

В. А. Козлов, С. А. Назаров

ПРОСТЕЙШАЯ ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЛОЖНОЙ АНЕВРИЗМЫ В БОЛЬШОЙ БЕДРЕННОЙ АРТЕРИИ

1. Предмет моделирования. Мы рассматриваем пульсирующий поток крови в прямолинейном участке артерии с тонкой упругой цилиндрической стенкой, имеющей малое повреждение – отверстие, через которое кровь вытекает в гематому при избыточном давлении, но возвращается внутрь сосуда под действием окружающих мышц при недостаточном давлении. Цель работы – создание максимально простой, в частности, одномерной и линейной, модели, отражающей взаимодействие систем кровь/(стенка сосуда) и гематома/(внешняя мышца). Сама модель получается в результате использования процедуры понижения геометрической размерности в исходной трехмерной задаче; эта процедура была разработана и применена для описания работы здоровых артерий и вен в статьях [1, 2] и [3, 4].

В медицинской литературе указанный дефект кровеносного сосуда называется *ложной аневризмой (aneurysm falsum)* – ложной потому, что отверстие в стенке сосуда возникло в результате травмирования или хирургического вмешательства (например, через подобные отверстия в бедренной артерии осуществляется *коронография* или постановка *стентов* в присердечной зоне артериальной системы) и поэтому гематома непосредственно соприкасается с окружающей ее мышечной тканью, а не отделена от нее стенкой расширенного сосуда, что характерно для *истинной аневризмы (aneurysm verum)*. При различных недугах (тяжелая стадия диабета, пониженная сворачиваемость крови и т.п.) зарастание искусственно образованного отверстия в стенке сосуда затруднено, а выброс крови в мышечную ткань провоцирует серьезные риски: летальный исход наступает через 20–30 минут свободного истечения крови из бедренной артерии (открытие аневризмы), а долгосрочное, в течении одного-двух месяцев, существование

Ключевые слова: аневризма, гематома, кровеносный сосуд, тонкие течения, понижение размерности, уравнение Рейнольдса.

Работа второго автора финансово поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 12-01-00348) и университетом г. Линчёпинг (Швеция).

гематомы обычно вызывает абсцесс, который может губительно повлиять на поврежденный участок артерии или даже привести к гангрене. Наконец, аневризма демпфирует процесс прохождения крови по сосуду и тем самым осложняет функционирование его периферии (при ложной аневризме бедренной артерии в первую очередь проверяется пульс около голеностопа).

Аневризмы (уже не ложные) могут возникать и вследствие врожденных или приобретенных болезней, вызывающих *диссекцию* сосудов (aneurysm dissecans) – расслоение слоев стенок, являющихся сложно устроенным ламинантным композитом с усиливающими колагеновыми волокнами. Как установлено в работе [5], диссекция сосуда провоцирует высокоамплитудные *продольные* колебания его стенки, которые в свою очередь вызывают разрушение межволоконного связующего клеточного материала, называемое в медицинской литературе *разможжением* сосудов. В результате повреждение артерии происходит на удлинённом участке и не вписывается в предлагаемую модель сугубо локализованного обмена кровью между сосудом и гематомой.

В построенной далее модели здоровой, но локально поврежденной артерии продольными колебаниями стенок можно пренебречь (см. пояснения в работе [5, § 3]). Далее будут введены дополнительные предположения геометрического и физического толка, однако, несмотря на простоту модели, она способна описать демпфирование пульсирующего потока крови и, более того, определить размер аневризмы и момент начала ее роста при скачках артериального давления (например, при гипертоническом кризе).

Имеется несколько причин, побуждающих к построению как можно более простых моделей участков кровеносной системы. Прежде всего, при составлении самой исходной трехмерной задачи, подвергающейся асимптотическому анализу, невозможно принять во внимание все физические характеристики и геометрические формы объектов, образующих изучаемую биологическую систему. Так, кровь является вязкоупругой многокомпонентной жидкостью, стенка сосуда – многослойной оболочкой с усиливающими волокнами, упругий материал окружающей мышцы – неоднородным и подверженным “старению” (допускающим релаксацию напряжений), гематома – сложной по составу массой, содержащей объемы застоявшейся и частично свернувшейся крови. К тому же многие характеристики существенно зависят от времени суток, активности организма и приема медикаментозных

препаратов. Разумеется, очевидные потери при изначальной постановке задачи невозможно компенсировать замысловатостью математического анализа.

Во-вторых, изучается весьма специфическое повреждение лишь одного отделенного фрагмента артериального дерева, и разрабатываемую модель еще предстоит включить в разноразмерную и разномасштабную модель всей кровеносной системы, топологически весьма запутанную. Необоснованное усложнение даже одного из элементов такой – сводной – модели может сделать ее труднодоступной для численных экспериментов и потому вряд ли нужной.

Наконец, результаты, которые могут пригодиться медикам, должны быть выражены в максимально простых терминах (длина, объем и т.п.) в силу ограниченных временных рамок для конкретных обследований и скудности индивидуальной информации при многочисленности пациентов. Именно из-за перечисленных обстоятельств приходится жертвовать деталями, существенными при строгой математической постановке задачи, но бесполезными для практического применения.

2. Постановка задачи. Введем составной круговой цилиндр

$$\Theta_h^a = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : r < a(1+h), z \in (-l_-, l_+)\}, \quad (1)$$

образованный стенкой $\Gamma_h^a = \Theta_h^a \setminus \overline{\Theta_0^a}$ и каналом Θ_0^a сосуда. При этом $a > 0$ – радиус и $l = l_+ + l_-$ – длина участка сосуда, $l_{\pm} > 0$. Кроме того, $y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ – декартова система координат на нормальном сечении цилиндра, $r = |y|$, и $z = x_3$ – продольная координата. Безразмерные параметры $h > 0$ и

$$\delta = a/l \quad (2)$$

считаем малыми, причем $h \ll \delta$, т.е. Γ_h^a – тонкая цилиндрическая оболочка.

К сосуду (1) примыкает гематома – осесимметричная веретенообразная продолговатая область

$$\Xi_A = \{x = (y, z) : A < r < A + H(z), z \in (-L_-, L_+)\}, \quad (3)$$

где $L = L_+ + L_- > 0$ – длина гематомы, причем $L_{\pm} > 0$ и $L < l$. Кроме того, $A > a$ – радиус артерии вместе с ее ложем (тонкой прослойкой из нестойкого клеточного материала), а профиль H – гладкая четная

функция на интервале $(-L_-, L_+) \ni z$,

$$H(z) > 0 \text{ при } z \in (-L_-, L_+), \quad H(\pm L_{\pm}) = 0, \quad \partial_z H(\pm L) \neq 0. \quad (4)$$

Схематично система сосуд/гематома изображена на рис. 1.

