

А. И. Корольков, А. В. Шанин

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФРАКЦИИ  
ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАЙНШТЕЙНОВСКИХ  
ЗАДАЧ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа представляет собой объемный комментарий к работам [1–3], посвященным решению задач вайнштейновского класса. Под вайнштейновскими задачами понимаются задачи о дифракции высокочастотной волны на периодической дифракционной решетке, состоящей из идеально поглощающих экранов. Предполагается, что падающая волна распространяется под скользящим углом к решетке.

Ранее в работах авторов рассмотрение проводилось в параболическом приближении теории дифракции (в котором существуют идеально поглощающие экраны). Приближение параболического уравнения теории дифракции является традиционным для задач вайнштейновского класса (см., например, [4]). В рамках предложенной авторами техники параболическое уравнение делает прозрачным смысл всех основных формул. Но в то же время применение параболического уравнения сопряжено с рядом серьезных теоретических проблем. А именно, необходимо определить, в каком классе функций и в каком смысле ищется решение параболического уравнения, необходимо корректно поставить условия излучения и условия в вершинах, а также доказать теорему существования и единственности решения поставленной задачи. Необходимость вводить краевые функции Грина в параболическом приближении порождает еще больше математических сложностей.

Вместо этого мы развиваем другой подход. Рассмотрим задачу излучения из открытого торца волновода (именно эта задача является

---

*Ключевые слова:* дифракционная решетка, поглощающие экраны, параболическое приближение.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-02-00573, НШ-283.2014.2, а также грантом Правительства РФ 11.G34.31.0066.

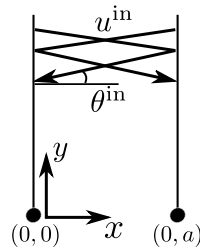


Рис. 1. Геометрия волновода

мотивацией для изучения дифракции на решетке поглощающих экранов). При этом будем рассматривать моду на частоте, близкой к отсечке. Это означает, что бриллюэновские парциальные волны распространяются почти перпендикулярно к оси волновода. Будем описывать распространение волн от стенки к стенке как дифракцию Френеля. Ядро интеграла Френеля представляет собой в точности функцию Грина параболического уравнения теории дифракции, что объясняет возможность доказать все необходимые результаты в рамках теории Френеля без того, чтобы доказывать весьма тонкие результаты математической физики. При этом подход, основанный на параболическом уравнении, и подход, основанный на теории Френеля, оказываются математически эквивалентны и приводят к одним и тем же формулам.

Нам бы хотелось сохранить оба взгляда на вайнштейновские задачи (параболическое уравнение и интегралы Френеля), поскольку первый подход дает понимание природы выводимых формул, а второй — простоту и строгость доказательств. Поэтому везде ниже мы будем параллельно излагать результаты в обоих формализмах. Изложение будет вестись на примере классической задачи Вайнштейна [1, 4].

## §2. Задача Л. А. Вайнштейна в точной и приближенных формулировках

**2.1. Постановка задачи Л. А. Вайнштейна.** Рассмотрим задачу о двумерном волноводе с геометрией, изображенной на Рис. 1. Стенки представляют собой полупрямые  $y > 0$ ,  $x = 0, a$ . На плоскости  $(x, y)$

(везде, кроме стенок волновода) выполняется уравнение Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)\tilde{u}(x, y) = 0. \quad (1)$$

На стенках заданы граничные условия Неймана. Падающая волна бежит по волноводу в сторону отрицательных  $y$  и имеет вид:

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{-iky \sin \theta^{\text{in}}\} \cos(kx \cos \theta^{\text{in}}), \quad (2)$$

где  $\theta^{\text{in}}$  – угол распространения бриллюэновской парциальной волны. Этот угол удовлетворяет условию

$$\exp\{2ika \cos \theta^{\text{in}}\} = 1, \quad (3)$$

следующему из граничных условий. Рассеянное поле в волноводу представляется в виде разложения по волноводным модам:

$$\tilde{u}^{\text{sc}} \equiv \tilde{u} - \tilde{u}^{\text{in}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{R}_n \exp\{iky \sin \theta_n\} \cos(kx \cos \theta_n), \quad (4)$$

где  $\tilde{R}_n$  – коэффициенты рассеяния в волноводные моды,  $\theta_n$  – углы, под которыми распространяются парциальные волны. Значения  $\theta_n$  удовлетворяют соотношению:

$$\exp\{2ika \cos \theta_n\} = 1. \quad (5)$$

Таким образом, для нахождения рассеянного поля необходимо определить коэффициенты отражения  $\tilde{R}_n$ .

Рассеянное поле должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда, а полное поле – условиям Мейкснера в вершинах. В такой постановке задача дифракции на торце плоского волновода была решена Л. А. Вайнштейном с помощью метода Винера–Хопфа [5]. Далее мы будем рассматривать лишь случай падения высокочастотной волны при частоте, близкой к частоте отсечки, то есть мы будем требовать выполнения следующих условий:

$$ka \gg 1, \quad \theta^{\text{in}} \ll 1. \quad (6)$$

Л. А. Вайнштейном было показано, что при выполнении более сильного условия

$$\theta^{\text{in}} \sqrt{ka} \ll 1 \quad (7)$$

падающая волна почти полностью отражается от торца волновода с коэффициентом отражения, близким к  $-1$ . Это наиболее ценный с физической точки зрения результат, поскольку он объясняет высокую

добротность резонаторов типа Фабри–Перо. Поправка к  $-1$  позволяет вычислить потери в таких резонаторах.

Малость угла падения позволяет считать дифракционный процесс приосевым и использовать приближение Френеля, учитывая лишь дифракцию под малыми углами.

**2.2. Применение метода отражений и формулировка задачи на разветвленной поверхности.** Приступим к формулировке задачи Л. А. Вайнштейна на многолистной поверхности. Разрежем физический лист (исходную плоскость  $(x, y)$ ) вдоль стенок волновода. Построим бесконечное число копий физического листа, снабдив их целыми индексами (физическому листу присвоим индекс 0). Листы с нечетными индексами симметрично отразим вокруг вертикальной оси. Склеим получившиеся листы по правилу, показанному на Рис. 2. Получим разветвленную поверхность, имеющую бесконечное число точек ветвления второго порядка и бесконечное число листов.

В рамках подхода, предложенного Зоммерфельдом, перейдем от рассмотрения задачи на плоскости с экранами к рассмотрению задачи на многолистной поверхности без экранов, но с точками ветвления. Известно, что эти задачи эквивалентны.

К сожалению, построенная поверхность имеет сложную структуру и её трудно анализировать. Вместо этого мы будем исследовать поверхность изображенную на Рис. 3. Она состоит из основного листа с бесконечным количеством разрезов вдоль линий  $x = an, y < 0$  и вспомогательных листов, имеющих по одному разрезу. Вспомогательные листы проиндексированы целыми числами, а основной лист помечен буквой  $i$ . Лист с индексом  $n$  имеет разрез вдоль линии  $x = an, y < 0$ . Схема соединения листов показана на рисунке.

Понять, что поверхности, изображенные на Рис. 2 и Рис. 3, эквивалентны (точнее, что это разные способы разрезать одну и ту же поверхность), можно следующим образом. Для этого достаточно заметить, что основной лист соответствует внутренности волновода, а по вспомогательным листам распространяются волны вышедшие из волновода. Строгое доказательство эквивалентности поверхностей содержится в Приложении А.

