

М. А. Лялинов

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИАГРАММА
РАССЕЯНИЯ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ДВУХ
СДВИНУТЫХ ВДОЛЬ ЛИНИИ КОНТАКТА
КЛИНЬЯХ С МНОГОУГОЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени различные методы были развиты с целью решения задач дифракции в клиновидных областях, имеющих различные скорости распространения. Среди наиболее важных и хорошо разработанных стоит упомянуть следующие подходы.

- Подходы, основанные на преобразовании Фурье и потенциалах простого (двойного) слоя (см., например, [1–5] и ссылки в них).
- Преобразование Конторовича–Лебедева и “спектральные” интегральные уравнения (для проницаемых клиньев, см., например, [6, 7] и ссылки в них). Для изучения дифракции на конусе преобразование Конторовича–Лебедева эффективно использовалось в работах [8–13].
- Техника Зоммерфельда–Малюжинца, функциональные уравнения Малюжинца и их редукция к интегральным (см., например, [11, 14, 15]). Различные полезные ссылки могут быть найдены в [16].
- Развитие вышеупомянутых и других специальных методов для сложных клиньев с многоугольной границей. Интересное развитие техники Зоммерфельда–Малюжинца с приложениями к дифракции на импедансном многоугольнике дано в [17]. Два других подхода обсуждаются в работах [18] (пары Лакса и совместный спектральный анализ) и [19] (вероятностный подход).

В следующих параграфах мы формулируем задачу и используем интегральное представление Конторовича–Лебедева (КЛ) для волновых

Ключевые слова: дифракция на двойном клине, интегральные уравнения, асимптотика дальнего поля.

Работа была выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00165а), а также грантов СПбГУ N 11.38.666.2013, N 11.38.215.2014.

полей, обсуждая сходимость интегралов. Посредством надлежащего выбора двух спектральных функций в подынтегральных выражениях мы удовлетворяем уравнениям Гельмгольца, а также частично краевым условиям. Мы подставляем интегралы КЛ в оставшиеся краевые условия и получаем их два интегральных эквивалента. Затем, обращая преобразование КЛ, приходим к системе интегральных уравнений второго рода для следов двух спектральных функций на границе. Ядра интегральных уравнений представляются произведениями функций Макдональда (модифицированных функций Бесселя). В приложении мы преобразуем некоторые функции в ядрах к упрощенной форме. Обсуждаются частные или предельные случаи полученных интегральных уравнений. В частности, мы рассматриваем случай, когда интегральные уравнения вырождаются и соответствующая граничная задача решается явно. С другой стороны, получены сингулярные интегральные уравнения в предельной ситуации, когда конечная часть границы сжимается в точку. Изучен частный случай уравнений, соответствующих совпадению скоростей в обоих клиньях. В этой ситуации сложные ядра уравнений выражаются в терминах функций Макдональда. В последнем параграфе мы изучаем преобразование представлений КЛ к интегралам Зоммерфельда и рассматриваем выражения для диаграммы рассеяния цилиндрической волны, распространяющейся от ребер на бесконечность.

Хотя набор ссылок не является полным, мы пытались выбрать из них наиболее представительные с нашей точки зрения.

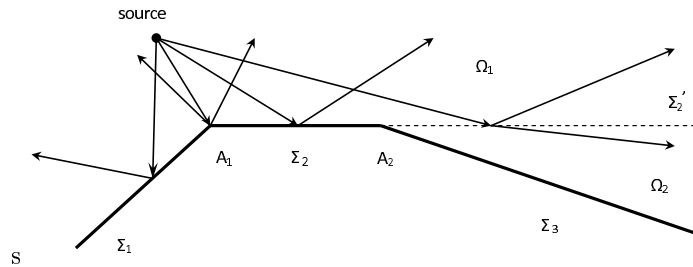


Рис. 1. Дифракция на двойном клине с многоугольной границей

§2. ПОСТАНОВКА

Рассматриваемая область состоит из двух клиньев (углов) Ω_1 и Ω_2 в R^2 (Рис. 1), имеющих общую часть границы Σ'_2 с традиционными краевыми условиями акустического контакта на них. Введем полярные координаты (r, φ) в Ω_1 с началом A_1 полярной оси, совпадающей с бисектриссой угла Ω_1 так, что

$$\Omega_1 = \{(r, \varphi) : r > 0, |\varphi| < \Phi\}, \quad 2\Phi > \pi.$$

Таким же образом, мы введем полярные координаты (ρ, ψ) в Ω_2 с началом в A_2 и бисектриссой Ω_2 так, что

$$\Omega_2 = \{(\rho, \psi) : \rho > 0, |\psi| < \Psi\}.$$

Остальные компоненты границы это Σ_1 , Σ_2 и Σ_3 , где Σ_2 конечный сегмент A_1A_2 длины a . Отметим, что $W = U + U_i$ (рассеянное плюс падающее поля) в Ω_1 и $W = V$ (полное поле) в Ω_2 . Волновое число в Ω_1 есть $k_1 = k$, а в Ω_2 $k_2 = kN$, где $N < 1$. Уравнения для полей имеют вид

$$(\Delta + k_1^2)U = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (1)$$

$$(\Delta + k_2^2)V = 0 \quad \text{в } \Omega_2. \quad (2)$$

Волновое поле возбуждается источником

$$U_i(r, r_0; \varphi, \varphi_0) = \frac{K_0(-ik\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|)}{2\pi},$$

где $K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{\frac{i\pi\nu}{2}} H_0^{(1)}(iz)$ функция Макдональда, $\mathbf{R} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, и $\mathbf{R}_0 = (r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$ описывают соответственно положение токи наблюдения и точки источника.

На многоугольной границе $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ полное акустическое давление W равно нулю (мягкая граница)

$$U + U_i|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0, \quad (3)$$

$$V|_{\Sigma_3} = 0, \quad (4)$$

тогда как на полубесконечной линии контакта акустических сред имеем

$$U + U_i|_{\Sigma'_2} = V|_{\Sigma'_2}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(U + U_i)}{\partial\varphi} \Big|_{\Sigma'_2} = \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial V}{\partial\psi} \Big|_{\Sigma'_2}, \quad (6)$$

λ отношение плотностей акустических сред. Условие Мейкснера в угловой точке A_1 и точке A_2 имеет вид

$$U(r, \varphi) = O(r^{\delta_1}), \quad V(\rho, \psi) = O(\rho^{\delta_2}) \quad (7)$$

равномерно по угловым переменным, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Похожие условия выполнены для U вблизи точки A_2 . На бесконечности удовлетворяются условия излучения

$$\int_{S_{r_1}} \left| \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right|^2 ds \rightarrow 0, \quad r_1 \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$\int_{S_{\rho_1}} \left| \frac{\partial V}{\partial \rho} - ikNV \right|^2 ds \rightarrow 0, \quad \rho_1 \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где S_{r_1} , S_{ρ_1} дуги окружностей в Ω_1 и Ω_2 соответственно.