Реальная стенка сосуда представляет собой трехслойную оболочку (рис. 2), у которой внутренний слой – *интима* – является совершенно тонкой и потому не влияет на упругие свойства стенки, а два других – *медиа* и *адвентиция* – состоят из клеточного материала, пронизанного прочными эластичными *коллагеновыми* волокнами с разными углами ϕ_m и ϕ_a винтовой намотки (см., например, монографии [6, гл. 11] и [7, гл. 8], [8, гл. 3]). На основе процедуры [9, 10] осреднения тонких армированных плит в работах [1, 2] был проведен асимптотический анализ стенки артерии и было показано, что благодаря малости параметров h и δ тонкую стенку Γ_h^a можно заменить упругой двумерной поверхностью

$$\Gamma_0^a = \{x : r = a, z \in (-l_-, l_+)\},$$

деформация которой описывается следующими дифференциальными уравнениями на этой поверхности:

$$\begin{aligned} K_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + K_{\varphi z}\varepsilon_{zz} + ha\gamma_w\partial_t^2 u_r - \gamma_b(f_r - F_r) &= 0, \\ -\partial_{\varphi}(K_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + K_{\varphi z}\varepsilon_{zz}) - a\partial_z(K_0\varepsilon_{\varphi z}) + ha\gamma_w\partial_t^2 u_{\varphi} - \gamma_b(f_{\varphi} - F_{\varphi}) &= 0, \quad (5) \\ -a\partial_z(K_{z\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + K_{zz}\varepsilon_{zz}) - \partial_{\varphi}(K_0\varepsilon_{z\varphi}) + ha\gamma_w\partial_t^2 u_z - \gamma_b(f_z - F_z) &= 0. \end{aligned}$$

При этом t – время, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_z = \partial/\partial z$ и т.п., u_r , u_{φ} и u_z – проекции вектора смещений на оси цилиндрической системы координат $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, а $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, ε_{zz} и $\varepsilon_{z\varphi} = \varepsilon_{\varphi z}$ – компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\partial_{\varphi}u_{\varphi} + \frac{1}{r}u_r, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\partial_z u_{\varphi} + \frac{1}{r}\partial_{\varphi}u_z\right). \quad (6)$$

Кроме того, γ_b и γ_w – плотности крови и материала стенки, а $f = (f_r, f_{\varphi}, f_z)$ и $F = (F_r, F_{\varphi}, F_z)$ – гидродинамические усилия, действующие на стенку со стороны канала сосуда и гематомы соответственно. Уравнения (6) означают, что равна нулю сумма упругих, инерционных и гидродинамических сил, действующих на каждый элемент поверхности. Наконец, в системе (5) фигурирует симметричная и положительно

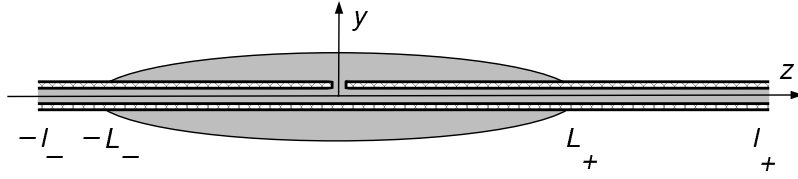


Рис. 1. Сосуд с отверстием и образовавшаяся гематома. Объем крови на рисунке тонирован.

определенная матрица осредненных упругих модулей

$$K = \begin{pmatrix} K_{\varphi\varphi} & K_{\varphi z} & 0 \\ K_{z\varphi} & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Считаем, что движение крови в канале сосуда Θ_0^a описывается уравнениями Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \partial_t v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p &= 0, \\ -\nabla \cdot v &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\nu > 0$ – коэффициент динамической вязкости крови, точкой обозначено скалярное произведение в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , т.е. $\nabla = \text{grad}$, $\nabla \cdot = \text{div}$ и $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа. Кроме того, p – давление, v – вектор скоростей, и в цилиндрических координатах компоненты вектора f гидродинамических усилий из правых частей (5) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} f_r &= -p + \nu \partial_r v_r, & f_\varphi &= \frac{\nu}{2} \left(\frac{1}{r} \partial_\varphi v_r + \partial_r v_\varphi - \frac{1}{r} v_\varphi \right), \\ f_z &= \frac{\nu}{2} (\partial_z v_r + \partial_r v_z). \end{aligned} \quad (9)$$

На внутренней поверхности Γ_0^a поставим условия динамического прилипания

$$v = \partial_t u. \quad (10)$$

В настоящий момент наличие отверстия в стенке игнорируем и займемся его моделированием только в п. 5.

Внутри гематомы Ξ_A пренебрегаем процессами застывания и сворачивания крови, т.е. также принимаем уравнения Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \partial_t V - \nu \Delta V + (V \cdot \nabla)V + \nabla P &= 0, \\ -\nabla \cdot V &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом P и V – давление и вектор скоростей, т.е. объекты, относящиеся к гематоме, обозначаем заглавными буквами. В частности, компоненты вектора F гидродинамических усилий из системы (5) имеют аналогичный (9) вид

$$\begin{aligned} F_r &= -P + \nu \partial_r V_r, & F_\varphi &= \frac{\nu}{2} \left(\frac{1}{2} \partial_\varphi V_r + \partial_r V_\varphi - \frac{1}{r} V_\varphi \right), \\ F_z &= \frac{\nu}{2} \left(\partial_z V_r + \partial_r V_z \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, демпфирующим действием тонкой и рыхлой прослойки $\{x : a(1+h) < r < A, -l_- < z < l_+\}$ в артериальном ложе пренебрегаем, считая ее идеально упругой. Поверхность гематомы $\partial \Xi^a$ разобьем на участки

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= \{x : r = A, z \in (-L_-, L_+)\}, \\ \Sigma_H &= \{x : r = A + H(z), z \in (-L_-, L_+)\} \end{aligned}$$

и назначим на них условия динамического прилипания

$$\partial_t u = V \quad \text{на} \quad \Sigma_A, \quad (13)$$

$$\partial_t U = V \quad \text{на} \quad \Sigma_H, \quad (14)$$

где U – вектор смещений в мышце, окружающей гематому.