Падающее поле  $\tilde{u}^{\text{in}}$  на поверхности, изображенной на Рис. 3, представляет собой сумму двух плоских волн распространяющихся под

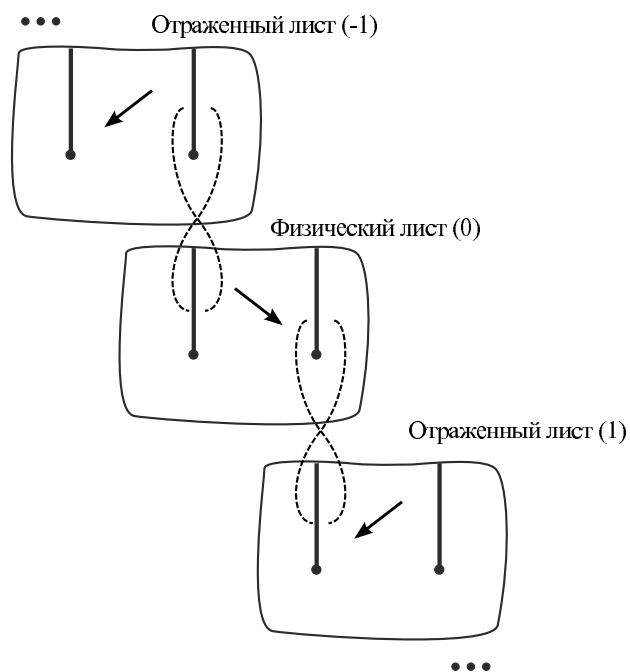


Рис. 2. Многолистная поверхность

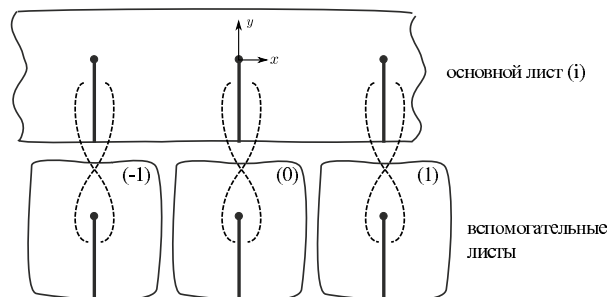


Рис. 3. Альтернативное представление многолистной поверхности

углом  $\theta^{\text{in}}$  и  $\pi - \theta^{\text{in}}$  к оси  $x$ . Вследствие линейности задачи, будем рассматривать только волну распространяющуюся под углом  $\theta^{\text{in}}$ :

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{-iky \sin \theta^{\text{in}} + ikx \cos \theta^{\text{in}}\}, \quad (8)$$

При необходимости решение с двумя волнами может быть получено с помощью принципа суперпозиции. Таким образом, с помощью метода отражений мы свели задачу о дифракции на торце плоского волновода к задаче о рассеянии плоской волны на точках ветвления многолистной поверхности. Математическая постановка задачи для уравнения Гельмгольца (1) ничем не отличается от постановки задачи, например, на двулистной поверхности с одной точкой ветвления, рассмотренной Зоммерфельдом [6].

Новая задача ставится следующим образом. На периодическую решетку, состоящую из точек ветвления разветвленной поверхности, по основному листу падает высокочастотная плоская волна под скольльзящим углом. Периодичность геометрии задачи приводит к тому, что в верхней полуплоскости на основном листе поле, рассеянное решеткой, представляется в виде ряда по дифракционным максимумам. Необходимо определить коэффициенты рассеяния в эти максимумы. Эти коэффициенты, очевидно, равны коэффициентам отражения в волноводные моды для исходной задачи.

**2.3. Параболическое уравнение на разветвленной поверхности.** Малость угла падения  $\theta^{\text{in}}$  и малость длины волны по сравнению с периодом  $a$  позволяет рассматривать данную задачу в параболическом приближении теории дифракции. Это означает, что мы пренебрегаем цилиндрическими волнами, рассеянными точками ветвления под большим углом. Таким образом, имеется основное направление распространения (ось  $x$ ), а волновое поле представляется в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \exp\{ikx\}u(x, y), \quad (9)$$

где функция  $u$  зависит от своих аргументов медленно (по сравнению с экспонентой). Подставляя (9) в (1) и пренебрегая членом содержащим вторую производную по  $x$  (см. [7]), получим, что  $u$  приближенно удовлетворяет параболическому уравнению теории дифракции:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (10)$$

Падающая волна (8) в параболическом приближении переходит в

$$u^{\text{in}}(x, y) = \exp\{-ikx(\theta^{\text{in}})^2/2 - ik\theta^{\text{in}}y\}. \quad (11)$$

Падающая волна приходит сверху по основному листу, который представляет собой многократно отраженную внутренность волновода (см. Рис. 3). На остальных листах падающей волны нет, поскольку в терминах исходной задачи это означало бы наличие падающей волны снаружи волновода. На основном листе полное поле представляет собой сумму падающего и рассеянного поля:

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}. \quad (12)$$

На вспомогательных листах поле представлено только рассеянной частью. Разумеется, при этом рассеянное поле является разрывным на линиях склейки листов (полное поле на линиях склейки, разумеется, непрерывно). На основном листе рассеянная часть поля удовлетворяет параболическому уравнению везде вне разрезов.

Условие (3) в параболическом приближении переходит в

$$\exp\{2ika(1 - (\theta^{\text{in}})^2/2)\} = 1. \quad (13)$$

Рассеянное поле на основном листе при  $y > 0$  имеет вид

$$u^{\text{sc}} = \sum_n R_n \exp\{-ikx\theta_n^2/2 + ik\theta_n y\}. \quad (14)$$

где

$$\theta_n = \left( (\theta^{\text{in}})^2 + \frac{2\pi n}{ka} \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Последнее равенство следует из параболического аналога (5). Отметим, что  $\theta_0 = \theta^{\text{in}}$ .

Условия в вершинах для параболического уравнения переходят в требование ограниченности поля  $u(x, y)$  вблизи точек ветвления (тем самым гарантируется отсутствие источников в точках ветвления). Условие излучения заключается в отсутствии в поле  $u^{\text{sc}}$  компонент, распространяющихся из бесконечности к линии  $y = 0$ . В Приложении Б это условие формулируется с помощью принципа предельного поглощения.

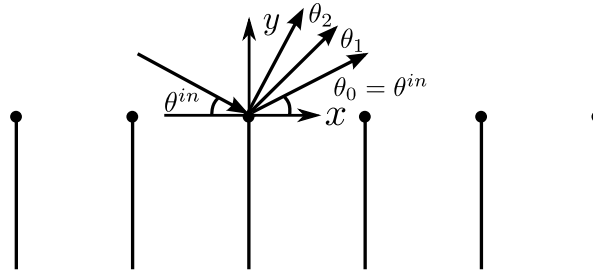


Рис. 4. Геометрия решетки. Вертикальные линии соответствуют поглощающим экранам

Поведение решений параболического уравнения на разветвленной поверхности отличается от поведения решения уравнения Гельмгольца на такой же поверхности. Различия вызваны тем, что параболическое уравнение имеет первый порядок по переменной  $x$ . Эти различия заключаются в следующем. Рассмотрим вспомогательный лист с индексом  $n$ . Поскольку на этом листе падающей волны нет, на этом листе поле  $u$  равно нулю при  $x < an$ . Для построения на этом листе волнового поля при  $x > an$  необходимо решать для параболического уравнения задачу Коши с начальными данными  $u(an + 0, y) = 0, y > 0$ ;  $u(an + 0, y) = u_i(an - 0, y), y < 0$ , где  $u_i(an - 0, y)$  — поле на основном листе слева от разреза.

Разрезы на основном листе можно рассматривать в качестве полностью поглощающих экранов в том смысле, что полное поле  $u(x, y)$  на основном листе справа от каждого из разрезов равно нулю. Причина этого заключается в том, что поле на основном листе справа от разреза непрерывно продолжает поле слева от разреза на вспомогательном листе, а там оно равно нулю. Таким образом, в параболическом приближении задача о рассеянии на решетке из точек ветвления эквивалентна задаче о рассеянии на решетке из идеально поглощающих экранов. Геометрия задачи о решетке из поглощающих экранов показана на Рис.4.

Такой подход не нов и впервые был предложен Фоксом и Ли [8] в применении к резонатору Фабри–Перо. Формулировка задачи на плоскости с поглощающими экранами является предпочтительной (по



сравнению с формулировкой на многолистной поверхности), поскольку позволяет рассматривать поле на одном листе. Ниже мы придерживаемся именно такой формулировки. Поле на вспомогательных листах необходимо строить, если надо проанализировать рассеяние из торца волновода в окружающее пространство.