В последующем нам важно иметь возможность варьировать аргумент волнового числа k так, что

$$|\arg(-ik)| < \pi/2 \quad (10)$$

и использовать аналитическое продолжение формул по волновому числу вплоть до $|\arg(-ik)| = \pi/2$.

§3. ИНТЕГРАЛЫ КОНТОРОВИЧА–ЛЕБЕДЕВА И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим интегральное представление Конторовича–Лебедева для падающего поля

$$U_i(r, r_0; \varphi, \varphi_0) = \frac{K_0(-ik\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|)}{2\pi} = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) u_\nu^i(\varphi) d\nu, \quad (11)$$

где

$$u_\nu^i(\varphi) = \frac{K_\nu(-ikr_0)}{2\pi} \cos(\nu[\pi - |\varphi - \varphi_0|]), \quad (12)$$

$iR = (-i\infty, i\infty)$. Ввиду выражения (12) и асимптотики

$$K_\nu(-ikr) \sim C|\nu|^{a_0-1/2} \frac{\cos(\nu[\pi/2 + |\arg(-ik)|])}{\sin \pi\nu}, \quad \nu \rightarrow i\infty, \quad a_0 = \operatorname{Re} \nu$$

мы можем утверждать, что интеграл (11) сходится при

$$|\varphi - \varphi_0| > 2|\arg(-ik)|,$$

что в дальнейшем подразумевается.

Неизвестное волновое поле удовлетворяет уравнениям (1), (2) и ищется в виде

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) u_\nu(\varphi) d\nu, \quad (13)$$

в Ω_1 ,

$$V(\rho, \psi) = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikN\rho) v_\nu(\psi) d\nu, \quad (14)$$

в Ω_2 . Для того, чтобы удовлетворить уравнениям Гельмгольца, потребуем, чтобы спектральные функции $u_\nu(\varphi)$ and $v_\nu(\psi)$ подчинялись уравнениям

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \nu^2 \right) u_\nu(\varphi) = 0, \quad \left(\frac{d^2}{d\psi^2} + \nu^2 \right) v_\nu(\psi) = 0, \quad (15)$$

так как $K_\nu(z)$ решение уравнения Бесселя

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right) K_\nu(z) = 0.$$

Решение уравнений (15) записывается в виде

$$u_\nu(\varphi) = A(\nu) \sin(\nu[\varphi - \Phi]) - u_\nu^i(\Phi) \cos(\nu[\varphi - \Phi]), \quad (16)$$

$$v_\nu(\psi) = B(\nu) \sin(\nu[\psi + \Psi]), \quad (17)$$

отмечая, что такой выбор позволяет удовлетворить также крайевым условиям на Σ_1 и Σ_3 . Коэффициенты $A(\nu)$ и $B(\nu)$ пока остаются неизвестными. Вместо неизвестных $A(\nu)$ и $B(\nu)$ удобно использовать неизвестные следы $u_\nu(-\Phi)$ и $v_\nu(\Psi)$ спектральных функций, удовлетворяющих равенствам

$$u_\nu(-\Phi) = -A(\nu) \sin(2\Phi\nu) - u_\nu^i(\Phi) \cos(2\Phi\nu),$$

$$v_\nu(\Psi) = B(\nu) \sin(2\Psi\nu).$$

Таким образом, из (16),(17) имеем

$$\begin{aligned} u_\nu(\varphi) &= \left(-\frac{u_\nu(-\Phi)}{\sin(2\Phi\nu)} - \frac{u_\nu^i(\Phi)}{\sin(2\Phi\nu)} \cos(2\Phi\nu) \right) \\ &\quad \times \sin(\nu[\varphi - \Phi]) - u_\nu^i(\Phi) \cos(\nu[\varphi - \Phi]), \\ v_\nu(\psi) &= \frac{v_\nu(\Psi)}{\sin(2\Psi\nu)} \sin(\nu[\psi + \Psi]). \end{aligned}$$

Спектральные функции являются очевидно четными по ν и предполагаются регулярными в некоторой окрестности мнимой оси. Мы также предполагаем справедливость следующих оценок ($|\varphi| < \Phi$, $|\psi| < \Psi$)

$$|u_\nu(\varphi)| < \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \min \left\{ \left| e^{-i\nu[|\arg(-ik)| + \pi/2 - |2\Phi - \varphi - \varphi_0|]} \right|, \right. \\ \left. \left| e^{-i\nu[|\arg(-ik)| + \pi/2 - |2\Phi + \varphi + \varphi_0|]} \right| \right\}, \quad (18)$$

$\nu \rightarrow i\infty$ и

$$|v_\nu(\psi)| < \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| e^{-i\nu[|\arg(-ikN)| + \pi/2 - |\psi - \psi_0|]} \right|, \quad (19)$$

где ψ_0 может быть найдено в геометрических терминах и выражается через r_0, φ_0, N, a .

Замечание. Оценки (18), (19) ограничивают поведение спектральных функций на бесконечности. Данные неравенства мотивированы ожидаемым поведением спектральных функций при $\nu \rightarrow i\infty$. Последнее же следует из геометрооптических рассмотрений отраженного и прошедшего поля. Например, волна отраженная от поверхности $\varphi = \Phi$ порождается мнимым источником в (r_0, φ_*) (зеркальный образ реального источника относительно $\varphi = \Phi$, где $\varphi_* = 2\Phi - \varphi_0$) и задается

$$U_*(r, r_0; \varphi, \varphi_*) = -\frac{K_0(-ik\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_*\|)}{2\pi} = -\frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) u_\nu^*(\varphi) d\nu, \quad (20)$$

причем

$$u_\nu^*(\varphi) = \frac{K_\nu(-ikr_0)}{2\pi} \cos(\nu[\pi - |\varphi - \varphi_*|]) \quad (21)$$

с оценкой

$$|u_\nu^*(\varphi)| \sim \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| e^{-i\nu[|\arg(-ik)| + \pi/2 - |2\Phi - \varphi - \varphi_0|]} \right|, \quad \nu \rightarrow i\infty.$$

Сходимость интегралов в (13), (14) гарантирована при условии

$$\min \{ |2\Phi - \varphi - \varphi_0|, |2\Phi + \varphi + \varphi_0| \} > 2|\arg(-ik)|$$

и

$$|\psi - \psi_0| > |\arg(-ikN)| + |\arg(-ik)|$$

соответственно.