Появление гематомы и ее увеличение вследствие притока крови деформируют мышцу и вызывают в ней напряженное состояние, описываемое суммой тензоров напряжений σ^H и σ соответственно, а вектор напряжений на поверхности Σ^H уравновешен гидродинамической силой. Таким образом, возникает еще одно краевое условие

$$(\sigma^H + \sigma)N + \gamma_b(-PN + \nu EN) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_H, \quad (15)$$

где E – тензор скоростей деформаций с декартовыми компонентами

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right), \quad j, k = 1, 2, 3,$$

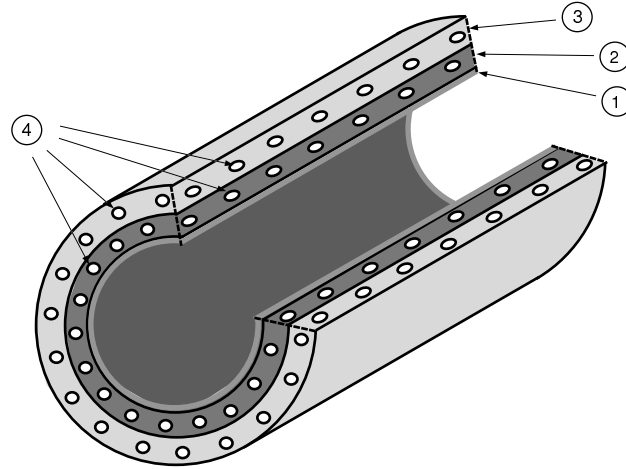


Рис. 2. Трехслойная стенка кровеносного сосуда, состоящая из интимы (1), меди (2) и адвентиции (3). Последние два слоя содержат коллагеновые волокна (4).

а N – единичный вектор внутренней нормали, который в силу определения (3) удовлетворяет соотношению

$$N = \frac{1}{(1 + |\partial_z H(z)|^2)^{1/2}} \left(\frac{-y_1}{A + H(z)}, \frac{-y_2}{A + H(z)}, \partial_z H(z) \right). \quad (16)$$

Нам еще предстоит вычислить тензоры напряжений σ^H и σ . Еще раз укажем, что первый описывает остаточные напряжения в мышце вследствие появления гематомы, а второй – напряжения, порожденные притоком и движением крови в ней. Достаточно медленным процессом релаксации мышечного материала пренебрегаем.

3. Подготовка данных. Введем несколько безразмерных естественных параметров физической задачи и наложим на них ограничения, позволяющие далее упростить результирующую модель.

Помимо малых чисел $h_w = h$ и $\delta_w = \delta$ из формул (1) и (2), характеризующих выделенный участок артерии, введем аналогичные величины

для гематомы:

$$\delta_h = \frac{1}{L} \max_{-L_- \leq z \leq L_+} H(z), \quad h_h = A \left(A + \max_{-L_- \leq z \leq L_+} H(z) \right)^{-1}. \quad (17)$$

Числа (17) также предполагаются малыми. Разумеется, выполнено соотношение $\delta_h \gg \delta_w$ (см. рис. 1), однако длины l и L считаем сравнимыми.

Малость безразмерных чисел Рейнольдса и Стокса

$$\text{Re} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{T} \delta_w l^2 \quad \text{и} \quad \text{St} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{T} \delta_w^2 l^2 = \delta_w \text{Re} \quad (18)$$

обеспечивает ламинарность и медленную изменяемость течения крови в артерии, т.е. позволяет отбросить из уравнений Навье-Стокса (8) инерционный $\partial_t v$ и конвективный $(v \cdot \nabla)v$ члены, получив стационарные уравнения Стокса для течения крови в сосуде

$$-\nu \Delta v + \nabla p = 0, \quad -\nabla \cdot v = 0 \quad \text{в} \quad \Theta_0^a. \quad (19)$$

В первой формуле (18) присутствуют частота пульса $1/T$ и площадь $\delta_w l^2 = al$ продольного сечения сосуда. Допустив вполне логичную (ср. рис. 1) соизмеримость площадей al и $L \max H$, видим, что число Рейнольдса Re_h , а значит, и соответствующее число Стокса $\text{St}_h = \delta_h \text{Re}_h$, характеризующие движение крови внутри гематомы, остаются малыми. В итоге приводим уравнения (11) к виду

$$-\nu \Delta V + \nabla P = 0, \quad -\nabla \cdot V = 0 \quad \text{в} \quad \Xi_A. \quad (20)$$

Подчеркнем, что упомянутая соизмеримость площадей означает, что объем крови, накопившейся в гематоме, может превосходить объем крови, протекающей по рассматриваемому участку артерии, так радиусы гематомы и сосуда находятся в отношении $A + H(z) > a$.

Рассмотрим три числа Вомерслея

$$\text{Wb} = (\text{St})^{1/2}, \quad \text{Ww} = \frac{a}{T} \left(\frac{h\gamma_w}{K_w} \right)^{1/2}, \quad \text{Wm} = \frac{L}{T} \left(\frac{\gamma_m}{M_m} \right)^{1/2},$$

жидкостное и два упругих – для материалов стенки сосуда и окружающей мышцы. Первое из них мало ввиду ограничений, наложенных на числа (18). Второе, включающее осредненный модуль упругости стенки на растяжении в окружном направлении (ср. матрицу жесткости (7))

$$K_w = K_{\varphi\varphi}, \quad (21)$$

припишем порядок единицы (ср. обсуждение в п. 6), а третье, зависящее от плотности γ_m и среднего модуля Юнга M_m трансверсально-изотропного материала мышцы, считаем малым. Иными словами, сохраняем инерционный член $ha\gamma_w\partial_t^2 u$ в системе (5), но вне гематомы будем решать статическую задачу теории упругости. Кроме того, медленная изменяемость в направлении оси z позволяет, в частности, приближенно рассчитать фигурирующий в соотношении (15) тензор напряжений σ^H , который порожден внедрением гематомы в мышечную ткань и представляющие собой реакцию на это изменение ее состояния.

В указанных условиях пространственная задача теории упругости с надлежащей точностью сводится к плоской задаче, т.е. зависимость от переменных t и z становится параметрической. По физической природе упругий материал мышцы, охватывающий артерию, является трансверсально-изотропным, причем ось изотропии совпадает с осью z – именно вдоль нее направлены мышечные волокна¹. Таким образом, напряжения в плоскости $y = (y_1, y_2)$ приближенно находятся по формулам

$$\sigma_{jk} = \mu \left(\frac{\partial W_j}{\partial y_k} + \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right) + \delta_{j,k} \lambda \left(\frac{\partial W_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_2}{\partial y_2} \right), \quad j, k = 1, 2,$$

где $W = (W_1, W_2)$ – вектор смещений в плоскости $y = (y_1, y_2)$, $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера, а $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ – постоянные Ламе. Остальные компоненты $\sigma_{jz} = \sigma_{zj}$ и σ_{zz} тензора напряжений, привлекающие другие упругие постоянные, далее не понадобятся.