Сформулируем граничные условия для рассеянного поля  $u^{\text{sc}}$  на основном листе поверхности. В соответствии со сказанным, на правых берегах разрезов, т. е. при  $x = an + 0$ ,  $y < 0$ , полное поле должно быть равно нулю. Это значит, что

$$u^{\text{sc}}(an + 0, y) = \psi_n(y), \quad y < 0, \quad (16)$$

где

$$\psi_n(y) \equiv -u^{\text{in}}(an, y) = -\exp\{-ikan(\theta^{\text{in}})^2/2 - ik\theta^{\text{in}}y\}. \quad (17)$$

В данной постановке задача Вайнштейна была решена авторами в работе [1], кроме того были рассмотрены более общие случаи в работах [2, 3].

Поставленная задача для  $u^{\text{sc}}$  обладает геометрической периодичностью. Кроме того, правая часть граничных условий обладает свойством

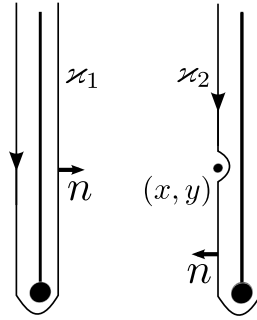
$$\psi_{n+1}(y) = \gamma\psi_n(y), \quad \gamma \equiv \exp\{-ika(\theta^{\text{in}})^2/2\}. \quad (18)$$

В соответствии с принципом Флоке, аналогичному соотношению должно удовлетворять решение:

$$u^{\text{sc}}(x + a, y) = \gamma u^{\text{sc}}(x, y). \quad (19)$$

Перечислим последовательность переформулировок исходной задачи об отражении от торца волновода для уравнения Гельмгольца.

- Применен метод отражений, сформулирована задача для уравнения Гельмгольца на многолистной поверхности.
- Изменены положения разрезов для многолистной поверхности (от Рис. 2 к Рис. 3). Также изменены обозначения листов.
- Падающая волна (2), состоящая из двух парциальных волн, заменена на волну (8), представляющую собой одну парциальную волну.
- Уравнение Гельмгольца заменено на параболическое уравнение теории дифракции.
- Вспомогательные листы многолистной поверхности убраны, разрезы превращены в идеально поглощающие экраны.

Рис. 5. Контура  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ .

Как было сказано выше, для поставленной задачи дифракции в параболическом приближении есть определенные сложности с доказательством теоремы существования и единственности решения. Поэтому далее мы обратимся к формализму, построенному с помощью интегралов Френеля, где подобных проблем не возникает.

**2.4. Описание задачи о волноводе с помощью интегралов Френеля.** Вернемся к классической задаче Л. А. Вайнштейна (Рис. 1) для уравнения Гельмгольца (1). Применим вторую формулу Грина ко всей плоскости, из которой извлечены окрестности стенок волновода. Границей извлеченных областей служат контура  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , изображенные на Рис. 5:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\tilde{u}(x, y) \\ &= - \int_{\kappa_1 + \kappa_2} \left[ \tilde{u}(x', y') \frac{\partial G}{\partial n}(x - x', y - y') - G(x - x', y - y') \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(x', y') \right] dl, \end{aligned} \quad (20)$$

где немые переменные  $x', y'$  пробегают значения по контуру  $\kappa_1 + \kappa_2$ ,

$$G(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (21)$$

$H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода. Контур  $\kappa_2$  обходит точку  $(x, y)$  по полуокружности радиуса  $\epsilon$ ; рассматривается предел при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Нормаль  $n$  направлена, как изображено на Рис. 5. Учитывая, что на стенках волновода выполняются граничные условия Неймана, имеем

$$\tilde{u}(a, y) = -2 \int_{z_1} \tilde{u}(0, y') \frac{\partial G(a, y - y')}{\partial n} dy'. \quad (22)$$

Воспользуемся приближением Киргхофа, а именно пренебрежем интегралом по теневой поверхности экрана. Будем рассматривать дифракцию в приближении Френеля, т. е. учтем, что дифракция происходит под малыми углами, а падающая волна является высокочастотной и близкой к частоте отсечки (6). В таком случае справедлива следующая аппроксимация ядра интегрального уравнения (22):

$$-2 \frac{\partial G(x - x', y - y')}{\partial n} \approx g(x - x', y - y') \exp\{ik(x - x')\}, \quad (23)$$

где

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \exp\left\{ik\frac{y^2}{2x} - i\pi/4\right\}. \quad (24)$$

Как и раньше,  $u(x, y) = \tilde{u}(x, y) \exp\{-ikx\}$ .

Функция  $g(x, y)$  определена при  $x > 0$ . Для удобства доопределим ее как ноль при  $x < 0$ . При  $x = 0$  функция имеет разрыв. Используя (9) и (23), получим приближенное интегральное уравнение:

$$u(a, y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y') u(0, y') dy', \quad y > 0. \quad (25)$$

Еще раз применяя формулу Грина, получаем второе уравнение:

$$e^{-2ika} u(0, y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y') u(a, y') dy', \quad y > 0. \quad (26)$$

Перейдем теперь к рассеянным полям  $u^{sc}(0, y)$  и  $u^{sc}(a, y)$ . Учитывая легко проверяемый факт, что при  $x > x'$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x - x', y - y') u^{in}(x', y') dy' = u^{in}(x, y), \quad (27)$$

получим интегральные соотношения для функций:  $u^{\text{sc}}(0, y)$  и  $u^{\text{sc}}(a, y)$

$$u^{\text{sc}}(a, y) = \int_0^{\infty} u^{\text{sc}}(0, y')g(a, y - y')dy' - \int_{-\infty}^0 u^{\text{in}}(0, y')g(a, y - y')dy', \quad (28)$$

$$e^{-2ika} u^{\text{sc}}(0, y) = \int_0^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y')g(a, y - y')dy' - \int_{-\infty}^0 u^{\text{in}}(a, y')g(a, y - y')dy'. \quad (29)$$

Для произвольной функции  $v(\cdot)$  введем операторы

$$\Pi_{++}[v(\cdot)](y) = \int_0^{\infty} v(y')g(a, y - y')dy', \quad y > 0 \quad (30)$$

$$\Pi_{+-}[v(\cdot)](y) = \int_{-\infty}^0 v(y')g(a, y - y')dy', \quad y > 0 \quad (31)$$

$$\Pi_{-+}[v(\cdot)](y) = \int_0^{\infty} v(y')g(a, y - y')dy', \quad y < 0 \quad (32)$$

$$\Pi_{--}[v(\cdot)](y) = \int_{-\infty}^0 v(y')g(a, y - y')dy', \quad y < 0 \quad (33)$$

Здесь имеется в виду, что результат действия оператора  $\Pi_{++}$  или  $\Pi_{+-}$  доопределен нулем при  $y \leq 0$ , а результат действия оператора  $\Pi_{-+}$  или  $\Pi_{--}$  доопределен нулем при  $y \geq 0$ .

Свойство (27) в новых обозначениях переписется в виде

$$\Pi_{--}[\psi_0](y) + \Pi_{-+}[\psi_0](y) + \Pi_{+-}[\psi_0](y) + \Pi_{++}[\psi_0](y) = e^{-ika} \psi_0(y). \quad (34)$$

Уравнения (28) и (29) запишутся в виде

$$u^{\text{sc}}(a, y) = \Pi_{++}[u^{\text{sc}}(0, \cdot)](y) - \Pi_{+-}[u^{\text{in}}(0, \cdot)](y), \quad (35)$$

$$e^{-2ika} u^{\text{sc}}(0, y) = \Pi_{++}[u^{\text{sc}}(a, \cdot)](y) - \Pi_{+-}[u^{\text{in}}(a, \cdot)](y). \quad (36)$$

**2.5. Аналог метода отражений для описания с помощью френелевских интегралов.** Применение метода отражений и переход от задачи о рассеянии на торце волновода к задаче о рассеянии на решетке из точек ветвления (или эквивалентной ей задаче о рассеянии на решетке из поглощающих экранов) имеет важное теоретическое значение, поскольку позволяет ввести краевые функции Грина. Здесь строится аналог метода отражений для уравнений (35), (36).

