи и проводя рассуждения аналогичные сделанным выше в следующем разделе получены утверждения, касающиеся структуры волновых фронтов волн шепчущей галереи.

#### §4. СТРУКТУРА И ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ ВОЛН ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ И ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ БУЛДЫРЕВА

Оказывается, структура волновых фронтов волн шепчущей галереи достаточно сложна. Каждый из них представляет собой кусочно-гладкую кривую. Конструктивно волновой фронт каждой волны шепчущей галереи, можно разделить на две гладкие кривые –  $K_iQ_i$  и  $Q_iP$ . Индекс  $i$  равен количеству переотражений рассматриваемой волны шепчущей галереи при распространении в области II. Точка  $P$  называется точкой выхода головной волны.

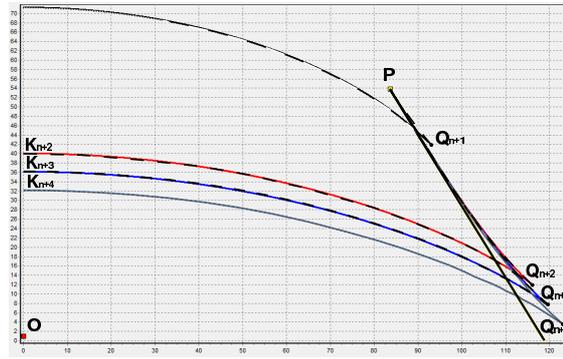


Рис. 5. Поверхности постоянной фазы головной волны Буддырева и волн шепчущей галереи: пунктирными линиями изображены волновые фронты волн шепчущей галереи. Жирная сплошная линия – волновой фронт головной волны Буддырева. Изображение получено в результате численного программирования волнового процесса в программе Delphi 7.

Существование сингулярных точек  $Q_i$  на поверхности постоянной фазы каждой из волн шепчущей галереи объясняется следующим образом. Обозначим  $t_0$  – время распространения головной волны на участке  $z_0 a_1 a_3$  (см. рис. 4). Для построения волнового фронта волны шепчущей галереи с  $i = n_0$  при  $t = t_0$  найдем точку  $T(\theta, t_0)$ , в которую придет к этому моменту времени волна вышедшая из источника под углом  $\theta$  спустя  $n_0$  переотражений и после повторной рефракции в область I. Из (14) следует, что существует угол  $\theta = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2}$  при котором  $l_x$  – значение длины проекции пути луча шепчущей галереи между двумя последовательными переотражениями в области II достигает максимума. Изменяя угол  $\theta$  от 0 до  $\frac{\sqrt{\alpha_1}}{2}$  получаем геометрическое место точек  $\{T(\theta, t_0) : \theta \in (0, \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2})\}$  соответствующее участку  $K_i Q_i$  волнового фронта. При дальнейшем увеличении угла  $\theta$  значение  $l_x$  будет уменьшаться, и кривая поверхности постоянной фазы рассматриваемой волны начнет “поворачиваться” влево. Эта точка  $Q_i$  и является сингулярной точкой волнового фронта.

Элементарно доказываются следующие утверждения:

**Утверждение 1.** Точка  $P$  является общей точкой волновых фронтов волн шепчущей галереи.

**Утверждение 2.** Участок волнового фронта волны шепчущей галереи с индексом  $i - K_i Q_i$  представляет собой выпуклую кривую,  $Q_i P$  – вогнутую.

**Утверждение 3.** Точки  $Q_1, Q_2, \dots$  лежат на одной прямой.

**Утверждение 4.** Участки волновых фронтов волн шепчущей галереи  $PQ_i$  в пределе при  $i \rightarrow \infty$  стремятся к поверхности постоянной фазы головной волны Булдырева.

Доказательства утверждений мы не приводим из-за их громоздкости и элементарности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских, Ю. П. Лысанов, *Теоретические основы акустики океана*. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
2. А. С. Алексеев, И. С. Вольвовский, Н. И. Ермилова, П. В. Крауклис, В. З. Рябой, *К вопросу о физической природе некоторых волн регистрируемых при ГСЗ*. М.: Изв. АН СССР. Сер. геофиз., No. 1, 1964.
3. В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения*. — ИВУЗ, **10**, No. 5 (1967), 699–711.
4. В. С. Булдырев, *Исследование функций Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре*. I. Ж. вычисл. матем. физ., **4** (1964), 275–286.
5. V. M. Babich, *On asymptotics of a wave field near the origin of an interference head wave*. Electromagnetics in Advanced Applications, 2007, 704–705.
6. V. M. Babich, *Boundary layer approach to construct an interference head wave*. Days on Diffraction, 2007, 19–21.
7. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. Наука, М. (1972).
8. А. А. Мацковский, *Коротковолновый точечный источник колебаний вблизи неоднородной полуплоскости*. — Мат. вопросы теории распространения волн. Зап. научн. сем. ПОМИ, **409** (2013), 107–120.
9. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. Советское радио, М. 1970.
10. V. B. Philippov, *Point source field near concave boundary. Mathematical problems in the theory of wave propagation*. — Zap. Nauchn. Semin. POMI, **354** (2008), 212–219.
11. А. А. Мацковский, *Головная волна интерференционного типа в задаче дифракции волн точечного источника на неоднородной полуплоскости*, 2014.

---

Matskovskiy A. A. Interference head wave in the problem of wave diffraction on homogenous halfplane.

We consider the diffraction of waves produced by a point source by unhomogenous halfplane. The square of wave number inside unhomogenous region is supposed to decrease linearly with increasing the distance from the division boundary. Using the results obtained in [11] the Buldyrev head wave and whispering gallery waves structure analysis is performed.

Санкт-Петербург, Россия

*E-mail:* androbasrm@rambler.ru

Поступило 30 сентября 2014 г.