Поскольку диаметр мышцы значительно превосходит как диаметр сосуда с ложем, так и поперечный диаметр гематомы², сечение мышцы можно считать бесконечным и решать двумерную задачу теории упругости для плоскости \mathbb{R}^2 , ослабленной круговым отверстием $\mathbb{D}(z) = \{y : r < A + H(z)\}$. Затухающее на бесконечности решение задачи о растяжении отверстия нормальной равномерной нагрузкой

¹Эту информацию авторы почерпнули не только из медицинской литературы, но и из опытов по разделке бараньей ноги для шашлыка.

²Если последнее условие нарушено, то, как пояснялось в п.1, через полчаса какие-либо расчеты станут бесполезны.

известно (см., например, [11, §11.2])

$$W_r(r, \varphi) = Dr^{-1}, \quad W_\varphi(r, \varphi) = 0,$$

$$\sigma_{rr}(r, \varphi) = -2\mu Dr^{-2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 2\mu Dr^{-2}, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) = \sigma_{\varphi r}(r, \varphi) = 0. \quad (22)$$

Здесь D — некоторая постоянная, подлежащая определению.

Внедрение гематомы (3) привело к вектору дислокации

$$-H(z)(r^{-1}y_1, r^{-1}y_2, 0)$$

края мышцы, изначально охватывающей ложе артерии. В результате находим коэффициент

$$D(z) = -H(z)(A + H(z)) \quad (23)$$

в выражениях (22). Кроме того, благодаря малости второго числа (17) и производной $\partial_z H(z)$ в представлении (16) нормали N получаем в силу формул (19) и (23), что на внешнюю стенку Σ_H гематомы со стороны мышцы в главном (т.е. при $A = 0$ в выражении (23)) действует сжимающее нормальное напряжение интенсивностью 2μ . Иными словами, произведение $\sigma^H N$ из левой части условия (15) приближенно равно $2\mu N$, т.е. это условие принимает вид

$$(P - 2\mu\gamma_b^{-1})N - \nu EN - \gamma_b^{-1}\sigma N = 0 \text{ на } \Sigma_H. \quad (24)$$

Отметим, что статическое поле смещений (22) не проявляется в левой части динамического условия прилипания (14), содержащего производную по времени.

4. Процедура понижения размерности. По-прежнему не обращаем внимание на отверстие в стенке, связывающее сосуд и гематому. Примем стандартные асимптотические анзацы для давления и вектора скоростей в канале сосуда, а также для вектора смещений его стенки:

$$p(x, t) = p^0(z, \tau) + \delta p'(\eta, z, \tau) + \delta^2 p''(\eta, z, \tau) + \dots, \quad (25)$$

$$v(x, t) = \delta^2 v^0(\eta, z, \tau) + \delta^3 v'(\eta, z, \tau) + \dots, \quad (26)$$

$$u(x, t) = \delta u^0(\eta, z, \tau) + \delta^2 u'(\eta, z, \tau) + \dots. \quad (27)$$

Здесь $\delta = \delta_w$ — малый параметр (2), $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ и τ — растянутые координаты и быстрое время соответственно, т.е.

$$\eta = \delta^{-1}y \quad \text{и} \quad \tau = \delta^2 t. \quad (28)$$

Пояснения к выводу соотношений (25)–(28) и сопутствующий асимптотический анализ приведены, например, в работах [3, 4], однако в данной статье из-за обилия геометрических параметров не будем производить масштабирование (к примеру, $l = 1$) и сохраним в предельной задаче размерные переменные.

Аналогичные (25) и (26) анзацы имеют место и для течения крови в гематоме:

$$P(x, t) = P^0(z, \tau) + \delta P'(\eta, z, \tau) + \delta^2 P''(\eta, z, \tau) + \dots, \quad (29)$$

$$V(x, t) = \delta^2 V^0(\eta, z, \tau) + \delta^2 V'(\eta, z, \tau) + \dots \quad (30)$$

Подчеркнем, что разложения (29) и (30) включают параметр $\delta = \delta_w$, относительную толщину сосуда, а не первый параметр (17), связанный с гематомой.

Повторим процедуру понижения размерности из статей [3, 4]. Сначала подставим формулы (25), (26) и (28) в задачу Стокса (19), (10) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях параметра δ . В результате получим рекуррентную последовательность краевых задач на сечении \mathbb{B} канала сосуда

$$\mathbb{B}_a = \{y : |y| < a\} \Rightarrow \mathbb{B} = \{\eta : |\eta| < l\}. \quad (31)$$

Первая из упомянутых задач выглядит следующим образом:

$$-\nu \Delta_\eta v_\bullet^0 + \nabla_\eta p' = 0, \quad -\nabla_\eta \cdot v_\bullet^0 = 0 \quad \text{в } \mathbb{B}, \quad v_\bullet^0 = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{B}, \quad (32)$$

$$-\nu \Delta_\eta v_3^0 + \partial_z p^0 = 0 \quad \text{в } \mathbb{B}, \quad v_3^0 = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{B}. \quad (33)$$

Здесь $\nabla_\eta = (\partial/\partial\eta_1, \partial/\partial\eta_2)$, $\Delta_\eta = \nabla_\eta \cdot \nabla_\eta$ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni \eta$, а $v_\bullet^0 = (v_1^0, v_2^0)$ — двумерный вектор скоростей. В итоге находим:

$$v_\bullet^0(\eta, z, \tau) = 0, \quad v_3^0(\eta, z, \tau) = \frac{1}{4\nu} (|\eta|^2 - l^2) \partial_z p^0(z, \tau). \quad (34)$$

Кроме того, давление $p'(z, \tau)$ в задаче (32) не зависит от переменных η , а значит, его можно взять нулевым, поскольку точно такие же свойства приписаны главному члену анзаца (25), а повторение не нужно.

Фрагмент второй задачи из рекуррентной последовательности представляет собой аналогичную (32) двумерную систему уравнений Стокса с неоднородными условиями прилипания, унаследованными от

соотношений (10), (27),

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta v'_\bullet + \nabla_\eta p'' = 0, \quad -\nabla_\eta \cdot v'_\bullet = \partial_z v_3^0 \quad \text{в } \mathbb{B}, \\ v'_\bullet = \partial_\tau u_\bullet^0 \quad \text{на } \partial\mathbb{B}. \end{aligned} \quad (35)$$

Еще один фрагмент — аналогичная (33) задача Дирихле для уравнения Пуассона однозначно разрешима (она далее не понадобится), однако у задачи (35) имеется одно условие разрешимости (равенство нулю полного потока)

$$\int_{\mathbb{B}} \partial_z v_3^0(\eta, z, \tau) d\eta + \int_{\partial\mathbb{B}} n(\eta) \cdot \partial_\tau u_\bullet^0(\eta, z, \tau) ds_\eta = 0, \quad (36)$$

где $n(\eta) = (l^{-1}\eta_1, l^{-1}\eta_2)$ — единичный вектор внешней нормали на окружности $\partial\mathbb{B}$, а ds_η — элемент ее длины.