Применим “метод отражений” к системе (35), (36). Прежде всего, пользуясь (13), заметим, что

$$e^{-2ika} = \gamma^2.$$

Кроме того, в правых частях (35) и (36) можно использовать обозначения (17). Введя обозначения

$$u_0(y) \equiv u^{sc}(0, y), \quad u_1(y) \equiv u^{sc}(a, y), \quad y > 0 \quad (37)$$

перепишем (35), (36) в виде

$$u_1(y) = \Pi_{++}[u_0](y) + \Pi_{+-}[\psi_0](y), \quad (38)$$

$$\gamma^2 u_0(y) = \Pi_{++}[u_1](y) + \Pi_{+-}[\psi_1](y), \quad (39)$$

Данная система замкнута относительно двух неизвестных функций. Построим бесконечную систему, обобщающую (38), (39). Для этого введем неизвестные функции  $u_n(y)$ ,  $y > 0$ , не только для  $n = 0, 1$ , но и для всех целых  $n$  и сформулируем цепочку уравнений

$$u_{n+1}(y) = \Pi_{++}[u_n](y) + \Pi_{+-}[\psi_n](y). \quad (40)$$

Очевидно, если построено решение системы (38), (39), то построено и решение системы (40).

Цепочка уравнений (40) представляет собой основные уравнения, которые решаются в рамках развиваемого авторами метода. Именно для этих уравнений вводятся краевые функции Грина и строится формула расщепления. Правой частью для этой цепочки будем называть набор известных функций  $\psi_n(y)$ .

В силу (18) решение системы (40) должно удовлетворять условию Флоке

$$u_{n+1}(y) = \exp\{-ika\theta_0^2/2\}u_n(y), \quad (41)$$

т. е. система (40) редуцируется к уравнению

$$\gamma u_0(y) = \Pi_{++}[u_0](y) + \Pi_{+-}[\psi_0](y). \quad (42)$$

Система (40) представляет собой аналог применения принципа отражения к (38), (39). Главный выигрыш, который мы получаем, сравнивая (40) с (38), и (39) с (42) – это возможность исследовать решения этой системы при произвольном наборе функций  $\psi_n$ , а не только для функций (17). В частности, краевая функция Грина получается, если положить  $\psi_n(y) = \delta_{n,0}\delta(y)$ .

Цепочка (40) позволяет выписать формальное решение уравнения (42):

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{-n} (\Pi_{++})^{n-1} \Pi_{+-} [\psi_0] \quad (43)$$

(в том, что данная функция является решением (42), можно убедиться прямой подстановкой).

**2.6. Эквивалентность параболического уравнения и интегралов Френеля.** Вернемся к рассмотрению задачи дифракции на многолистной поверхности (Рис. 3) в параболическом приближении. Главным преимуществом использования метода параболического уравнения заключается в упрощении описания распространения волн вдоль координаты  $x$ . Действительно, в любой полосе  $x' < x < x''$  без препятствий или точек ветвления поле  $u(x, y)$  описывается следующей интегральной формулой:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y') g(x - x', y - y') dy', \quad (44)$$

где  $g$  – та же самая функция, что была введена выше для интегралов Френеля. Цепочка уравнений (40) связана с параболическим уравнением следующим образом. Пусть функции  $u_n(y)$ ,  $y > 0$ , введенные в предыдущем разделе, есть значения поля  $u(an, y)$  на основном листе поверхности, на которой выполняется параболическое уравнение. Пусть на этом листе выполняются граничные условия (16). Тогда формула (44) для  $x' = an$ ,  $x = a(n+1)$  представляет собой (40).

Отметим, что для определения поля на всей поверхности достаточно решить уравнения (40) на основном листе, а потом воспользоваться формулой (44) на вспомогательных листах.

**2.7. Формулы для коэффициентов отражения.** Предположим, что цепочка уравнений (40) каким-либо образом решена. Для решения

поставленной дифракционной задачи необходимо вычислить коэффициенты  $R_n$  разложения (14). В настоящем разделе будут построены формулы, выражающие  $R_n$  через функции  $u_n(y)$ . Формула, которую мы собираемся доказывать, имеет следующий вид:

$$R_n = -\frac{\gamma^{-1}}{a\theta_n} \int_{-\infty}^0 \exp\{-ik\theta_n y\} (\Pi_{-+}[u_0](y) + \Pi_{--}[\psi_0](y) - \gamma\psi_0(y)) dy. \quad (45)$$

Вывод этой формулы в рамках формализма параболического уравнения подробно описан в [2]. Приведем его здесь в сокращенном виде.

Во-первых, для коэффициентов  $R_n$  справедлива следующая формула:

$$R_n = \frac{\exp\{-ik\theta_n y_*\}}{a} \int_0^a u^{sc}(x, y_*) \exp\{ikx\theta_n^2/2\} dx \quad (46)$$

для любого  $y_* > 0$ . Для доказательства этого утверждения заметим, что функция

$$u^{sc}(x, y) \exp\{ikx\theta_n^2/2\}$$

периодична по  $x$ . Разложение этой функции в ряд Фурье дает (14). Коэффициенты разложения даются формулой (46). Дифференцируя (46) по  $y_*$ , получаем еще одно выражение для  $R_n$ :

$$R_n = \frac{\exp\{-ik\theta_n y_*\}}{ik\theta_n a} \int_0^a \frac{\partial u^{sc}(x, y_*)}{\partial y_*} \exp\{ikx\theta_n^2/2\} dx. \quad (47)$$

Во-вторых, в [2] было показано, что для параболического уравнения справедлива формула Грина. Пусть пара функций  $u(x, y)$  и  $w(x, y)$  удовлетворяют в некоторой области  $\Omega$  однородным уравнениям

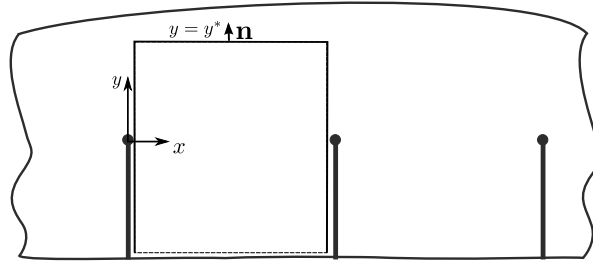
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = 0, \quad \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = 0. \quad (48)$$

Тогда выполняется равенство

$$\int_{\partial\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})w - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v] dl = 0, \quad (49)$$

где  $\mathbf{n}$  - внешняя единичная нормаль к границе  $\partial\Omega$ , а векторные потоки  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  задаются как

$$\mathbf{v} = (ikv, \partial_y v) \quad \mathbf{w} = (-ikw, \partial_y w). \quad (50)$$

Рис. 6. Область  $\Omega$  для вывода (51)

Применяя формулу Грина с функциями

$$v = u^{\text{sc}}(x, y) \quad w = \exp\{ikx\theta_n^2/2 -iky\theta_n\}$$

по области, изображенной на Рис. 6, и используя формулу (46), легко получить следующее выражение для коэффициентов  $R_n$ :

$$R_n = -\frac{1}{\theta_n a} \int_{-\infty}^0 (u^{\text{sc}}(x-0, y) - u^{\text{sc}}(x+0, y)) \exp\{-iky\theta_n\} dy. \quad (51)$$

Нижний участок контура на Рис. 6 соответствует  $y = -L$ , при  $L \rightarrow -\infty$ . Верхний участок есть отрезок  $y = y_*$ ,  $0 < x < a$ . Действительно, применяя (49) получим:

$$\begin{aligned} & \exp\{-ik\theta_n y_*\} \int_0^a [\partial_{y_*} u_{\text{sc}} + ik\theta_n] \exp\{ikx\theta_n^2/2\} dx \\ &= 2ik \int_0^{-\infty} u^{\text{sc}}(x-0, y) \exp\{-iky\theta_n\} dy \\ &+ 2ik \int_{-\infty}^0 u^{\text{sc}}(x+0, y) \exp\{-iky\theta_n\} dy. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь мы учли, что интегралы по отрезкам  $x = 0$ ,  $0 < y < y_*$  и  $x = a$ ,  $0 < y < y_*$  компенсируют друг друга из-за периодичности. Группируя члены, а также используя (46) и (47), получаем (51).