3.1. Интегральные условия эквивалентные краевым на Σ_2 и Σ'_2 . Обратимся теперь к краевым условиям на Σ_2 и Σ'_2 , предполагая, что $\arg(k)$ изменяется надлежащим образом для обеспечения сходимости соответствующих интегралов КЛ при $\varphi = -\Phi$ и $\psi = \Psi$. Таким образом, из краевых условий (3) на Σ_2 имеем

$$\frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) (u_\nu(-\Phi) + u_\nu^i(-\Phi)) d\nu = 0 \quad \text{при } 0 < r < a \quad (22)$$

и таким же образом, из условий (5) и (6) мы можем написать

$$\frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) (u_\nu(-\Phi) + u_\nu^i(-\Phi)) d\nu = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikN\rho) v_\nu(\Psi) d\nu$$

при $r > a, \quad \rho = r - a > 0$ (23)

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i\pi} \int_{iR} \frac{K_\nu(-ikr)}{r} \left(-u_\nu(-\Phi) \frac{\nu \cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} - \frac{\nu u_\nu^i(\Phi)}{\sin(2\Phi\nu)} + (\partial_\varphi u_\nu^i)(-\Phi) \right) d\nu \\ & = \frac{\lambda}{i\pi} \int_{iR} \frac{K_\nu(-ikN\rho)}{\rho} v_\nu(\Psi) \frac{\nu \cos(2\Psi\nu)}{\sin(2\Psi\nu)} d\nu, \quad \text{при } r > a, \quad \rho = r - a > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Условия (22) и (23) могут быть представлены в объединенной форме

$$\frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) (u_\nu(-\Phi) + u_\nu^i(-\Phi)) d\nu = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} H(\rho) K_\nu(-ikN\rho) v_\nu(\Psi) d\nu, \quad (25)$$

при $r > 0$, где $H(\rho)$ функция Хевисайда, $r = \rho + a$.

Отметим, проверка условий Мейкснера на ребрах может быть выполнена посредством преобразований аналогичным тем, что обсуждаются в конце параграфа 5.2.2 в [11].

§4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ДВУХ НЕИЗВЕСТНЫХ $u_\nu(-\Phi)$ И $v_\nu(\Psi)$

Дальнейшее преобразование условий (24) и (25) связано со свойствами преобразования Конторовича–Лебедева, т.е. с возможностью обращения прямого преобразования КЛ. Существуют несколько подходов, связанных с теорией преобразования Конторовича–Лебедева.

Один из них, обсуждаемый в приложении в [13] (см. также [11], параграф 1.4.4), основан на комплексной форме преобразования и использует возможность варьировать $\operatorname{arg}(k)$ как отмечалось выше. Другие подходы рассматриваются в работах [20, 21].

Основную роль в последующих преобразованиях играет условие “ортогональности” для функций Макдональда

$$\lim_{w \rightarrow 0+} \frac{(-k)\nu \sin \pi\nu}{(i\pi)^2} \int_0^{\infty} K_{\nu}(-ik\rho) K_{\mu}(-ik\rho) (-ik\rho)^{-1+w} d\rho = \frac{\delta(\mu - \nu) + \delta(\mu + \nu)}{2}, \quad (26)$$

где $\delta(\cdot)$ дельта-функция Дирака на мнимой оси ($\delta(\mu) = \delta(\operatorname{Im}\mu)/i$), а предел понимается в смысле обобщенных функций (см., например, [11], параграф 1.4.4).

Умножим обе части уравнения (25) на

$$\frac{(-k)}{i\pi} K_{\mu}(-ikr)(-ikr)^{-1+w}$$

и проинтегрируем по $r \in (0, \infty)$. В левой части перейдем к пределу при $w \rightarrow 0+$ и используем (26), таким образом, получим

$$\frac{u_{\mu}(-\Phi) + u_{\mu}^i(-\Phi)}{\mu \sin \pi\mu}.$$

В правой части введем новую переменную интегрирования $r = \rho + a$, поменяем порядок интегрирования по r и ν , что оправдано, затем перейдем к пределу. После простых преобразований в обеих частях приходим к интегральному уравнению

$$\frac{u_{\mu}(-\Phi) + u_{\mu}^i(-\Phi)}{\cos(\pi\mu/2)} = \int_{iR} P(\mu, \nu; N, a) \frac{v_{\nu}(\Psi)}{\cos(\pi\nu/2)} d\nu \quad (27)$$

вместе с

$$P(\mu, \nu; N, a) = \frac{(-k)2\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2}}{(i\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(-ik[\rho + a]) K_{\nu}(-ikN\rho)}{(-ik[\rho + a])} d\nu, \quad (28)$$

где интеграл сходится равномерно по μ и ν и задает аналитическую функцию по μ и ν в некоторой полосе, содержащей мнимую ось.