Далее будет проверено, что компонента $u_r^0 = n \cdot u_\bullet^0$ вектора смещений стенки не зависит от угловой переменной φ . Таким образом, в силу второй формулы (34) соотношение (36) принимает вид дифференциального уравнения

$$\partial_\tau u_r^0(z, \tau) - \frac{l^3}{16\nu} \partial_z^2 p^0(z, \tau) = 0, \quad z \in (-l_-, l_+) \quad (37)$$

(сократили множитель $2\pi l$). Границы изменения времениподобного параметра τ будут установлены в п. 5.

Применим ту же процедуру понижения размерности к задаче (20), (13), (14) в тонкой веретенообразной области (3) (см. рис. 1). Необходимые изменения, вызванные вариацией сечения

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(z) &= \{y : A < |y| < A + H(z)\} \\ \Rightarrow \mathbb{H}(z) &= \{\eta : \delta_w^{-1} A < |\eta| < \delta_w^{-1} (A + H(z))\}, \end{aligned} \quad (38)$$

можно найти, например, в статье [12]. Прежние действия — подстановка анзацев в краевую задачу и сбор коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра — порождают аналогичные (32), (33) и (35) краевые задачи на сечении (38) гематомы Ξ_A . Решение первой из них, а именно,

$$-\nu \Delta_\eta V_\bullet^0 + \nabla_\eta P'' = 0, \quad -\nabla_\eta \cdot V_\bullet^0 = 0 \quad \text{в } \mathbb{H}(z), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} V_\bullet^0 &= 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{H}(z), \\ -\nu \Delta_\eta V_3^0 + \partial_z P^0 &= 0 \quad \text{в } \mathbb{H}(z), \quad V_3^0 = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{H}(z) \end{aligned} \quad (40)$$

имеет вид

$$V_{\bullet}^0 = 0, \quad P' = 0, \quad V_3^0(\eta, z, \tau) = \psi(\eta, z) \partial_z P^0(z, \tau) \quad (41)$$

$$\psi(\eta, z, \tau) = \frac{1}{4\nu\delta_w^2} \left(\delta_w^2 |\eta|^2 - (A + H(z))^2 + C(z) \ln \frac{\delta_w |\eta|}{A + H(z)} \right), \quad (42)$$

$$C(z) = \left(\ln \frac{A}{A + H(z)} \right)^{-1} (2A + H(z)) H(z).$$

Наконец, у аналогичной (35) задачи Стокса

$$-\Delta_{\eta} V'_{\bullet} + \nabla_{\eta} P'' = 0, \quad -\nabla_{\eta} \cdot V'_{\bullet} = \partial_z V_3^0 \quad \text{в } \mathbb{H}(z),$$

$$V'_{\bullet} = \partial_{\tau} u_{\bullet}^0 \quad \text{при } |\eta| = A, \quad V'_{\bullet} = \partial_{\tau} U_{\bullet}^0 \quad \text{при } |\eta| = A + H(z)$$

есть одно условие разрешимости, а аналогичная (40) задача Дирихле для уравнения Пуассона однозначно разрешима. Обработаем упомянутое условие разрешимости, которое требует обращения в нуль полного потока:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{H}(z)} \partial_z V_3^0(\eta, z, \tau) d\eta + \int_{\mathbb{S}(\delta_w^{-1}A)} n(\eta) \cdot \partial_{\tau} u_{\bullet}^0(\eta, z, \tau) ds_{\eta} + \\ & + \int_{\mathbb{S}(\delta_w^{-1}(A+H(z)))} n(\eta) \cdot \partial_{\tau} U_{\bullet}^0(\eta, z, \tau) ds_{\eta} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Первый интеграл по кольцу (38) равен

$$\partial_z \left(\int_{\mathbb{H}(z)} \psi(\eta, z, \tau) d\eta \partial_z P^0(z, \tau) \right), \quad (44)$$

причем производную ∂_z удалось вынести за знак интегрирования благодаря формуле дифференцирования интегралов с переменными пределами и равенству $\psi(\eta, z) = 0$ при $\eta \in \partial\mathbb{H}(z) = \mathbb{S}(\delta_w^{-1}A) \cup \mathbb{S}(\delta_w^{-1}(A + H(z)))$. Как и при выводе уравнения (37), интеграл по окружности $\mathbb{S}(\delta_w^{-1}A) = \{\eta : |\eta| = \delta_w^{-1}A\}$ принимает вид

$$- \int_{\mathbb{S}(\delta_w^{-1}A)} \partial_{\tau} u_r^0(z, \tau) ds_{\eta} = -2\pi\delta_w^{-1}A \partial_{\tau} u_r^0(z, \tau), \quad (45)$$

а знак минус – следствие формулы $n(\eta) = -\delta_w A^{-1}\eta$ для вектора единичной нормали на внутренней окружности кольца $\mathbb{H}(z)$.

Вычислим последний интеграл из суммы (43), содержащий радиальную компоненту

$$U_r^0(z, \tau) = n(\eta) \cdot U_\bullet^0(\eta, z, \tau) \quad \text{на } \mathbb{S}(\delta_w^{-1}(A + H(z)))$$

главного члена анзаца для вектора смещений в мышце

$$U(x, t) = \delta U^0(\eta, z, \tau) + \delta^2 U^1(\eta, z, \tau) + \dots \quad (46)$$

Вспомнив формулы (22) для осесимметрического решения задачи теории упругости на плоскости с вырезанным кругом, находим связь

$$\sigma_{rr}(z, \tau) = -2\mu(A + H(z))^{-1}U_r(z, \tau),$$

которая в силу представлений (29), (30), (46), соотношения (24) и формулы (16) для вектора нормали означает, что

$$P^0(z, \tau) - 2\mu\gamma_b^{-1} = 2\mu\gamma_b^{-1}\delta_w(A + H(z))^{-1}U_r^0(z, \tau) \quad (47)$$

Таким образом, упоминавшийся интеграл по внешней окружности кольца принимает вид

$$\int_{\mathbb{S}(\delta_w^{-1}(A+H(z)))} \partial_\tau U_r^0(z, \tau) = \frac{\pi}{2\mu} \gamma_b \delta_w^{-2} (A + H(z))^2 \partial_\tau P^0(z, \tau). \quad (48)$$

Подставим выражения (44), (45) и (48) в равенство (43) и получим дифференциальное уравнение, описывающее в главном движение крови внутри гематомы,

$$\frac{\gamma_b}{2\mu\delta_w} (A+H(z))^2 \partial_\tau P^0(z, \tau) - A \partial_\tau u_r^0(z, \tau) - \frac{\delta_w}{2\pi} \partial_z (\Psi(z) \partial_z P^0(z, \tau)) = 0,$$

$$z \in (-L_-, L_+).$$

(49)

Это уравнение, в том числе и коэффициент

$$\Psi(z) = - \int_{\mathbb{H}(z)} \psi(\eta, z) d\eta, \quad (50)$$

еще предстоит упростить, так как в них присутствуют несколько малых и больших параметров.