Заметим, что в (51)

$$\begin{aligned} u^{\text{sc}}(x-0, y) &= \Pi_{-+}[u_{-1}](y) + \Pi_{--}[\psi_{-1}](y) \\ &= \gamma^{-1}(\Pi_{-+}[u_{-1}](y) + \Pi_{--}[\psi_{-1}](y)), \quad y < 0 \end{aligned}$$

в силу (44). кроме того,

$$u^{\text{sc}}(x+0, y) = \psi_0(y), \quad y < 0$$

в силу граничных условий. В результате (51) сводится к (45).

Выведем представление (46) с помощью формализма интеграла Френеля (и уравнения (40)). Обратим внимание на то, что в представлении интеграла Френеля нет координаты  $x$ , поэтому целью является построение разложения

$$u_0(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\{iky\theta_n\}. \quad (53)$$

Для вывода представления (53) и построения формул для  $R_n$  воспользуемся техникой, имеющей общие черты с методом Винера–Хопфа. Введем функцию

$$\begin{aligned} \phi(y) &\equiv \gamma^{-1}(\Pi_{-+}[u_0](y) + \Pi_{--}[\psi_0](y)) \\ &= \Pi_{-+}[u_{-1}](y) + \Pi_{--}[\psi_{-1}](y), \quad y < 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Сложим равенства

$$\gamma u_0 = \Pi_{++}[u_0] + \Pi_{+-}[\psi_0],$$

и

$$\gamma \phi = \Pi_{-+}[u_0](y) + \Pi_{--}[\psi_0](y).$$

Получим

$$\begin{aligned} \gamma(u_0(y) + \phi(y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(a, y-y') (u_0(y') + \Theta(y')\psi_0(y')) dy', \\ & \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\Theta_n(y) \equiv \begin{cases} 0, & y \geq 0, \\ 1, & y < 0 \end{cases}$$

Введем односторонние преобразования Фурье как

$$\mathcal{F}_+[f](\xi) = \int_0^{\infty} f(y)e^{i\xi y} dy, \quad (56)$$

$$\mathcal{F}_-[f](\xi) = \int_{-\infty}^0 f(y)e^{i\xi y} dy. \quad (57)$$

Применим преобразование Фурье (оператор  $\mathcal{F}_- + \mathcal{F}_+$ ) к (55):

$$\mathcal{F}_+[u_0] + \mathcal{F}_-[\phi] = \exp\left\{-ia\frac{\xi^2}{2k}\right\} (\mathcal{F}_+[u_0] + \mathcal{F}_-[\psi_0]), \quad (58)$$

где явно вычислен Фурье-образ функции  $g(a, \cdot)$ . Выразим Фурье-образ функции  $u_0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+[u_0](\xi) &= \left(\exp\left\{-ia\frac{\xi^2}{2k}\right\} - \gamma\right)^{-1} \\ &\times \left(\gamma\mathcal{F}_-[\phi](\xi) - \exp\left\{-ia\frac{\xi^2}{2k}\right\}\mathcal{F}_-[\psi_0](\xi)\right). \end{aligned} \quad (59)$$

Обратим преобразование Фурье по формуле

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_+[f](\xi)e^{-i\xi y} d\xi, \quad (60)$$

замкнув контур интегрирования в нижней полуплоскости. Заметим, что Фурье-образы функций  $\phi$  и  $\psi_0$  регулярны в нижней полуплоскости и убывают там как  $1/|\xi|$ . Знаменатель в нижней полуплоскости имеет нули в точках  $\xi_n = -k\theta_n$ . Вычисляя интеграл методом вычетов, получаем

$$u_0(y) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\theta_n} \exp\{ik\theta_n y\} \mathcal{F}_-[\phi - \psi_0](-k\theta_n). \quad (61)$$

Сумма (61) имеет вид разложения (53) с

$$R_n = -\frac{1}{a\theta_n} \mathcal{F}_-[\phi - \psi_0](-k\theta_n). \quad (62)$$

Выражение (62) есть (45) в других обозначениях.

Приведем еще одну формулу для коэффициентов рассеяния. Учитывая (34), преобразуем (62) к виду

$$R_n = -\frac{1}{a\theta_n}\gamma^{-1}\mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[u_0 - \psi_0]](-k\theta_n). \quad (63)$$

**2.8. О единственности решения уравнения (42).** Как было сказано выше, вместо цепочки уравнений (40) достаточно рассмотреть уравнение (42). Допустим, что уравнение (42) имеет два решения, а именно  $u_0$  и  $\bar{u}_0$ . Тогда их разность должна удовлетворять однородному уравнению

$$\gamma(u_0 - \bar{u}_0) = \Pi_{++}[u_0 - \bar{u}_0], \quad (64)$$

Покажем, что решение этого уравнения, принадлежащее  $L_2$ , в приближении малого поглощения (см. Приложение Б) тривиально.

Перепишем уравнение (64) так, чтобы оператор в правой части имел сверточный характер:

$$\gamma(u_0 - \bar{u}_0) + \Pi_{-+}[u_0 - \bar{u}_0] = (\Pi_{++} + \Pi_{-+})[u_0 - \bar{u}_0].$$

Применим к последнему равенству преобразование Фурье:

$$\gamma\mathcal{F}_+[u_0 - \bar{u}_0] + \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[u_0 - \bar{u}_0]] = \exp\{-ia\xi^2/(2k)\}\mathcal{F}_+[u_0 - \bar{u}_0] \quad (65)$$

Определим норму следующим образом:

$$|u|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dy. \quad (66)$$

Воспользуемся тем фактом, что преобразование Фурье сохраняет  $L_2$ -норму (равенство Парсеваля). Равенство Парсеваля для преобразования Фурье, заданного формулами (56,57) имеет вид:

$$|u|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}|\mathcal{F}_+[u] + \mathcal{F}_-[u]|_{L_2}^2. \quad (67)$$

Кроме того, заметим, что  $|\gamma| = 1$  (см. Приложение Б). Таким образом, из (65) и (67) следует, что

$$|u_0 - \bar{u}_0|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \exp\{-a\xi^2 k''/(2|k|^2)\} |\mathcal{F}_+[u_0 - \bar{u}_0]|_{L_2}^2 \leq |u_0 - \bar{u}_0|_{L_2}^2$$

Экспоненциальный множитель по модулю меньше единицы везде, кроме  $\xi = 0$ . Поэтому во втором неравенстве равенство могло бы достигаться только когда спектр  $\mathcal{F}_+[u_0 - \bar{u}_0]$  локализован в точке  $\xi = 0$ , что невозможно. Следовательно, решение уравнения (42) единственно.

Сделаем несколько замечаний.

- Величина  $k\theta_0 = k\theta_0^2/\theta_0$  имеет малую положительную мнимую часть. Это гарантирует, что  $\psi_n$  имеет конечную  $L_2$ -норму.
- Каждая из величин  $k\theta_n^2$  является чисто действительной. Это значит, что все комбинации  $k\theta_n$  имеют положительную мнимую часть (малую для распространяющихся мод и большую для затухающих). Это позволяет сформулировать “условие излучения” для задачи в формализме интегралов Френеля. Оно заключается в том, что при комплексном  $k$  каждая из функций  $u_n(y)$  имеет конечную норму в  $L_2$ .