Совершенно аналогично с проделанным выше умножим обе части в (24) на

$$\frac{(-kN)}{i\pi} K_\mu(-ikN\rho)(-ikN\rho)^w/(-ikN)$$

проинтегрируем по $\rho \in (0, \infty)$, поменяем порядки интегрирования и, затем, перейдем к пределу при $w \rightarrow 0+$ и используем (26). В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{v_\mu(-\Phi)}{\cos(\pi\mu/2)} = & \lambda^{-1} \int_{iR} d\nu Q(\mu, \nu; N, a) \frac{\nu \sin(2\Psi\mu)}{\mu \cos(2\Psi\mu)} \left(-\frac{u_\nu(-\Phi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{\cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} \right. \\ & \left. - \frac{u_\nu^i(\Phi)}{\cos(\pi\nu/2) \sin(2\Phi\nu)} + \frac{(\partial_\varphi u_\nu^i)(-\Phi)}{\nu \cos(\pi\nu/2)} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

вместе с

$$Q(\mu, \nu; N, a) = \frac{(-k)2\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2}}{(i\pi)^2} \int_0^\infty \frac{K_\nu(-ik[\rho+a]) K_\mu(-ikN\rho)}{(-ik[\rho+a])} d\rho. \quad (30)$$

Очевидно, что

$$\frac{P(\mu, \nu; N, a)}{2\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2}} = \frac{Q(\nu, \mu; N, a)}{2\nu \sin \frac{\pi\nu}{2} \cos \frac{\pi\mu}{2}}. \quad (31)$$

Вводя обозначения

$$p(\mu) = \frac{u_\mu(-\Phi)}{\cos(\pi\mu/2)}, \quad q(\mu) = \frac{v_\mu(\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)},$$

мы запишем систему интегральных уравнений в виде

$$\begin{aligned} p(\mu) &= \int_{iR} d\nu P(\mu, \nu; N, a) q(\nu) + p_i(\mu), \\ q(\mu) &= - \int_{iR} d\nu Q(\mu, \nu; N, a) \left(\frac{\lambda^{-1}\nu \sin(2\Psi\mu)}{\mu \cos(2\Psi\mu)} \frac{\cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} \right) p(\nu) + q_i(\mu), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$p_i(\mu) = -\frac{u_\mu^i(-\Phi)}{\cos(\pi\mu/2)},$$

$$q_i(\mu) = -\lambda^{-1} \int_{iR} d\nu Q(\mu, \nu; N, a) \frac{\nu \sin(2\Psi\mu)}{\mu \cos(2\Psi\mu)}$$

$$\times \left(\frac{u_\nu^i(\Phi)}{\cos(\pi\nu/2) \sin(2\Phi\nu)} - \frac{(\partial_\varphi u_\nu^i)(-\Phi)}{\nu \cos(\pi\nu/2)} \right).$$

Замечательно, что функции P , Q (28) и (31) в ядрах могут быть существенно упрощены, что следует из Леммы, которая детально обоснуется в приложении.

Лемма. Пусть $b = -ika$, $|\arg(b)| < \pi/2$ и $N < 1$, тогда справедливы следующие представления для $P(\mu, \nu; N, a)$ и $Q(\mu, \nu; N, a)$, которые заданы (28) и (30) ($\mu, \nu \in iR$),

$$P(\mu, \nu; N, a) = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{2i\pi \sin \frac{\pi\nu}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sinh \tau e^{-b \cosh \tau}}{\sqrt{\cosh^2 \tau - N^2}}$$

$$\times \sin(i\mu\tau) \sin \left(i\nu \operatorname{arccosh} \left[\frac{\cosh \tau}{N} \right] \right), \quad (33)$$

$$Q(\mu, \nu; N, a) = \frac{\mu \cos \frac{\pi\nu}{2}}{2i\pi\nu \cos \frac{\pi\mu}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sinh \tau e^{-b \cosh \tau}}{\sqrt{\cosh^2 \tau - N^2}}$$

$$\times \sin(i\nu\tau) \sin \left(i\mu \operatorname{arccosh} \left[\frac{\cosh \tau}{N} \right] \right). \quad (34)$$

Отметим, что в (33) и (34) мы интегрируем вдоль вещественной оси так, что стандартные ветви $\sqrt{\cdot}$ и $\operatorname{arccosh}(\cdot)$ принимают свои главные значения.

Ввиду оценок (18) и (19) мы можем утверждать, что

$$|p(\nu)| < \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| e^{-i\nu[|\arg(-ik)| - |\Phi + \varphi_0|]} \right|,$$

$\nu \rightarrow i\infty$ и

$$|q(\nu)| < \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| e^{-i\nu[|\arg(-ikN)| - |\Psi - \psi_0|]} \right|,$$

следовательно, $p(\cdot), q(\cdot)$ принадлежит $L_2(iR)$ при условии

$$\begin{aligned} |\Phi + \varphi_0| &> |\arg(-ik)|, \\ |\Psi - \psi_0| &> |\arg(-ikN)|. \end{aligned}$$

Мы также имеем, что $p_i(\cdot), q_i(\cdot)$ принадлежат $L_2(iR)$, следовательно систему интегральных уравнений (32) естественно рассматривать в $L_2(iR)$.

Важный и нетривиальный вопрос состоит в изучении фредгольмовости системы (32), который мы рассмотрим в другом месте. В следующем параграфе мы обсудим частные или предельные случаи полученных уравнений. Эти частные случаи соответствуют специальным, но важным случаям исследуемой задачи дифракции, которые имеют также и независимое значение.

§5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЧАСТНЫМ ИЛИ ПРЕДЕЛЬНЫМ СЛУЧАЯМ

Наиболее простая и очевидная редукция касается предельного случая $a \rightarrow \infty$ или (и) $\Psi \rightarrow 0$. В этой ситуации область второго клина Ω_2 вырождается и мы получаем решение для $p(\mu)$ и $q(\mu)$

$$p(\mu) = p_i(\mu), \quad q(\mu) = 0.$$

В данном случае формула (13) вместе с (16) задает известное решение задачи дифракции на идеальном клине с условием Дирихле на границе.

5.1. Дифракция волнового поля от точечного источника на идеальной многоугольной границе ($N = 1, \lambda = 1$) и спектральные интегральные уравнения. Этот предельный случай соответствует дифракции волн в $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ с идеальной многоугольной границей при условии, что волновые скорости и плотности акустических сред в Ω_1 and Ω_2 одинаковы.

Если $N \rightarrow 1 - 0$, функции

$$P(\mu, \nu; N, a) = \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{\sin \frac{\pi\nu}{2}} W(\mu, \nu; N, a)$$

и

$$Q(\mu, \nu; N, a) = \frac{\mu \cos \frac{\pi\nu}{2}}{\nu \cos \frac{\pi\mu}{2}} W(\mu, \nu; N, a)$$

в (33),(34) дополнительно преобразуются с использованием Леммы

$$W(\mu, \nu; N, a) := \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sinh \tau e^{-b \cosh \tau}}{\sqrt{\cosh^2 \tau - N^2}} \times \sin(i\mu\tau) \sin\left(i\nu \operatorname{arccosh} \left[\frac{\cosh \tau}{N} \right]\right) \quad (35)$$

и записываются в виде

$$W(\mu, \nu; 1, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-b \cosh \tau} \sin(i\mu\tau) \sin(i\nu\tau).$$

Простые преобразования приводят к выражениям

$$W(\mu, \nu; 1, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\infty} d\tau e^{-b \cosh \tau} [\cosh([\mu - \nu]\tau) - \cosh([\nu + \mu]\tau)]$$

и (см. [22], 8.432(1), $|\arg b| < \pi/2$, $b = -ika$)

$$W(\mu, \nu; 1, a) = \frac{K_{\mu-\nu}(b) - K_{\mu+\nu}(b)}{2i\pi}. \quad (36)$$

Теперь спектральные интегральные уравнения задачи принимают вид

$$\begin{aligned} p(\mu) &= \int_{i\mathbb{R}} d\nu \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{\sin \frac{\pi\nu}{2}} \left(\frac{K_{\mu-\nu}(b) - K_{\mu+\nu}(b)}{2i\pi} \right) q(\nu) + p_i(\mu), \\ q(\mu) &= - \int_{i\mathbb{R}} d\nu \frac{\cos \frac{\pi\nu}{2}}{\cos \frac{\pi\mu}{2}} \left(\frac{K_{\mu-\nu}(b) - K_{\mu+\nu}(b)}{2i\pi} \right) \\ &\quad \times \frac{\sin(2\Psi\mu) \cos(2\Phi\nu)}{\cos(2\Psi\mu) \sin(2\Phi\nu)} p(\nu) + q_i^1(\mu). \end{aligned} \quad (37)$$

Замечание. Подход, описанный в [23], может быть использован и для исследования нормальной разрешимости и индекса уравнений (37).

5.2. Редукция системы (32) к сингулярным интегральным уравнениям в случае $a \rightarrow 0$. Дифракционные явления возникают в этом случае благодаря взаимодействию падающего поля с двумя контактирующими клиньями с общим ребром, $A_1 = A_2$. Этот двойной клин $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ отделен от внешности идеальной угловой границей.

В этом предельном случае оказываются полезными следующие наблюдения. Во-первых, в смысле обобщенных функций справедлива формула (см., например, [6], (3.23))

$$\lim_{w \rightarrow 0+} \frac{(-k)\nu \sin \pi\nu}{(i\pi)^2} \int_0^{\infty} K_{\nu}(-ik\rho) K_{\mu}(-ikN\rho) (-ik\rho)^{-1+w} d\rho = \mathcal{W}(\nu, \mu; N) \quad (38)$$

вместе с

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\nu, \mu; N) &= \frac{\delta(\mu - \nu) + \delta(\mu + \nu)}{2} + \frac{i\nu \sin \pi\nu}{4} N^{\mu} (1 - N^2) \\ &\times \frac{F(1 + \frac{\mu+\nu}{2}, 1 + \frac{\mu-\nu}{2}; 2, 1 - N^2)}{\cos \pi\nu - \cos \pi\mu}, \end{aligned}$$

$N \leq 1$, F гипергеометрическая функция (см. также [8]). С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{w \rightarrow 0+} \frac{(-k)\mu \sin \pi\mu}{(i\pi)^2} \int_0^{\infty} K_{\mu}(-ik\rho) K_{\nu}(-ikN\rho) (-ik\rho)^{-1+w} d\rho \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-k)\mu \sin \pi\mu}{(i\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(-ik[\rho + a]) K_{\nu}(-ikN\rho)}{(-ik[\rho + a])} d\rho = \mathcal{W}(\mu, \nu; N). \end{aligned} \quad (39)$$

Принимая во внимание формулы (38), (39) и (28), мы можем ввести сингулярный интегральный оператор равенством

$$(\mathcal{W}h)(\mu) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{iR}^{\cos \frac{\pi\mu}{2}} \frac{\cos \frac{\pi\mu}{2}}{\cos \frac{\pi\nu}{2}} P(\mu, \nu; N, a) h(\nu) d\nu$$

или равносильно

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}h)(\mu) &:= \int_{iR}^{\cos \frac{\pi\mu}{2}} \mathcal{W}(\mu, \nu; N) h(\nu) d\nu, \\ (\mathcal{W}h)(\mu) &= h(\mu) + (1 - N^2) \mu \sin(\pi\mu) \\ &\times v.p. \int_{iR}^{\cos \frac{\pi\mu}{2}} d\nu \frac{iN^{\nu}}{4} \frac{F(1 + \frac{\mu+\nu}{2}, 1 + \frac{\nu-\mu}{2}; 2, 1 - N^2)}{\cos \pi\mu - \cos \pi\nu} h(\nu), \end{aligned}$$

понимаемые в смысле обобщенных функций, $h(\nu) = h(-\nu)$. Последнее интегрирование выполняется в смысле главного значения.

Таким же образом, имеем

$$(\mathcal{W}^t h)(\mu) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{iR} \frac{\nu \sin \frac{\pi\nu}{2}}{\mu \sin \frac{\pi\mu}{2}} Q(\mu, \nu; N, a) h(\nu) d\nu,$$

вместе с

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}^t h)(\mu) &:= \int_{iR} \mathcal{W}(\nu, \mu; N) h(\nu) d\nu \\ &= h(\mu) + (1 - N^2) N^\mu v.p. \\ &\int_{iR} d\nu \frac{i\nu \sin(\pi\nu)}{4} \frac{F(1 + \frac{\mu+\nu}{2}, 1 + \frac{\mu-\nu}{2}; 2, 1 - N^2)}{\cos \pi\nu - \cos \pi\mu} h(\nu), \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}^t(\mu, \nu; N) = \mathcal{W}(\nu, \mu; N).$$

В этих обозначениях система (32) преобразуется при $a \rightarrow 0$ в систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} p(\mu) &= \int_{iR} d\nu \mathcal{W}(\mu, \nu; N) \left(\frac{\cos \frac{\pi\nu}{2}}{\cos \frac{\pi\mu}{2}} \right) q(\nu) + p_i(\mu), \\ q(\mu) &= - \int_{iR} d\nu \mathcal{W}^t(\mu, \nu; N) \left(\frac{\lambda^{-1} \sin(2\Psi\mu)}{\cos(2\Psi\mu)} \frac{\cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{\sin \frac{\pi\nu}{2}} \right) \\ &\quad \times p(\nu) + q_i^0(\mu), \end{aligned} \quad (40)$$

где сингулярные интегральные операторы \mathcal{W} и \mathcal{W}^t определены выше. Стоит отметить, что фредгольмовость подобных сингулярных операторов обсуждалась в работе [9]. По-видимому, такая же мотивировка могла бы быть использована и для рассматриваемых уравнений.

§6. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ И ДИАГРАММА РАССЕЯНИЯ

Недостатком интегральных представлений Конторовича–Лебедева является то обстоятельство, что они в действительности используются для комплексных k и аналитическое продолжение этих представлений на вещественные k требует дополнительной работы. Однако, известная связь интеграла Конторовича–Лебедева с интегралом Зоммерфельда дает возможность преодолеть эти трудности. Такой подход был эффективно использован для вычисления асимптотики дальнего поля при рассеянии на импедансных клиньях и конусах (см., например, [11]).

Мы можем воспользоваться стандартным выражением функции Макдональда в терминах функции Бесселя, таким образом, получим (13)

$$\begin{aligned}
 U(r, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{iR} \frac{e^{i\pi\nu/2} J_{-\nu}(kr) - e^{-i\pi\nu/2} J_{\nu}(kr)}{\sin \pi\nu} u_{\nu}(\varphi) d\nu \quad (41) \\
 &= \frac{1}{4\pi i} \int_{iR} d\nu \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \left(\frac{e^{i\nu\alpha} - e^{-i\nu\alpha}}{\sin \pi\nu} \right) u_{\nu}(\varphi) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \left\{ \int_{iR} d\nu \left(\frac{e^{i\nu\alpha} - e^{-i\nu\alpha}}{2 \sin \pi\nu} \right) u_{\nu}(\varphi) \right\},
 \end{aligned}$$

где мы использовали интегральное представление Зоммерфельда для функции Бесселя

$$J_{\nu}(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr - i\nu\alpha + i\pi\nu/2}$$

(см. Рис. 2 для γ_-) и поменяли порядок интегрирования, что может быть оправдано. Введем формальным равенством функцию

$$\Psi_-(\alpha, \varphi) = i \int_{iR} \frac{\sin \nu\alpha}{\sin \pi\nu} u_{\nu}(\varphi) d\nu$$

и, ввиду оценки (18), заключаем, что она регулярна в полосе

$$|\operatorname{Re}(\alpha)| < \pi/2 + d(\varphi, \varphi_0, \Phi) - |\arg(-ik)|$$

и $d(\varphi, \varphi_0, \Phi) = \min \{ |2\Phi - \varphi - \varphi_0|, |2\Phi + \varphi + \varphi_0| \}$.

Аналитическое продолжение функции $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ на более широкую полосу является важной задачей и будет рассмотрена в другой публикации. Результаты такого продолжения позволяют нам заключить, что функция $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ также регулярна в верхней и нижней полуплоскости и имеет вещественные особенности, если $|\alpha| \geq d(\varphi, \varphi_0, \Phi)$ при $k > 0$. $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ нечетная функция α . Мы можем выписать представление Зоммерфельда волнового поля в Ω_1

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \Psi_-(\alpha, \varphi). \quad (42)$$

Отметим, что аналогичные формулы могут быть получены для $V(\rho, \psi)$ в Ω_2 .

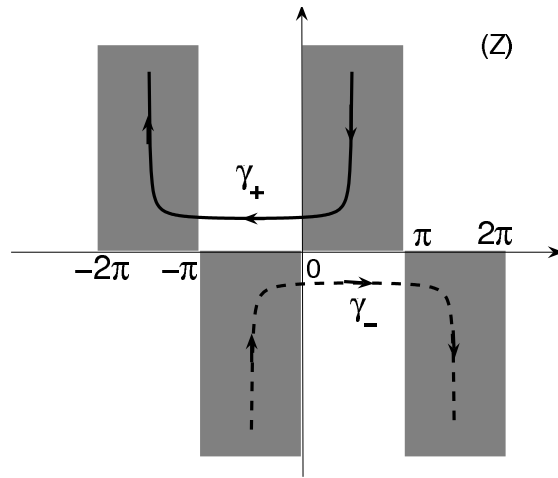


Рис. 2. Контуры Зоммерфельда

Теперь мы кратко опишем способ вычисления асимптотики дальнего поля из интеграла Зоммерфельда (42) при $kr \rightarrow \infty$, $k > 0$. Деформируем контур γ_- в перевальные γ_π и γ_0 (Рис. 3). В процессе такой деформации вещественные особенности $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ (см. Рис. 3) могут быть захвачены и приведут к геометрическим вкладам в дальнее поле (например, отраженные волны)

$$U(r, \varphi) = U_{GO}(r, \varphi) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\pi} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \Psi_-(\alpha, \varphi),$$

причем, интегральный член оценивается с помощью метода перевала.

Однако, если $d(\varphi, \varphi_0, \Phi) > \pi$ никакие особенности не захватываются. В соответствующих направлениях имеется только цилиндрическая волна

$$U(r, \varphi) = \mathcal{Q}(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right), \quad (43)$$

где

$$\mathcal{Q}(\varphi; k) = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \Psi_-(\pi, \varphi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{i\sqrt{2\pi k}} \int_{iR} u_\nu(\varphi) d\nu \quad (44)$$

диаграмма рассеяния, которая задается значением трансформанты Зоммерфельда в седловой точке π . Отметим, что контур γ_0 не дает вклада в волновое поле, так как подынтегральное выражение является нечетной функцией и интеграл по γ_0 равен нулю.

Замечание. Формула (44) для диаграммы рассеяния верна в подобласти в Ω_1 , где цилиндрическая волна является единственным вкладом в дальнее поле. Однако, интеграл в (44) расходится в областях, где $0 \leq |2\Phi - \varphi - \varphi_0| \leq \pi$ или $0 \leq |2\Phi + \varphi + \varphi_0| \leq \pi$, т.е. соответствующие особенности захватываются контуром при деформации его в перевальный γ_π . Принимая во внимание старший член $u_\nu(\varphi)$ при $\nu \rightarrow i\infty$ (который ведет к расходимости интеграла), мы вычтем его из $u_\nu(\varphi)$. Для углов наблюдения φ , удовлетворяющих условию $\Phi - \varphi_0 < 2\Phi - \varphi - \varphi_0 < \pi - \epsilon$ ($\epsilon > 0$ малое), диаграмма рассеяния принимает вид

$$Q(\varphi; k) = \frac{e^{-i\pi/4}}{i\sqrt{2\pi k}} \int_{iR} \left(u_\nu(\varphi) - \frac{(-K_\nu(-ikr_0))}{2\pi} \cos(\nu[\pi - |\varphi - (2\Phi - \varphi_0)|]) \right) d\nu.$$

В случае $2\Phi - \varphi - \varphi_0 \sim \pi$ точка наблюдения находится в полутени для волны, отраженной от грани $\varphi = \Phi$, и последняя формула для диаграммы рассеяния становится неверной, а рассеянное поле описывается интегралами Френеля [15].

Другой способ расширить область применимости выражения для диаграммы рассеяния (44) связан с представлением соответствующего интеграла посредством техники суммирования Абеля–Пуассона [24].

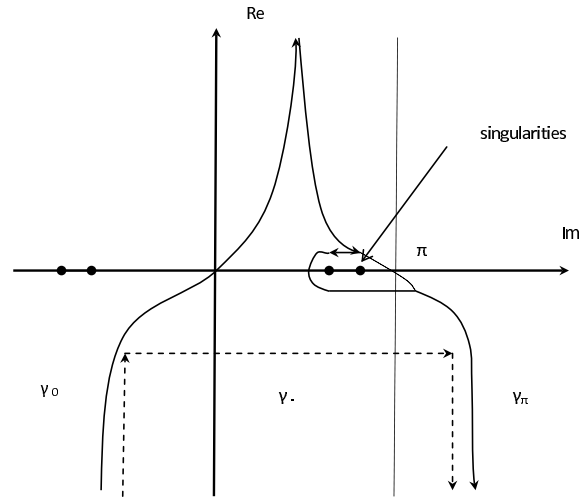
§7. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ P И Q В ЯДРЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введем параметр $b = -ika$ и предположим, что $b > 0$, что возможно ввиду (10). В интеграле (28) мы введем новую переменную интегрирования $z = -ik\rho$, $z > 0$

$$P(\mu, \nu; N, a) = \frac{(-2i)\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2}}{(i\pi)^2} \int_0^\infty \frac{K_\mu(z+b) K_\nu(zN)}{z+b} dz. \quad (45)$$

Воспользуемся представлениями Зоммерфельда для функции Макдональда (см., например, [22])

$$K_\nu(Nz) = \frac{i}{2} \int_{\gamma_*} d\beta e^{Nz \cos \beta} \frac{\sin \nu\beta}{\sin \pi\nu},$$

Рис. 3. Деформация контура интегрирования γ_-

$$\frac{K_\mu(z+b)}{z+b} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_*} d\alpha e^{(z+b)\cos\alpha} \frac{\sin\alpha \cos\mu\alpha}{\mu \sin\pi\mu},$$

где γ_* контур в нижней полуплоскости, $\gamma_* = (-\pi - i\infty, -\pi - id) \cup (-\pi - id, \pi - id) \cup (\pi - id, \pi - i\infty)$, $d > 0$, и подставим в (45). Таким образом, после смены порядка интегрирования и сокращений получим

$$\begin{aligned} P(\mu, \nu; N, a) &= \lim_{\substack{c \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow \infty}} \frac{i/8\pi^2}{\cos\frac{\pi\mu}{2} \sin\frac{\pi\nu}{2}} \int_{\gamma_*} d\alpha \int_{\gamma_*} d\beta \sin\alpha \cos\mu\alpha \sin\nu\beta \\ &\quad \times \left(\int_c^R dz e^{[Nz \cos\beta + (z+b)\cos\alpha]} \right) \\ &= \lim_{\substack{c \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow \infty}} \frac{i/8\pi^2}{\cos\frac{\pi\mu}{2} \sin\frac{\pi\nu}{2}} \int_{\gamma_*} d\alpha \int_{\gamma_*} d\beta \sin\alpha \cos\mu\alpha \sin\nu\beta \\ &\quad \times \frac{e^{[NR \cos\beta + (R+b)\cos\alpha]} - e^{[Nc \cos\beta + (c+b)\cos\alpha]}}{[N \cos\beta + \cos\alpha]}. \end{aligned} \quad (46)$$

Мы хотели бы деформировать контуры интегрирования γ_* . Множество нулей знаменателя в последней строчке равенств (46)

$$\mathcal{N} = \{(\alpha, \beta) \in C \times C : N \cos \beta + \cos \alpha = 0\}$$

лежит в области регулярности подынтегрального выражения, так как знаменатель также обращается в ноль на множестве \mathcal{N} . Деформируем контуры γ_* на комплексных плоскостях α и β одновременно в контуры $\gamma_{-\pi} \cup \gamma_0$, где $\gamma_{-\pi} = (-\pi - i\infty, -\pi + i\infty)$ и $\gamma_0^* = (-\pi + i\infty, -\pi) \cup [-\pi, \pi] \cup [-\pi, \pi - i\infty)$. Заметим, что контур γ_0^* симметричен по отношению к началу, а подынтегральное выражение нечетно по α и β по отдельности, следовательно соответствующие интегралы равны нулю. После перехода к пределу мы получаем

$$P(\mu, \nu; N, a) = \frac{(-i)/8\pi^2}{\cos \frac{\pi\mu}{2} \sin \frac{\pi\nu}{2}} \int_{\gamma_{-\pi}} d\alpha \int_{\gamma_{-\pi}} d\beta e^{b \cos \alpha} \frac{\sin \alpha \cos \mu\alpha \sin \nu\beta}{[N \cos \beta + \cos \alpha]}. \tag{47}$$

Интеграл по β может быть явно вычислен (см. [22], 3.983(1))

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{-\pi}} d\beta \frac{\sin \nu\beta}{[N \cos \beta + \cos \alpha]} &= 2i \sin \pi\nu \int_0^\infty dt \frac{\cos(i\nu t)}{[N \cosh t - \cos \alpha]} \\ &= 2\pi i \frac{\sin(i\nu \operatorname{arccosh} [\frac{\cosh \tau}{N}])}{\sqrt{\cosh^2 \tau - N^2}} \end{aligned}$$

при $N < 1$, $\alpha = -\pi + i\tau$, $\tau \in R$. После простых преобразований, из (47) мы приходим к

$$\begin{aligned} P(\mu, \nu; N, a) &= \frac{\sin \frac{\pi\mu}{2}}{2\pi i \sin \frac{\pi\nu}{2}} \int_{-\infty}^\infty d\tau \frac{e^{-b \cosh \tau} \sinh \tau}{\sqrt{\cosh^2 \tau - N^2}} \\ &\quad \times \sin(i\mu\tau) \sin\left(i\nu \operatorname{arccosh} \left[\frac{\cosh \tau}{N}\right]\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что это выражение для $P(\mu, \nu; N, a)$ допускает аналитическое продолжение со значений $b > 0$ на область $|\arg(b)| < \pi/2$, $b = -ika$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. K. Gautesen, *Scattering of a Rayleigh wave by an elastic quarter space-revisited*. — Wave Motion **35** (2002a), 91–98.
2. A. K. Gautesen, *Scattering of a Rayleigh wave by an elastic quarter space-revisited*. — Wave Motion **35** (2002b), 417–424.
3. K. Fujii, *Rayleigh-wave scattering of various wedge corners: Investigation in the wider range of wedge angles*. — Bull. Seismol. Soc. Am. **84** (1994), 1916–1924.
4. J.-P. Croisille, G. Lebeau *Diffraction by an Immersed Elastic Wedge*. Lecture notes in mathematics, Vol. 1723, Springer-Verlag, Berlin, (1999)
5. V. V. Kamotski, G. Lebeau, *Diffraction by an elastic wedge with stress free boundary: Existence and uniqueness*. — Proc. Roy. Soc. A **462**(2065) (2006), 289–317.
6. A. D. Rawlins, *Diffraction by, or diffusion into, a penetrable wedge*. — Proc. R. Soc. A **455** (1999), 2655–2686.
7. M. A. Salem, A. H. Kamel, A. V. Osipov, *Electromagnetic fields in the presence of an infinite dielectric wedge*. — Proc. Roy. Soc. A **462** (2072) (2006), 2503–2522.
8. D. S. Jones, *Rawlin's method and the diaphanous cone*. — Quaterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **53**, No. 1 (2000), 91–109.
9. M. A. Lyalinov, *Acoustic scattering of a plane wave by a circular penetrable cone*. — Wave Motion, V. 48, 1, 62–82, (doi:10.1016/j.wavemoti.2010.07.002), (2011).
10. J. M. L. Bernard, *Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction d'ondes par une singularité conique: équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d'impédance constante*, rapport CEA-R-5764, Editions Dist-Saclay, 1997. (erratum in J. Phys. A, vol.32, p.L45)
11. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions*. (Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication). Edison, NJ: SciTech-IET, 2012.
12. J.-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Diffraction of acoustic waves by an impedance cone of an arbitrary cross-section*. — Wave Motion **33** (2001), 155–181 (erratum : p.177 replace $O(1/\cos(\pi(\nu - b)))$ by $O(\nu^d \sin(\pi\nu)/\cos(\pi(\nu - b)))$).
13. J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Electromagnetic scattering by a smooth convex impedance cone*. — IMA J. Appl. Math. **69** (3) (2004), 285–333 (multiply $\sin(\zeta)$ by $n/|n|$ in (D.20) of appendix D)
14. B. V. Budaev, *Diffraction by wedges*. — Pitman Research Note in Mathematics, vol. 322, Longman Scientific and technical, Essex (1995).
15. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov., *Diffraction Theory. The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*. — Alpha Science Ser. Wave Phenom. (Alpha Science, Oxford 2008).
16. Y. A. Kravtsov, N. Y. Zhu, *Theory of Diffraction. Heuristic Approach*. — Alpha Science Ser. Wave Phenom. (Alpha Science, Oxford 2010).
17. J.-M. L. Bernard, *A spectral approach for scattering by impedance polygons*. — Q. Jl. Mech. Appl. Math. **59**, No. 4 (2006), 517–550.
18. A. S. Fokas, *Two Dimensional Linear PDETs in a Convex Polygon*. — Proc. R. Soc. Lond. A **457** (2001), 371–393.
19. B. V. Budaev, D. B. Bogy, *Diffraction by a convex polygon with side-wise constant impedance*. — Wave Motion **43** (8) (2006), 631–645.

20. D. S. Jones, *The Kontorovich–Lebedev transform*. — J. Inst. Maths Applies **26** (1980), 133–141.
21. А. Д. Авдеев, С. М. Грудский, *О модифицированном преобразовании Конторовича–Лебедева и его приложения к задаче дифракции цилиндрической волны на идеально проводящем клине*. — Радиотехника и электроника **39**, No. 7 (1994), 1081–1089.
22. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*. 4th ed., Academic Press, Orlando, (1980).
23. Л. С. Раковщик, *Системы интегральных уравнений с почти разностными операторами*. — Сибирский Мат. Журнал, **3**, No. 2 (1962), 250–255.
24. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev, *On Evaluation of the Diffraction Coefficients for Arbitrary 'Nonsingular' Directions of a Smooth Convex Cone*. — SIAM J. Appl. Math. **60**, No. 2 (2000), 536–573.

Lyalinov M. A. Integral equations and scattering diagram in the problem of diffraction by two wedges shifted along the line of contact with polygonal boundary.

In this work we study the acoustic problem of diffraction by two wedges with different wave velocities. It is assumed that the wedges with parallel edges have a common part of the boundary and the second wedge is shifted with respect of the first one in the orthogonal to the edges direction along the common part of the boundary. The wave field is governed by the Helmholtz equations. On the the polygonal boundary, separating these shifted wedges from the exterior, the Dirichlet boundary condition is satisfied. The wave field is excited by an infinite filamentary source which is parallel to the edges. In these conditions the problem is effectively two dimensional. We apply Kontorovich–Lebedev transform in order to separate radial and angular variables and to reduce the problem at hand to integral equations of the second kind for the so called spectral functions. The kernel of the integral equations given in the form of integral of the Macdonald functions product is analytically transformed to a simplified expression. For the problem at hand some reductions of the equations are also discussed for the limiting or degenerate values of parameters. Exploiting an alternative integral representation of the Sommerfeld type, expressions for the scattering diagram is then given in terms of the spectral functions.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 1 октября 2014 г.