Еще одно уравнение, связывающее деформацию стенки с внешним и внутренним давлением, выводится подстановкой анзацев (25), (29) и (27) в систему (5). При этом та же аргументация, что и в статьях [2, 4], устанавливает осевую симметрию напряженно-деформированного состояния стенки, разумеется, при дополнительном (и, может быть,

спорном – см. далее п. 5) предположении о малом влиянии отверстия. В любом случае считаем, что смещения u_r и u_φ не зависят от угловой переменной φ , а также вводим равенство $u_\varphi = 0$. Учитывая медленную изменяемость относительно продольной координаты z , обнаруживаем, что согласно формулам (6) и (27) выполнены соотношения

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = a^{-1}\delta_w u_r^0 + \dots, \quad \varepsilon_{zz} = \dots, \quad \varepsilon_{z\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = \dots, \quad (51)$$

где многоточие, как обычно, заменяет младшие асимптотические члены. Кроме того, анзацы (25), (26) и (29), (30), подставленные в выражения (9) и (12) для гидродинамических сил, показывают, что

$$\begin{aligned} f_r &= -p^0 + \dots, & f_\varphi &= 0, & f_z &= \dots, \\ F_r &= -P^0 + \dots, & F_\varphi &= 0, & F_z &= \dots \end{aligned} \quad (52)$$

В итоге выводим из формул (51) и (52), что только первая строка системы (5) приобретает значимую правую часть, а итоговая форма строки выглядит так:

$$\begin{aligned} a^{-1}\delta_w K_w u_r^0(z, \tau) + ha\gamma_w \delta_w^5 \partial_\tau^2 u_r^0(z, \tau) &= \gamma_b(p^0(z, \tau) - P^0(z, \tau)), \\ z &\in (-l_-, l_+). \end{aligned} \quad (53)$$

Коэффициенты полученного дифференциального уравнения нуждаются в дополнительном анализе из-за присутствия в них разнообразных малых параметров, в частности, величин $\delta = \delta_w$ и K_w из (2) и (21).

5. Постановка краевых и других условий. Начнем с классических условий сопряжения Кирхгофа в точке $z = 0$, вблизи которой имеется отверстие диаметром $O(a)$, соединяющее сосуд с гематомой и в главном выравнивающее давления (25) и (26) при $z = 0$. Иными словами, функции p^0 и P^0 следует считать непрерывными и удовлетворяющими условию

$$p^0(0, \tau) = P^0(0, \tau). \quad (54)$$

Кроме того, при помощи соотношений (26), (34) вычисляем поток через сечение сосуда Θ_0^z (см. формулы (1) и (31)):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_a} v_3(y, z, t) dy &= \delta_w^4 \int_{\mathbb{B}} v_3^0(\eta, z, \tau) d\eta + \dots = \\ &= -\frac{\pi}{8\nu} \delta_w^4 l^4 \partial_z p^0(z, \tau) + \dots = -\frac{\pi}{8\nu} a^4 \partial_z p^0(z, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (55)$$

Аналогично соотношения (30), (42), (41) доставляют выражения для потока через сечение гематомы Ξ_A (см. формулы (3) и (38)):

$$\int_{\mathbb{H}_A(z)} V_3(y, z, t) dy = \delta_w^4 \int_{\mathbb{H}(z)} V_3^0(\eta, z, \tau) d\eta + \dots = -\delta_w^4 \Psi(z) \partial_z P^0(z, \tau). \quad (56)$$

При этом $\Psi(z)$ – величина (50).

Поскольку кровь может проходить из сосуда в гематому и обратно, согласно представлениям (55) и (56) производные функций p^0 и P^0 могут приобретать скачки в точке $z = 0$, однако очевидное равенство нулю суммарного потока обеспечивает еще одно (четвертое) условие в точке $z = 0$

$$\frac{\pi}{8\nu} a^4 [\partial_z p^0](\tau) + \delta_w^4 \Psi(0) [\partial_z P^0](\tau) = 0. \quad (57)$$

Здесь $[f](\tau) = f(+0, \tau) - f(-0, \tau)$ – скачок функции f в точке $z = 0$.

Постановка условий Кирхгофа (54), (57), связывающих основные члены анзацев (25) и (29) – давления p^0 в сосудах и давления P^0 в гематоме, подразумевает сохранение в главном осевой симметрии течений даже вокруг несимметрично расположенного отверстия в стенке артерии. Такое допущение вполне разумно, так как поперечный размер гематомы все-таки больше диаметра сосуда, а значит, вблизи малого отверстия возникает эффект пограничного слоя, который в нужной мере локализует проявление асимметрии.

Теперь займемся краевыми условиями на концах выделенного участка артерии. Наиболее простым и давним способом медицинского освидетельствования является измерение артериального давления³. Периферийное давление p_∞ около голеностопа в спокойном состоянии организма варьируется мало, разве лишь в режимах покой/нагрузка или утро/вечер, и поэтому на дальнем конце выделенного участка артерии выставим краевое условие Дирихле

$$p^0(l_+, \tau) = p_\infty \quad (58)$$

с постоянной правой частью.

Современная диагностическая ультразвуковая аппаратура (см., например, справочник [13]) позволяет измерить поток крови, проходящий через отдельный участок сосуда, и в принципе при правильном функционировании артерии, например, при отсутствии противотока в ней (ср. статью [4, § 2]), можно назначить краевое условие Неймана

$$-\partial_z p^0(-l_-, \tau) = \Phi(\tau), \quad (59)$$

где $\Phi(\tau)$ — величина, пропорциональная среднему потоку через сечение $\{x \in \Theta_0^a : z = -l_-\}$ в момент τ (ср. формулу (55) и далее (67)).