### §3. КРАЕВАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА И ЕЕ ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ

**3.1. Определение краевой функции Грина в рамках параболического уравнения.** В рамках параболического уравнения введем краевую функцию Грина  $v(x, y)$  как решение неоднородного уравнения:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v = \delta(x-0)\delta(y), \quad (68)$$

то есть источник располагается на основном листе многолистной поверхности (см. Рис. 3) вблизи точки ветвления  $(0, 0)$ . Аргумент  $x-0$  означает, что рассматривается предел семейства задач с источником в точке  $+\epsilon$  при  $\epsilon$  стремящемся к нулю. При таком определении логично называть диаграммой направленности  $V(\theta)$  краевой функций Грина  $v(x, y)$  коэффициент асимптотического разложения

$$v(x, y) = g(x, y)V(y/x) + o(x^{-1/2}), \quad (69)$$

где в предельной процедуре  $y$  и  $x$  предполагаются большими положительными, а их отношение постоянным. Такое определение аналогично определению диаграммы направленности функции Грина для уравнения Гельмгольца, где главный член поля представляется в виде функции Грина свободного пространства, умноженной на зависящую только от угла диаграмму направленности. Применяя формулу Грина (49) для параболического уравнения к функциям

$$v = v^n(x, y), \quad w = \exp\{ikx\theta^2/2 -iky\theta\},$$

с  $\theta > 0$  в области, показанной на Рис. 7, можно получить [2] следующую

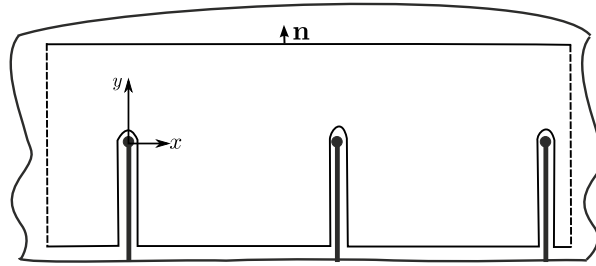


Рис. 7. Область  $\Omega$  для вывода (70)

формулу для диаграмм направленности:

$$V(\theta) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{ik\theta^2 an/2\} \mathcal{F}_-[v(an - 0, \cdot)](-k\theta). \quad (70)$$

Для доказательства данного утверждения нам потребуются формулы полученные в [2]:

$$V^m(\theta) = \exp\{-i\frac{k\theta^2}{2}am\} \theta \int_{-\infty}^{\infty} v^m(x, y_*) \exp\left\{\left(\frac{\theta^2}{2}x - \theta y_*\right)\right\} dx, \quad (71)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_y v^m(x, y_*) \exp\left\{\frac{ik\theta^2 x}{2}\right\} dx = ik\theta \int_{-\infty}^{+\infty} v^m(x, y_*) \exp\left\{\frac{ik\theta^2 x}{2}\right\} dx, \quad (72)$$

для произвольного  $y_* > 0$ . Применяя (49) учитывая (71,72), а также принимая во внимание тот факт, что интегралы по бесконечно удаленным участкам обращаются в нуль, получаем (70).

При определении краевой функции Грина в рамках параболического уравнения возникают две основных проблемы. Первая заключается в необходимости корректной постановки дифракционной задачи с точечным источником, расположенным вблизи точки ветвления. Вторая (более серьезная) проблема заключается в доказательстве справедливости асимптотики (69). Для того, чтобы избежать этих трудностей,

мы используем формализм интегралов Френеля. В рамках этого формализма проблем не возникает (достаточно доказать сходимость соответствующих интегралов и рядов), но некоторый недостаток заключается в том, что “диаграмма направленности” краевой функции Грина не имеет очевидного физического смысла в этом формализме.

**3.2. Определение диаграммы направленности краевой функции Грина в рамках интегралов Френеля.** Определим функции  $v_n(y)$ ,  $y > 0$  следующим образом:

$$v_n \equiv 0, \quad n < 1, \quad (73)$$

$$v_1(y) = g(a, y), \quad (74)$$

$$v_{n+1}(y) = \Pi_{++}[v_n](y), \quad n > 1. \quad (75)$$

При  $y \leq 0$  доопределим данные функции как 0. Легко проверить, что набор функций  $v_n$  удовлетворяет цепочке уравнений (40) с правыми частями

$$\psi_n(y) = \delta_{n,0}\delta(y), \quad (76)$$

где первая дельта – символ Кронекера, а вторая – обозначение дельта-функции. При таком определении необходимо пояснить, что

$$\Pi_{+-}[\delta(\cdot)](y) = g(a, y).$$

Заметим, что в соответствии с (44) при  $y \geq 0$

$$v_n(y) = v(an, y), \quad n \geq 1,$$

где  $v(x, y)$  – краевая функция Грина, введенная в предыдущем разделе.

Введем диаграмму направленности  $V(\theta)$ , используя (70) как определение. Для этого заметим, что при  $y < 0$

$$v(a - 0, y) = g(a, y),$$

$$v(an - 0, y) = \Pi_{-+}[v_{n-1}](y), \quad n > 1.$$

Таким образом, аналог формулы (70), использующий величины, определенные в рамках формализма интегралов Френеля, есть

$$V(\theta) = 1 - \gamma^{-1} \mathcal{F}_-[g(a, \cdot)](-k\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{-(n+1)} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[v_n]](-k\theta). \quad (77)$$

§4. О ФОРМУЛАХ РАСЩЕПЛЕНИЯ

**4.1. Вывод слабой формулы расщепления.** В статьях ([1–3]) выводится ключевой результат, а именно формула расщепления, связывающая решение исходной задачи о падающей плоской волне с краевыми функциями Грина. Для рассматриваемой задачи эта формула имеет вид

$$R_n = \frac{V(\theta_n)V(\theta_0)}{ika\theta_n(\theta_n + \theta_0)}. \tag{78}$$

Формула расщепления выводится в два шага. На первом шаге к решению исходной задачи применяется дифференциальный оператор  $H$ , сохраняющий граничные условия и обращающий в нуль падающую плоскую волну. В результате анализа поля и применения теоремы единственности удается выразить результат применения оператора, т. е.  $H[u]$ , в виде линейной комбинации краевых функций Грина. Полученное выражение называется *слабой формулой расщепления*. На втором шаге применяется теорема взаимности для параболического уравнения, и диаграмма направленности исходной задачи выражается через диаграммы направленности краевых функций Грина. Проблема такого вывода заключается в том, что его первая часть проводится на “физическом уровне строгости”, а доказательство теоремы единственности требует значительных усилий. Здесь мы проделываем доказательство формулы расщепления для описания в рамках интегралов Френеля.

Опишем коротко процедуру вывода слабой формулы расщепления в рамках параболического описания. Будем рассматривать постановку для полностью поглощающих экранов. Применим к полному полю  $u$  оператор

$$H \equiv \frac{\partial}{\partial y} + ik\theta_0 \tag{79}$$

Этот оператор обращает в нуль падающую волну и сохраняет граничные условия на экранах. При этом “портятся” условия на концах экранов, т. е. поле  $H[u]$  не содержит падающей волны, но имеет источники в концах экранов. Для выяснения амплитуды источников используется следующее (заведомо нестрогое) рассуждение. По определению производной, при малых  $\epsilon$

$$H[u] \approx H^\epsilon[u] = \frac{1}{\epsilon}(u(x, y) - u(x, y - \epsilon)) + ik\theta_0 u. \tag{80}$$

Рассмотрим поле  $H^\epsilon[u]$  в окрестности точки  $(0, 0)$ . При  $x = +0, y < 0$  поле, очевидно, удовлетворяет граничному условию  $H^\epsilon[u] = 0$  справа от экрана. При  $x = 0, 0 < y < \epsilon$  поле  $H^\epsilon[u]$  имеет разрыв, т. е. не удовлетворяет однородному параболическому уравнению. Разрыв на этом отрезке равен  $\epsilon^{-1}u(-0, y - \epsilon)$ . Функция  $u(-0, y)$  вблизи  $y = 0$  является непрерывной, поэтому при малых  $\epsilon$  значение  $u(-0, y - \epsilon)$  на отрезке  $0 < y < \epsilon$  можно заменить на  $u(-0, 0)$ . Разрывное поле приближенно удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) H^\epsilon[u] = \frac{1}{\epsilon} u(-0, 0) \delta(x) \xi^\epsilon(y), \quad (81)$$

где  $\xi^\epsilon(y)$  – функция, равная единице на отрезке  $0 < y < \epsilon$  и нулю вне этого отрезка. При стремлении  $\epsilon$  к нулю правая часть стремится к  $\delta(x)\delta(y)u(-0, 0)$ . Таким образом, вблизи края экрана поле имеет точечный источник, амплитуда которого равна значению поля слева от источника. Поле, создаваемое точечным источником, есть краевая функция Грина  $v(x, y)$ . Повторяя эти рассуждения для каждого экрана, получаем слабую формулу расщепления

$$H[u] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(an - 0, 0) v(x + an, y). \quad (82)$$

Получим эту же формулу в рамках формализма интегралов Френеля. Применим оператор

$$H' = \frac{d}{dy} + ik\theta_0$$

к уравнению (40). Заметим, что ядро интегральных операторов  $\Pi_{++}$  и  $\Pi_{+-}$  зависит от разности аргументов, поэтому производную по  $y$  можно выразить через производную по переменной интегрирования, а затем применить интегрирование по частям. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dy} + ik\theta_0\right) \int_0^\infty g(a, y - y') u_n(y') dy' \\ &= -g(a, y - y') u_n(y') \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d}{dy'} u_n(y') g(a, y - y') dy'. \end{aligned} \quad (83)$$

Для второго члена уравнения (40) имеем аналогичное соотношение. В подстановке слагаемое с бесконечностью равно нулю в силу принципа



предельного поглощения. Кроме того,

$$H'[\psi_n](y) = 0. \quad (84)$$

В результате получаем уравнение

$$H'[u_{n+1}](y) = \Pi_{++}[H'[u_n]](y) + g(a, y)(u_n(0) - \psi_n(0)). \quad (85)$$

Полученная цепочка уравнений относительно функций  $H'[u_{n+1}]$  представляет собой систему (40) с правой частью, равной  $\psi'_n = (u_n(0) - \psi_n(0))\delta(y)$ . Нам известен отклик на правую часть вида  $\delta_{n,0}\delta(y)$  (это краевая функция Грина). Сконструируем из краевых функций Грина функции  $w_n$ , удовлетворяющие цепочке уравнений

$$w_{n+1}(y) = \Pi_{++}[w_n](y) + g(a, y)(u_n(0) - \psi_n(0)).$$

Это функции

$$w_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (u_m(0) - \psi_m(0))v_{n-m}(y).$$

Данные функции, как и функции  $H'[u_n]$ , удовлетворяют условию Флоке  $w_{n+1} = \gamma w_n$ , поэтому по доказанной ранее теореме единственности  $H'[u_n] = w_n$  и

$$H'[u_n](y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (u_m(0) - \psi_m(0))v_{n-m}(y), \quad (86)$$

что и представляет собой слабую формулу расщепления (аналог (82)). В силу свойства Флоке ее можно переписать в виде

$$H'[u_n](y) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^{-m+n}(u_0(0) - \psi_0(0))v_m(y). \quad (87)$$

**4.2. Вывод сильной формулы расщепления.** В рамках подхода, основанного на параболическом уравнении, слабая формула расщепления (82) преобразуется в сильную (78) следующим образом [1]. Перейдем в (82) к диаграммам направленности поля (т. е. рассмотрим главный член асимптотики в дальнем поле). Заметим, что оператор  $H$  действует на диаграмму направленности как умножение на  $ik(\theta + \theta_0)$ .

После несложных преобразований, относящихся к определению диаграмм направленности и коэффициентов отражения, (см. [1, 2]), получаем выражение

$$ik(\theta_n + \theta_0)R_n = \frac{1}{a\theta_n}u(-0, 0)V(\theta_n) \quad (88)$$

После этого с помощью теоремы взаимности доказывается тождество

$$u(-0, 0) = V(\theta_0). \quad (89)$$

В результате получается сильная формула расщепления (78).

Смысл тождества (89) легко понять на физическом уровне строгости. Диаграмма направленности краевой функции Грина  $V(\theta)$  может быть определена следующим образом. Возьмем источник в точке  $(+0, 0)$ , а точку наблюдения выберем как  $(X, \theta X)$  для достаточно большого  $X$ . Диаграмма направленности приближенно определяется как поле в точке наблюдения, домноженное на некий множитель, компенсирующий набег фазы и геометрическое затухание. В то же время, величина  $u(-0, 0)$  – значение поля, порожденного плоской волной, вблизи начала координат. Плоскую волну можно заменить на точечный источник, находящийся в точке  $(-X, \theta_0 X)$  для достаточно большого  $X$ . Амплитуда источника выбирается так, чтобы скомпенсировать набег фазы и геометрическое затухание. Легко видеть, что  $V(\theta)$  и  $u(-0, 0)$  представляют собой одну и ту же величину с точностью до перестановки местами источника и точки наблюдения и изменения направления оси  $x$ . Возможность выполнить такое преобразование дает теорема взаимности для параболического уравнения.

Здесь наша задача – вывести формулу (78) с помощью интегралов Френеля. Будем исходить из слабой формулы расщепления (87). Выберем  $n = 0$  и подействуем на эту формулу операторами  $\Pi_{-+}$  и  $\mathcal{F}_-$  для придания ей формы (63):

$$\mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[H'[u_0]]](-k\theta) = (u_0(0) - \psi_0(0)) \sum_{m=1}^{n-1} \gamma^{-m} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[v_m]](-k\theta), \quad (90)$$

Преобразуем левую часть формулы. Заметим, что

$$H'[u_0] = H'[u_0 - \psi_0].$$

Кроме того, с помощью интегрирования по частям легко доказать тождества

$$\Pi_{-+}[H'[f]](y) = H'[\Pi_{-+}[f]](y) - f(0)g(y), \quad (91)$$

$$\mathcal{F}_-[H'[f]](\xi) = i(k\theta_0 - \xi)\mathcal{F}_-[f](y) - f(0), \quad (92)$$

для любой гладкой функции  $f$ . С помощью этих свойств легко показать, что

$$\mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[H'[u_0]]](-k\theta) = ik(\theta + \theta_0)\mathcal{F}[\Pi_{-+}[u_0 - \psi_0]](-k\theta) - (u_0(0) - \psi_0(0))\mathcal{F}[g](-k\theta) + \Pi_{-+}[u_0 - \psi_0](0).$$

Пользуясь уравнением (40), а также свойством (34), получаем

$$\Pi_{-+}[u_0 - \psi_0](0) = \gamma(u_0(0) - \psi_0(0)).$$

Используя (63) и заменяя  $\theta$  на  $\theta_n$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[H'[u_0]]](-k\theta_n) = \\ -ik(\theta_n + \theta_0)a\theta_n\gamma R_n + (u_0(0) - \psi_0(0))(\gamma - \mathcal{F}_-[g](-k\theta_n)). \end{aligned} \quad (93)$$

Теперь преобразуем левую часть (90). В соответствии с (77)

$$\sum_{m=1}^{n-1} \gamma^{-m} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[v_m^0]](-k\theta) = -\gamma V(\theta) + \gamma - \mathcal{F}_-[g](-k\theta_0) \quad (94)$$

Сравнивая (94) с (93), получаем

$$R_n = \frac{(u_0(0) - \psi_0(0))V(\theta_n)}{ika\theta_n(\theta_0 + \theta_n)}, \quad (95)$$

т. е. (88).

Теперь покажем, что

$$u_0(0) - \psi_0(0) = V(\theta_0), \quad (96)$$

т. е. что выполняется (89). Заметим, что  $\psi_0(0) = -1$ . Согласно (43)

$$\begin{aligned} u_0(0) - \psi_0(0) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^{-m} (\Pi_{++})^{m-1} [\Pi_{+-}[f]](0), \\ f(y) = \exp\{-ik\theta_0 y\}. \end{aligned} \quad (97)$$

Определяя  $V(\theta_0)$  как (77), замечаем, что ряд (77) совпадает с (97) почленно. При этом в каждом члене порядок интегрирования в (77) обратен порядку интегрирования в (97). Это доказывает (96) и, следовательно, (78).

### §5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждаются вопросы применимости параболического приближения к задачам вайнштейновского класса. Рассматривается классическая задача Л. А. Вайнштейна о дифракции высокочастотной волны на периодической решетке, состоящей из идеально поглощающих экранов. Эта задача представляет собой переформулировку задачи о рассеянии на торце плоского волновода. Переформулировка выполняется с использованием метода отражений.

Рассмотрение задачи проводится в рамках двух формализмов – параболического уравнения теории дифракции и интегралов Френеля. Показано, что эти формализмы приводят к одной и той же цепочке интегральных уравнений (40). Формализм параболического уравнения обладает наглядностью, поскольку позволяет вводить привычные понятия функций Грина и диаграмм направленности. Формализм интегралов Френеля наглядностью не обладает, однако его использование не связано с математическими сложностями. Поэтому в работе в рамках параболического уравнения демонстрируются основные понятия и формулы, полученные авторами в работах [1–3], а затем проводятся строгие доказательства этих формул в рамках интегралов Френеля.

В работе вводятся краевые функции Грина, а также доказывається формула расщепления в слабой и сильной формулировках. Кроме того доказывається теорема единственности решения дифракционной задачи и строится явный вид решения.

### ПРИЛОЖЕНИЕ А. ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МНОГОЛИСТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Будем обозначать поверхность, изображенную на Рис. 2, как  $M_1$ , а поверхность, изображенную на Рис. 3, как  $M_2$ . Проиндексируем листы поверхности  $M_1$  целыми числами  $n \in \mathbb{Z}$ . Пусть физический лист соответствует индексу  $n = 0$ . Листу, имеющему точки ветвления при  $x = an, a(n + 1)$  присвоим индекс  $n$ .

Проиндексируем также листы поверхности  $M_2$ . Пусть основной лист будет иметь индекс  $i$  (букву). Нижние листы проиндексируем целыми числами так, чтобы лист, подклеенный по линии  $x = an, y < 0$ , имел числовой индекс  $n$ . Теперь точка на каждой из поверхностей характеризуется координатами  $(x, y)$  и индексом листа.

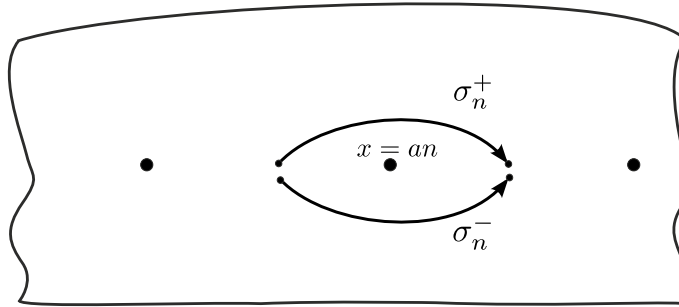


Рис. 8. Пути  $\sigma_n^+$  и  $\sigma_n^-$

Пусть  $\sigma$  – непрерывный путь на плоскости  $(x, y)$  с выколотыми точками  $(at, 0)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Пусть этот путь идет из точки  $(x_1, y_1)$  в точку  $(x_2, y_2)$ . Определим преобразование индексов поверхности  $M_1$  как подстановку

$$\alpha_2 = \Phi_\sigma^1(\alpha_1),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  принадлежат множеству индексов поверхности  $M_1$  (т.е.  $\mathbb{Z}$ ). Выписанное выше равенство верно, если после переноса точки  $(x_1, y_1, \alpha_1)$  по пути  $\sigma$  попадаешь в точку  $(x_2, y_2, \alpha_2)$ . Аналогично определим преобразование индексов поверхности  $M_2$ , обозначив его как  $\Phi_\sigma^2$ .

Разумеется, вместо путей  $\sigma$  достаточно рассматривать гомотопические классы путей на плоскости с выколотыми точками  $(at, 0)$ . Для рассмотрения всех классов  $\sigma$  достаточно рассмотреть только классы базовых путей  $\sigma_n^\pm$ , показанных на Рис. 8. Для путей  $\sigma_n^\pm$  легко построить явный вид подстановок  $\Phi_{\sigma_n^\pm}^{1,2}$ . Имеем

$$\Phi_{\sigma_n^-}^1(\alpha) = \alpha, \quad \Phi_{\sigma_n^+}^1(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \neq n - 1 \text{ и } \alpha \neq n, \\ n, & \text{если } \alpha = n - 1, \\ n - 1, & \text{если } \alpha = n. \end{cases} \quad (98)$$

$$\Phi_{\sigma_n^+}^2(\alpha) = \alpha, \quad \Phi_{\sigma_n^-}^2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \neq i \text{ и } \alpha \neq n, \\ n, & \text{если } \alpha = i, \\ i, & \text{если } \alpha = n. \end{cases} \quad (99)$$

Назовем поверхности с заданным набором положений точек ветвления над плоскостью  $(x, y)$  эквивалентными, если существует обратимое непрерывное отображение  $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$ , оставляющее координаты точек неизменными. То есть отображение  $\Psi$  может изменять только индексы точек. На языке индексов листов непрерывность означает, что для любого  $\sigma$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \xrightarrow{\Phi_\sigma^1} & \alpha_2 \\ \downarrow \Psi & & \uparrow \Psi^{-1} \\ \beta_1 & \xrightarrow{\Phi_\sigma^2} & \beta_2 \end{array}$$

коммутативна.

Определим преобразование  $\Psi$  в полосе  $an < x < a(n+1)$  следующим образом

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{если } \alpha < n, \\ i, & \text{если } \alpha = n, \\ \alpha, & \text{если } \alpha > n. \end{cases} \quad (100)$$

Непосредственной проверкой, проводимой для путей  $\sigma_n^\pm$ , убеждаемся, что это преобразование непрерывно, то есть выполняется тождество

$$\Phi_\sigma^2(\Psi(\alpha)) = \Psi(\Phi_\sigma^1(\alpha)), \quad (101)$$

где  $\alpha$  произвольный индекс поверхности  $M_1$ .

## Приложение Б. Условия излучения

Сформулируем условия излучения в виде принципа предельного поглощения. Сделаем три допущения:

- Величина  $k$  имеет малую положительную мнимую часть:  $k = k' + ik''$ .
- Величина  $\gamma$  по модулю равна единице, т.е.  $\theta^{\text{in}}$  имеет малую отрицательную мнимую часть:  $\theta^{\text{in}} = \theta' - i\theta''$ , причем  $\text{Im}[k(\theta^{\text{in}})^2] = 0$ .
- Соотношение (13) выполняется для действительных частей  $k$  и  $\theta^{\text{in}}$ .

При этих условиях продолжение падающей волны в нижнюю полуплоскость экспоненциально убывает. В качестве условий излучения потребуем, чтобы рассеянное поле также экспоненциально убывало

при удалении от линии  $y = 0$ . Для действительного  $k$  решение определяется как предел семейства решений при  $k'' \rightarrow 0$ . Третье допущение означает, что условие (13) не выполняется в течение всей предельной процедуры, а выполняется только в пределе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Shanin, *Weinstein's Diffraction Problem: Embedding Formula and Spectral Equation in Parabolic Approximation*. — SIAM J. Appl. Math. (2009), . 1201–1218.
2. А.В. Шанин, *Дифракция высокочастотной волны на решетке со сложным периодом при скользющем падении*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **409** (2012), 212–239.
3. А.И. Корольков, А.В. Шанин, *Дифракция на решетке из поглощающих экранов разной высоты. Новые уравнения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **422** (2014), 62–89.
4. Л.А.Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы*. М., Сов. радио, 1966.
5. Л.А.Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации*. М., Сов. радио, 1966.
6. А.Зоммерфельд, *Оптика*, М, Ин. лит., 1953.
7. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков, *Теория волн*, М., Наука, 1979.
8. A.G. Fox and T. Li, *Resonant modes in a Maser interferometer*. — Bell Syst. Tech. J. **40** (1961), 453–458.

Korol'kov A. I., Shanin A. V. Parabolic equation method and Fresnel approximation in Weinstein's problems.

A problem of diffraction of a high frequency plane wave by a grating, consisting of absorbing screens is studied. Difficulties of a correct mathematical formulation of the problem are addressed. It is shown how this problem is connected with the classical Weinstein's problem of scattering by an open end of a planar waveguide. All results are derived by two different approaches: by the parabolic equation approach and by the method of Fresnel integrals. The equivalence of these approaches allows one to

use Fresnel integrals for rigorous reasoning keeping the parabolic equation method for clear physical understanding of the results obtained.

Физический Факультет,  
МГУ им. М.В.Ломоносова,  
Дом 1, строение 2, Ленинские горы,  
119991, ГСП-2, Москва, Россия  
*E-mail:* korolkov@physics.msu.ru  
a.v.shanin@gmail.com

Поступило 28 октября 2014 г.