Такое условие следует принять на *стеноческом* (активном) участке $(0, t_*) \ni t$, когда очередная порция крови, посланная сердцем, проходит через начало $z = -l_-$ выделенного участка $(-l_-, l_+) \ni z$ артерии и, в частности, из-за локального повышения давления частично проникает в гематому. На остальном временном интервале $(t_*, T) \ni t$ (напомним, что T — период, т.е. $1/T$ — частота пульса) сердечный клапан закрыт, приток крови со стороны сердца в канал Θ_0^a иссякает, что сопровождается возвратом излишка крови из гематомы в артерию. При исходе из гематомы в канал сосуда кровь имеет возможность двигаться и движется в оба направления, как в сторону от сердца (правильное течение), так и по направлению к сердцу (противоток), т.е. процесс *двунаправленный*. Это — характерная черта *пассивной* фазы кровотока. Активной фазе в главном отвечает течение Пуазейля, которое в цилиндре $\mathbb{B}_a \times \mathbb{R}$ с жесткими стенками имеет вид

$$\mathcal{P}(z) = -\mathcal{F}z, \quad \mathcal{V}_\bullet = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) = 0, \quad \mathcal{V}_3(y) = \frac{\mathcal{F}}{4\nu}(a^2 - |y|^2),$$

³Бытует вполне оправданное мнение, что врачи придают большое значение отслеживанию артериального давления только потому, что вплоть до конца прошлого века тонометр был единственным подручным инструментом, пригодным для каких-либо измерений во всей кровеносной системе.

реализуется локально в здоровой артерии согласно асимптотическим представлениям (25), (26), (34) и характеризуется строгой однонаправленностью, так как $\mathcal{V}_3(y) > 0$ при $\mathcal{F} > 0$.

Распространение условия (59) с нулевой правой частью (кровь от сердца не поступает) на временной интервал $(t_*, T) \ni t$ запрещает противоток, что вполне приемлемо для здоровой артерии, но не годится для поврежденной, так как не дает адекватное описание взаимодействия артерии с гематомой. Впрочем, из-за слабой интенсивности противотока в случае $l_- \gg L_-$ (гематома еще не разрослась) упомянутым обстоятельством можно пренебречь и положить $t_* = T$.

Поскольку обильное и пульсирующее течение крови “на входе” $z = -l_-$ артерии препятствует точному измерению осциллирующего давления $p(-l_-, \tau)$, можно при учете анатомического строения нижней конечности взять в качестве необходимого данного на интервале $(t_*, T) \ni t$ давление

$$p^0(l_0, \tau) = p_*(\tau) \quad (60)$$

на удалении от гематомы, например, в подколенной части артерии, где давление варьируется мало, но все-таки отличается от периферийного p_∞ . Подчеркнем, что длина l_- (расстояние от аневризмы до паха) в несколько раз меньше l_0 и, конечно же, значительно меньше l_+ (соответственно расстояния до голени и голеностопа).

Упомянем еще одно важное обстоятельство. Постоянное давление $-2\mu\gamma_b^{-1}$, фигурирующее в условии (24) и вызванное реакцией мышцы на возникновении гематомы, никак не проявилось в уравнениях (37), (49) и (53). Между тем сжимающие напряжения в мышце – один из факторов, которые препятствуют проникновению крови в гематому при активной фазе и способствуют истечению при пассивной фазе. Упомянутую составляющую нетрудно учесть, оперируя с разностями

$$\bar{p} = p^0 - 2\mu\gamma_b^{-1} \text{ и } \bar{P} = P^0 - 2\mu\gamma_b^{-1}, \quad (61)$$

причем по понятным причинам переход к новым неизвестным (61) никак не сказывается на дифференциальных уравнениях (37), (46), (53) и краевом условии (59), но только изменяет правые части (58) и (60).

6. Окончательная форма одномерной модели. Введение безразмерных параметров полезно при асимптотическом анализе для сравнения величин различной физической природы, однако при конкретных

расчетах для выработки практических рекомендаций удобно вернуться к размерным переменным и, в частности, аналогично (61) и в соответствии с анзацем (27) ввести осредненное радиальное смещение стенки

$$\bar{u}_r = \delta_w u_r^0$$

В итоге после возврата к обычному времени $t = \delta_w^{-2} \tau$ и учета формулы (2) для параметра $\delta = \delta_w$ преобразуем уравнение (37) к виду

$$\partial_t \bar{u}_r(z, t) - \frac{a^3}{16\nu} \partial_z^2 \bar{p}(z, t) = 0, \quad (z, t) \in v := (-l_-, l_+) \times (0, T).$$

Такие же операции переделывают уравнение (53) в следующее:

$$a^{-1} K_w \bar{u}_r(z, t) + ha \gamma_w \partial_t^2 \bar{u}_r(z, t) = \gamma_b (\bar{p}(z, t) - \bar{P}(z, t)), \quad (z, t) \in v. \quad (62)$$

При окончательной обработке уравнения (49), описывающего движение крови внутри гематомы, примем во внимание малость числа h_h из (17) и потому положим $A = 0$ в первых двух членах из левой части (49). Кроме того, заменим кольцо (38) с отверстием малого относительного радиуса сплошным кругом $\{\eta : |\eta| < \delta_w^{-1} H(z)\}$. В результате формула (42) для продольной компоненты вектора скорости будет вместо (41) содержать функцию

$$\psi(\eta, z) = \frac{1}{4\nu} (|\eta|^2 - \delta_w^{-2} H(z)^2),$$

а величина (50) примет вид

$$\Psi(z) = \frac{\pi}{8\nu} \delta_w^{-4} H(z)^4. \quad (63)$$

После указанных замен уравнение (49) превращается в такое:

$$\frac{\gamma_b}{2\mu} H(z)^2 \partial_t \bar{P}(z, t) - \frac{1}{16\nu} \partial_z (H(z)^4 \partial_z \bar{P}(z, t)) = 0, \quad (z, t) \in \Upsilon := (-L_-, L_+) \times (0, T). \quad (64)$$

Отметим, что в силу предположения (4) коэффициенты дифференциального уравнения (64) вырождаются в концевых точках $z = \pm L_\pm$, а значит, оно не нуждается в краевых условиях (см., например, книгу [14, § 30], а также статью [15] применительно к тонким веретенообразным областям).

Обсудим другие краевые условия, а также условия периодичности и сопряжения. В силу формул (55) и (56), (63) условия сопряжения

Кирхгофа (54), (57) в новых обозначениях выглядят следующим образом:

$$\bar{p}(0, t) = \bar{P}(0, t), \quad t \in (0, T), \quad (65)$$

$$\frac{\pi}{8\nu} a^4 [\partial_z \bar{p}](t) + \frac{\pi}{8\nu} H(0)^4 [\partial_z \bar{P}](t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (66)$$

При этом функции \bar{p} и \bar{P} непрерывны в точке $z = 0$. Подчеркнем, что постоянные вычитаемые в правых частях (61) не сказываются на соотношениях (65) и (66), но проявляются в условиях Дирихле (58) и (60), принимающих вид

$$\bar{p}(l_+, t) = p_\infty - 2\mu\gamma_b^{-1}, \quad t \in (0, T),$$

$$\bar{p}(l_0, t) = p_*(t) - 2\mu\gamma_b^{-1}, \quad t \in (t_*, T).$$

Наконец, краевое условие (59) записываем так:

$$-\frac{\pi}{8\nu} a^4 \partial_z \bar{p}(-l_-, t) = \bar{\Phi}(t), \quad t \in (0, t_*). \quad (67)$$

В этой форме условия (59) фигурирует присылаемый сердцем поток крови $\bar{\Phi}(t)$ в артерию на уровне $z = -l_-$. Точно так же в левой части (66) возникли суммы потоков, приходящих к сечениям соответственно артерии и гематомы на уровне $z = 0$:

$$\frac{\pi}{8\nu} a^4 [\partial_z \bar{p}](t) = \frac{\pi}{8\nu} a^4 \partial_z \bar{p}(+0, t) - \frac{\pi}{8\nu} a^4 \partial_z \bar{p}(-0, t),$$

$$\frac{\pi}{8\nu} H(0)^4 [\partial_z \bar{P}](t) = \frac{\pi}{8\nu} H(0)^4 \partial_z \bar{P}(+0, t) - \frac{\pi}{8\nu} H(0)^4 \partial_z \bar{P}(-0, t).$$

Наконец, гиперболическое уравнение (62) нуждается в условиях периодичности

$$\bar{u}_r(z, 0) = \bar{u}_r(z, T), \quad \partial_z \bar{u}_r(z, 0) = \partial_t \bar{u}_r(z, T), \quad z \in (-l_-, l_+).$$

Вместе с тем, параболическое уравнение (64) требует постановки начального условия.

Предположим, что аневризма стабильна, и зададим какое-либо распределение потока крови в гематоме в начальный момент времени

$$\bar{P}(z, 0) = P_0(z), \quad z \in (-L_-, L_+).$$

Выведем условие стабильности.

Ввиду малости главного члена

$$\bar{U}_r(z, t) = \delta_w U_r^0(z, \tau)$$

радиального смещения внешней границы гематомы (см. анзац (46)) приращение объема рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} & \pi \int_{-L_-}^{L_+} \left((A + H(z) + \bar{U}_r(z, t))^2 - (A + H(z))^2 \right) dz \\ & \approx 2\pi \int_{-L_-}^{L_+} H(z) \bar{U}_r(z, t) dz. \end{aligned}$$

Вместе с тем, в силу соотношений (47) и (61) имеем

$$\bar{U}_r(z, t) = \frac{\gamma_b}{2\mu} H(z) \bar{P}(z, t),$$

т.е. упомянутое приращение равно

$$\Delta V_h(t) = 2\pi \frac{\gamma_b}{2\mu} \int_{-L_-}^{L_+} H(z)^2 \bar{P}(z, t) dz. \quad (68)$$

Уравнение (64) и условие сопряжения (65) показывают, что

$$\begin{aligned} \Delta V_h(t) - \Delta V_h(0) &= \frac{\pi\gamma_b}{\mu} \int_0^t \int_{-L_-}^{L_+} H(z)^2 \partial_t \bar{P}(z, t) dz dt \\ &= \frac{\pi}{8\nu} \int_0^t \int_{-L_-}^{L_+} \partial_z (H(z)^4 \partial_z \bar{P}(z, t)) dz dt \quad (69) \\ &= \frac{\pi}{8\nu} H(0)^4 \int_0^t [\partial_z \bar{P}](t) dt. \end{aligned}$$

В правой части (69) появился суммарный приток крови в гематому за временной промежуток $(0, t)$. Это наблюдение полностью согласуется с понятным в силу формулы (68) условием невозрастания гематомы за период T :

$$0 = \int_0^T \int_{-L_-}^{L_+} H(z)^2 \partial_t \bar{P}(z, t) dz dt = \int_{-L_-}^{L_+} H(z)^2 (\bar{P}(z, T) - \bar{P}(z, 0)) dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Поверхностная энтальпия и упругие свойства кровеносных сосудов*. — Доклады РАН **441**, No. 1 (2011), 38–43.
2. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Asymptotic models of anisotropic elastic walls of blood vessels*. — *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (submitted).
3. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Асимптотическая модель взаимодействия потока крови со стенками вены и окружающей мышечной тканью*. — Доклады РАН **446**, No. 6 (2012), 631–636.
4. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Асимптотические модели течения крови в артериях и венах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 80–106.
5. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Одномерная модель вязкоупругого течения крови в тонком упругом сосуде*. Проблемы матем. анализа. Новосибирск, 2014 (submitted).
6. G. A. Holzapfel, *Collagen in Arterial walls: Biomechanical aspects*. in *Collagen: Structure and Mechanics*, ed. Fratzl P. New York, Berlin: Springer Science+Business Media (2008), 285–324.
7. Y. C. Fung, *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York, Berlin, Springer, 1993.
8. Y. C. Fung, *Biomechanics. Circulation*. Second edition. New York, Berlin, Springer, 2011.
9. С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий, *Изгибная жесткость тонкой пластины, армированной периодическими системами разведенных стержней*. — Прикладная матем. и механика **74**, No. 3 (2010), 441–454.
10. С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий, *Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней*. — Матем. сборник **202**, No. 8 (2011), 41–80.
11. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*. Т. 2. М., Наука, 1984.
12. С. А. Назаров, К. И. Пилецкас, *Рейнольдсово течение жидкости в тонком трехмерном канале*. — Литовский матем. сборник **30**, No. 4 (1990), 772–783.
13. W. J. Zwiebel, J. S. Pellerito, *Introduction to vascular ultrasonography*. 5th edition, Philadelphia, Elsevier, 2005.
14. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*. М., Наука, 1970.
15. С. А. Назаров, Я. Таскинен, *Асимптотика решения задачи Неймана в тонкой области с заостренной кромкой*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2005), 193–219.

Kozlov V. A., Nazarov S. A. A simple one-dimensional model of a false aneurysm in the femoral artery.

Using the dimension reduction procedure, one-dimensional model of the periodic blood flow in the artery, which flows out through a small hole in the thin elastic artery wall connected to a spindle-shaped hematoma, is constructed. This model is described by a system of two parabolic and one hyperbolic equations provided with mixed boundary and periodicity

conditions. The blood exchange between the artery and the hematoma is expressed by the Kirchhoff matching conditions. Despite the simplicity, the constructed model allows us to describe a damping of pulsating blood flow by the hematoma and determine the conditions of its growth. In medicine, considered biological object is called a false aneurysm.

Department of Mathematics,
Linkopings Universitet
581 83 Linkoping, Sweden
E-mail: vlkoz@mai.liu.se

Поступило 2 октября 2014 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский проспект 28,
198504, СПб, Старый Петергоф,
Институт проблем машиноведения РАН,
С.-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk