

Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов

СРАЩИВАНИЕ АСИМПТОТИК В ОСВЕЩЕННОЙ ЧАСТИ ОБЛАСТИ ФОКА

Применение метода локальных асимптотических разложений требует процедуры согласования асимптотик, построенных в различных областях исходных задач. В случае задач дифракции и распространения коротких волн эта процедура согласования рассматривалась в различных ситуациях в работах и монографиях [1–4].

Работа В. А. Фока о волновом поле вблизи поверхности проводящего тела [1, 2] является одной из первых, в которых предлагается и развивается метод параболического уравнения, известный в настоящее время в теории дифракции и распространения волн как метод Леонтовича–Фока. Однако в этой статье имеется несколько предположений физического характера, которые сужают применимость её результатов до малой окрестности плоскости падения предельного луча, т.е. луча падающей волны, который касается поверхности рассеивателя в некоторой точке на границе свет-тень. Так, изначально трехмерная задача рассматривается в окрестности точки падения $x = y = z = 0$ некоторого предельного луча, где уравнение поверхности рассеивателя описывается с помощью 1-ой квадратичной формы

$$z = -1/2(ax^2 + 2bxy + cy^2). \quad (0.1)$$

При этом z направлен по нормали к поверхности, x изменяется вдоль предельного луча в теньевую зону, а ось y ортогональна плоскости падения x, z . Параболическое уравнение для некоторой искомой функции V от двух переменных ξ, ζ выводится в плоскости падения x, z , при этом ξ и ζ суть внутренние (растянутые) переменные соответствующего пограничного слоя, по направлению совпадающие с x и z соответственно. Далее просто предполагается, что искомое решение исходной трехмерной задачи зависит от x, y, z посредством следующих формул

$$\xi = t(ax + by),$$

Ключевые слова: дифракция коротких волн на вытянутом теле вращения, лучевой метод, область Фока, согласование локальных асимптотик.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), (грант 14-01-00535-а).

$$\zeta = 2am[z + 1/2(ax^2 + 2bxy + cy^2)], \quad (0.2)$$

где

$$m = \left(\frac{k}{2a}\right)^{1/3} = \left(\frac{kR_0}{2}\right)^{1/3}$$

является большим безразмерным параметром Фока, а $R_0 = 1/a$ есть радиус кривизны поверхности в нормальном сечении вдоль луча падающей волны.

С физической точки зрения представляется вероятным, что построенное решение описывает приближенно волновое поле и в некоторой окрестности плоскости падения x, z , если оба главных радиуса кривизны поверхности рассеивателя мало отличаются друг от друга. Однако остается неясным, как это можно подтвердить математически. Кроме того, в [1, 2] главный осциллирующий множитель взят в виде $\exp(ikx)$, т.е. вдоль касательной к поверхности тела. Концепция же коротковолнового приближения в задачах дифракции устанавливает, что волновое поле "скользит" по геодезическим на поверхности тела. Это особенно существенно в затененной части области Фока, где возникают волны соскальзывания.

По этим причинам в задачах дифракции коротких волн на вытянутых 3-х мерных телах метод параболического уравнения был модернизирован, см. по этому поводу работы [5, 6] и библиографию к ним. При рассмотрении дифракции на сильно вытянутых телах авторам пришлось детально исследовать вопрос сращивания локальных асимптотик в освещенной части области Фока путем прямого построения в ней отраженной волны лучевым методом. Основной трудностью на этом пути, который В. А. Фок оценивал как "довольно сложный," является вычисление эйконала и геометрического расхождения (амплитуды) отраженной волны в криволинейных координатах, используемых в области Фока.

В статье [7] рассматривалась задача согласования лучевой асимптотики в освещенной зоне Фока для задачи дифракции на гладком выпуклом контуре на основе свойств однородных функций. В работе [8] подобная задача решалась в значительно более общей ситуации импедансных краевых условий на контуре, чем в [7], так же на основе рассмотрения однородных функций.

Наш подход базируется исключительно на лучевых соображениях и отличается от метода, используемого в работах [7, 8]. По этому поводу см. работу [9], в которой для дифракции на сильно вытянутом теле был предложен новый пограничный слой в окрестности границы свет-тень, определяемый условиями $k^{1/7}s = O(1)$, $k^{4/7}n = O(1)$. В освещенной части этого слоя появляется уравнение Фока и возникает необходимость решать рассматриваемую здесь задачу по сращиванию асимптотик.

Целью данной статьи является подробное изложение решения указанной задачи. Подчеркнем, что полученные нами формулы совпадают с результатами В. А. Фока [1, 2], которые были получены на основе асимптотического исследования интегральных формул для решения.

§1. ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ В ОСВЕЩЕННОЙ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ СВЕТ-ТЕНЬ ОБЛАСТИ ФОКА.

Мы рассматриваем коротковолновую дифракцию плоской волны на теле вращения Σ , образованном вращением плоской, выпуклой кривой $x = f(z)$ вокруг оси z декартовой системы координат x, y, z :

$$r = f(z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Сечение поверхности $\partial\Sigma$ плоскостью $z = 0$ есть экватор и он совпадает с границей свет-тень падающей плоской волны $U^{\text{inc}} = e^{ikz}$, $k \gg 1$, где k – волновое число.

Полное волновое поле $U = U^{\text{inc}} + U^{\text{ref}}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и обращается в нуль на границе

$$(\Delta + k^2)U = 0, \quad U|_{\partial\Sigma} = 0.$$

Наряду с декартовыми координатами введем криволинейные координаты (s, φ, n) , где s есть длина дуги вдоль меридианов-геодезических на поверхности тела $\partial\Sigma$, φ это азимутальный угол, длина вдоль внешней нормали тела вращения обозначена через n .

Длина дуги s связана с координатой z соотношением

$$s = \int_0^z \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz, \quad (1.1)$$

т.е. она отсчитывается от экватора и в освещенной части тела вращения $s \leq 0$. Обратная функция $z = z(s)$ находится обращением равенства (1.1).

Для нахождения связи декартовых координат с координатами (s, φ, n) удобно использовать следующее векторное равенство. Обозначим через \mathbf{R}_M радиус-вектор точки M в декартовых координатах, через $\mathbf{R}_\Sigma(s, \varphi)$ радиус-вектор точки на поверхности $\partial\Sigma$ и пусть $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s, \varphi)$ единичный вектор внешней нормали к $\partial\Sigma$. Тогда имеет место следующее векторное равенство

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_\Sigma(s, \varphi) + n \mathbf{n}(s, \varphi), \quad (1.2)$$

в котором входящие в него векторы имеют вид

$$\mathbf{R}_M = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{R}_\Sigma = f(z(s))(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) + z(s) \mathbf{e}_z, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y - f'(z(s)) \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (f'(z(s)))^2}}.$$

Здесь $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ есть орты декартовой системы координат.

Дифференцируя равенство (1.2), находим следующую формулу для квадрата элемента длины

$$dS^2 = (d\mathbf{R}_M, d\mathbf{R}_M) = h_s^2 ds^2 + dn^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2,$$

в котором коэффициенты Ламе h_s и h_φ имеют вид

$$h_s = 1 - n \frac{f''(z(s))}{[1 + (f'(z(s)))^2]^{3/2}} = 1 + n K(s),$$

$$h_\varphi = f(z(s)) + \frac{n}{\sqrt{1 + (f'(z(s)))^2}} = f(z(s)) + n \frac{dz}{ds}. \quad (1.4)$$

В приведенных формулах (1.1)–(1.4) f' и f'' означают производные первого и второго порядков от функции $f(z)$ по аргументу z , который является функцией длины дуги s и получен обращением формулы (1.1), $K(s)$ есть кривизна геодезической (меридиана) в точке s .

Далее явные формулы для координат (x, y, z) через координаты (s, φ, n) получаются из равенства (1.2) умножением обеих частей скалярно на орты $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. В силу симметрии рассматриваемой задачи

относительно вращения по углу φ , достаточно получить формулы связи лишь в одном сечении плоскостью $\varphi = \text{const}$. Для определенности положим $\varphi = 0$, тогда получаем из равенств (1.2)–(1.4)

$$x = f(z(s)) + n \frac{dz(s)}{ds}; \quad z = z(s) - n f'(z(s)) \frac{dz(s)}{ds}. \quad (1.5)$$

Построение лучевым методом отраженной волны в осесимметрической задаче не представляет трудностей. Действительно, рассмотрим множество лучей падающей волны, образующих круговой цилиндр радиуса r_* с осью $x = y = 0$. При $r_* < f(0)$ этот цилиндр пересекает тело вращения по параллели, скажем, $s = s_*$ на освещенной части поверхности $\partial\Sigma$, где $s_* < 0$. Каждый луч отражается от поверхности по закону Снеллиуса в точке этой параллели и в результате образуются круговой конус отраженных лучей. При $s_* = f(0)$ соответствующий цилиндр падающих лучей, очевидно, касается поверхности тела в точках экватора, образуя границу свет-тень на $\partial\Sigma$ и далее цилиндр предельных лучей. Множество этих лучей при каждом фиксированном r_* и соответственно s_* допускает простое описание в декартовых координатах, тем более, что в силу осевой симметрии достаточно рассмотреть этот процесс лишь в полуплоскости $\varphi = 0$. Обозначим через $z_* = z(s_*)$ и $x_* = f(z_*)$ декартовы координаты точки падения (отражения) луча набегающей плоской волны. Пусть далее $\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_z \mathbf{e}_z$ есть единичный вектор, направленный вдоль отраженного луча. Тогда уравнение для отраженного луча можно записать в виде

$$\frac{x - x_*}{p_x(x_*, z_*)} = \frac{z - z_*}{p_z(x_*, z_*)} = t, \quad (1.6)$$

где параметр t имеет, очевидно, смысл длины вдоль отраженного луча от точки отражения s_* до точки наблюдения, т.к. $p_x^2 + p_z^2 = 1$ при любом z_* . Компоненты p_x и p_z единичного вектора \mathbf{p} можно выразить через угол γ наклона касательной к кривой $x = f(z)$ в точке отражения.

Из Рис.1 легко видеть, что угол между вектором \mathbf{p} и осью z равен 2γ . Таким образом, для p_x и p_z получаем следующие выражения

$$p_z = \cos 2\gamma, \quad p_x = \sin 2\gamma, \quad (1.7)$$

где правые части вычисляются в точке отражения луча $z_* = z(s_*)$. Ввиду того, что $\tan \gamma = f'(z)$, компоненты p_x и p_z выражаются в терминах производной $f'(z)$.

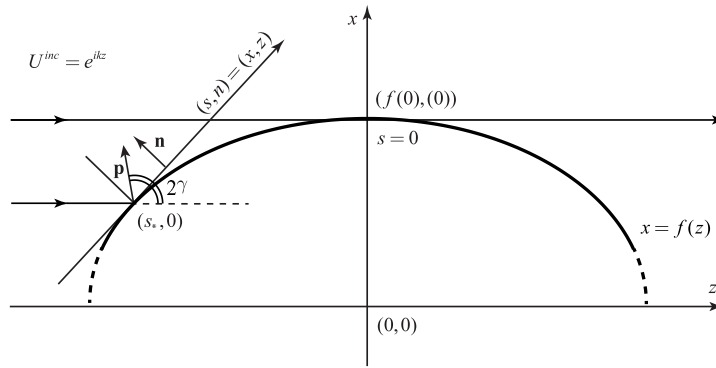


Рис. 1. Связь между координатами и построение отраженных лучей.

Формулы (1.6) описывают множество отраженных лучей в лучевых координатах, которыми являются $z_* = z(s_*)$ и t . Действительно, задавая величину z_* , мы фиксируем луч, а значение t определяет точку на нем. При $z_* = 0$ получаем предельный луч, касающийся $\partial\Sigma$ в точке $z = 0, x = f(0)$.

Для выпуклой кривой $x = f(z)$ это множество лучей образует регулярное поле, так как лучи заполняют некоторую часть плоскости $x > 0$ вне тела вращения без пересечений (то есть через каждую точку в этой области проходит один и только один отраженный луч). Это означает, что существует взаимно однозначное соответствие между лучевыми координатами s_*, t , декартовыми x, z и криволинейными s, n в данной области. В свою очередь это дает возможность, по крайней мере в принципе, построить лучевую формулу для отраженной волны, а именно, эйконал τ и геометрическое расхождение J как функции декартовых x, z или криволинейных s, n координат. Это осуществляется по следующей схеме. Для J имеем следующую формулу

$$J = \left| \frac{D(x, z)}{D(t, s_*)} \right| = \left| \frac{D(x, z)}{D(s, n)} \right| \left| \frac{D(s, n)}{D(t, s_*)} \right|. \quad (1.8)$$

С помощью уравнения лучей (1.6) функциональные детерминанты в правой части (1.8) элементарно вычисляются в лучевых координатах s_*, t . После этого лучевые координаты должны быть выражены через

декартовы x, z или криволинейные s, n координаты. Эта последняя процедура и представляет наибольшую трудность.

Для построения эйконала τ рассмотрим дифференциальную форму $p_x dx + p_z dz$, в которой p_x и p_z компоненты единичного вектора \mathbf{p} , направленного вдоль отраженного луча. Поскольку в рассматриваемой задаче лучи являются прямыми, p_x и p_z постоянны на отраженном луче и поэтому зависят лишь от одного лучевого параметра s_* . На первом шаге этот параметр s_* должен быть выражен как функция от декартовых x, z или криволинейных s, n координат в области регулярности поля отраженных лучей. (Заметим, что эту область называют лагранжевым многообразием). Таким образом, на первом шаге получаем I-форму $\omega^I = p_x(x, z)dx + p_z(x, z)dz$ на этом лагранжевом многообразии и эта форма ω^I является замкнутой, т.е. криволинейный интеграл от нее не зависит от пути интегрирования. Более того она является точной, поскольку фундаментальная группа этого лагранжева многообразия тривиальна. Другими словами это означает следующее. Дифференциальная форма ω^I есть полный дифференциал некоторой функции τ , определенной на части плоскости, где поле отраженных лучей является регулярным, поскольку там нет замкнутых путей, которых нельзя было бы стянуть в точку путем непрерывной деформации. Таким образом $d\tau = p_x dx + p_z dz$ и для восстановления τ из этого равенства никаких условий квантования не требуется. Функция τ тем самым восстанавливается вычислением криволинейного интеграла

$$\tau = \int p_x dx + p_z dz, \quad (1.9)$$

который, как уже отмечалось, не зависит от пути интегрирования. Заметим в заключение, что τ автоматически удовлетворяет уравнению эйконала $(\nabla\tau)^2 = 1$, так как из (1.9) получаем, что $\frac{d\tau}{dx} = p_x$, $\frac{d\tau}{dz} = p_z$ и $p_x^2 + p_z^2 = 1$ по определению p_x, p_z .

Повторим еще раз, что основной трудностью на пути реализации описанной выше схемы является переход от лучевых координат s_*, t к декартовым x, z или криволинейным s, n координатам.

Для сращивания лучевой асимптотики отраженной волны с решением параболического уравнения нам нужно рассматривать лишь освещенную часть зоны Фока в окрестности границы свет-тень. Эта окрестность определяется условиями $s \simeq O(k^{-1/3})$, $n \simeq O(k^{-2/3})$, где

волновое число k считается большим параметром $k \gg 1$. Поэтому переменные s, n оказываются малыми и все функции $f(z), z(s), K(s)$ и т.д., входящие в формулы (1.1)–(1.8), можно разложить в ряды Тейлора по степеням s и n . При этом в разложениях достаточно сохранить несколько первых членов, так как и лучевую формулу для отраженной волны достаточно построить лишь приближенно.

Приведем некоторые вспомогательные формулы, которые потребуются в дальнейшем

$$\begin{aligned} s &= z + \frac{1}{6}K^2(0)z^3 + O(z^4), \\ z &= s - \frac{1}{6}K^2(0)s^3 + O(s^4), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$f'(z(s)) = -K(0)s - K'(0)\frac{s^2}{2!} + O(s^3),$$

где $K(0)$ есть кривизна геодезической в точке $s = 0$ касания предельного луча, а $K'(0)$ ее производная в этой точке. Первая из формул (1.10) непосредственно следует из равенства (1.1), а вторая получается обращением ряда для $s(z)$.

Далее будем пользоваться лишь криволинейными координатами s, n , поэтому на первом шаге нужно найти явные формулы для связи их с декартовыми координатами.

Из равенств (1.2)–(1.4) и (1.10) получаем

$$\begin{aligned} x &= f(0) - \frac{1}{2}K(0)s^2 + n + \dots, \\ z &= s - \frac{1}{3!}K^2(0)s^3 + K(0)ns + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Нам нужно рассматривать отраженные лучи, которые попадают в освещенную часть зоны Фока. Это значит, что точки отражения s_* должны быть порядка $O(k^{-1/3})$. Разлагая правые части в равенствах (1.7) по степеням s и полагая $s = s_*$, находим

$$\begin{aligned} p_x &= -2K(0)s_* - K'(0)(s_*)^2 + \dots, \\ p_z &= 1 - 2K^2(0)(s_*)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Обратимся теперь к уравнениям отраженных лучей (1.6) в рассматриваемой зоне Фока. Используя равенства (1.11) и (1.12) в уравнениях (1.6), приходим к следующим соотношениям

$$n - \frac{1}{2}K(0)(s^2 - (s_*)^2) = ts_*[-2K(0) + \dots],$$

$$s - s_* - \frac{1}{6}K^2(0)(s^3 - (s_*)^3) + K(0)ns = t[1 - 2K^2(0)(s_*)^2 + \dots], \quad (1.13)$$

которые позволяют выразить лучевые координаты s_* , t через криволинейные координаты s , n с требуемой точностью в зоне Фока. В первом приближении получаем из второго соотношения (1.13), что $t \simeq s - s_*$. Подстановка этого значения t в первое соотношение (1.13) дает квадратное уравнение для нахождения s_* как функции s и n :

$$(s_*)^2 - s_*\frac{4}{3}s + \frac{1}{3}s^2 - \frac{2n}{3K(0)} = 0, \quad (1.14)$$

имеющее два вещественных корня $(s_*)_{1,2} = \frac{2}{3}s \pm \frac{1}{3}\sqrt{s^2 + 6nK^{-1}(0)}$. Нужный корень выбирается из следующего условия. По определению координат s , n в освещенной части зоны Фока s и s_* отрицательны и точка s_* должна быть левее точки s , см. Рис. 1, т.е. $|s_*| > |s|$. Если же точка наблюдения с координатами s , n находится на поверхности $\partial\Sigma$ рассеивателя, ($n = 0$), то ей соответствует тот отраженный луч, для которого $s = s_*$. Если под квадратным корнем из положительного числа понимать его арифметическое значение, что естественно, то при $n = 0$ получаем $\sqrt{s^2} = |s|$ и тогда $-\sqrt{s^2} = -|s| = s$. Поэтому для s_* следует взять второй корень

$$s_* = \frac{2}{3}s - \frac{1}{3}\sqrt{s^2 + 6\frac{n}{K(0)}}. \quad (1.15)$$

Поправку ко второму лучевому параметру t можно найти из равенства $t = \sqrt{(x - x_*)^2 + (z - z_*)^2}$, используя формулы связи (1.11) между x , z и s , n и равенство (1.15) для s_* .

Приведенные выше результаты позволяют явно представить дифференциальную форму $p_x dx + p_z dz$ в криволинейных координатах s , n . Дифференциалы dx и dz пересчитываются по формулам (1.11)

$$dx = -K(0)s ds + dn,$$

$$dz = ds \left(1 - \frac{1}{2}K^2(0)s^2 + K(0)n \right) + dnK(0)s, \quad (1.16)$$

а в выражения (1.12) для p_x , p_z нужно подставить формулу (1.15) для s_* .

В результате получаем следующую формулу

$$d\tau = \left\{ 1 + K^2(0) \left(-\frac{5}{18}s^2 + \frac{2}{9}s\sqrt{s^2 + \frac{6n}{K(0)}} \right) - \frac{1}{3}K(0)n \right\} ds + \\ + K(0) \left(-\frac{s}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{s^2 + \frac{6n}{K(0)}} \right) dn, \quad (1.17)$$

в которой сохранены члены вплоть до порядка $O(k^{-1})$ и отброшены все члены меньшего порядка при $k \gg 1$. Для получения эйконала τ_{ref} отраженной волны интегрируем дифференциальную форму (1.17) по следующему пути: интегрирование по s осуществляется при $n = 0$ и берется первообразная, которая совпадает со значением эйконала τ_{inc} падающей волны на $\partial\Sigma$, затем вычисляется интеграл по n от 0 до n при фиксированном значении s . В результате находим

$$\tau_{ref} = s - \frac{5}{54}K^2(0)s^3 - \frac{1}{3}K(0)ns + \frac{2}{27}K^2(0)\left(s^2 + \frac{6n}{K(0)}\right)^{3/2}. \quad (1.18)$$

Обратимся далее к вычислению амплитуды отраженной волны в освещенной зоне Фока и получим вначале формулу для геометрического расхождения J , см. равенство (1.8). Функциональный определитель

$$\left| \frac{D(x, z)}{D(t, s_*)} \right|$$

легко находится в лучевых координатах (в главных членах), используя равенства (1.6), (1.7) и (1.13)

$$\frac{D(x, z)}{D(t, s_*)} = -K(0)s_* + 2tK(0) + O((s_*)^3) + tO((s_*)^2). \quad (1.19)$$

Подставляя в (1.19) значение s_* из (1.15) и полагая $t \simeq s - s_*$, получаем следующее выражение для геометрического расхождения в главном члене для зоны Фока

$$J = K(0)\sqrt{s^2 + \frac{6n}{K(0)}}. \quad (1.20)$$

Напомним, что в равенстве (1.20) понимается арифметическое значение корня, поэтому знак модуля можно опустить. На поверхности

тела $n = 0$ и $s = s_*$, причем s и s_* отрицательны, поэтому из (1.20) следует равенство $J|_{n=0} = K(0)|s_*|$. Обозначим через $A_{\text{ref}} = \text{const } J^{-1/2}$ амплитуду отраженной волны, тогда A_{ref} должна быть равна -1 для условия Дирихле на $\partial\Sigma$. Это дает возможность найти произвольную постоянную. Окончательно получим

$$A_{\text{ref}} = -\sqrt{\frac{|s_*|}{\sqrt{s^2 + \frac{6n}{K(0)}}}}. \quad (1.21)$$

В заключение приведем формулы для отраженной волны в растянутых координатах σ, ν , используемых в зоне Фока.

Связь между координатами s, n и σ, ν определяется следующими равенствами

$$s = \frac{\sigma}{M_0 K(0)}, \quad n = \frac{\nu}{2M_0^2 K(0)}, \quad M_0 = \left(\frac{k}{2K(0)}\right)^{1/3}, \quad (1.22)$$

в котором M_0 есть большой параметр Фока. Используя равенства (1.22) в формулах (1.18), (1.21) получаем следующее выражение для отраженной волны U^{ref} в области Фока в главном члене асимптотики при $M_0 \rightarrow \infty$

$$U^{\text{ref}} \quad (1.23)$$

$$= -e^{iks} \sqrt{\frac{|\sigma_*|}{\sqrt{\sigma^2 + 3\nu}}} \exp \left\{ i \left(-\frac{5}{27}\sigma^3 - \frac{1}{3}\nu\sigma + \frac{4}{27}(\sigma^2 + 3\nu)^{3/2} \right) \right\},$$

где следует исключить лучевые параметры $s_*, (\sigma_*)$ в амплитуде с помощью формулы $\sigma_* = \frac{2}{3}\sigma - \frac{1}{3}\sqrt{\sigma^2 + 3\nu}$.

§2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ В ОСВЕЩЕННОЙ ЧАСТИ ОБЛАСТИ ФОКА МЕТОДОМ ПЕРЕВАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Для удобства читателей приводим основные моменты вычисления асимптотики отраженного поля в области Фока. Рассмотрим выражение для отраженного поля

$$U_0^{\text{ref}} = -\frac{e^{iks} i}{2\sqrt{\pi}} \int_L e^{i\sigma\zeta} \frac{w_2(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) d\zeta \quad (2.1)$$

при $\sigma = -|\sigma|$, $|\sigma| \rightarrow \infty$. Контур L охватывает корни функции $w_1(\zeta)$, лежащие на луче $\arg \zeta = \pi/3$.

1⁰ *Нахождение фазы отраженной волны* U_0^{ref} при $|\sigma| \rightarrow \infty$, $\sigma < 0$.

Далее для выделения быстро меняющихся функций заменим параметр интегрирования ζ новым параметром z по формуле $\zeta = \sigma^2 z$ при $\sigma^2 \rightarrow \infty$:

$$U_0^{\text{ref}} = -\sigma^2 \frac{e^{iks}i}{2\sqrt{\pi}} \int_L e^{-i|\sigma|^3 z} \frac{w_2(\sigma^2 z)}{w_1(\sigma^2 z)} w_1(\sigma^2 z - \nu) dz$$

Для удобства нахождения перевальной точки проведем еще одну замену $z = -t$. Тогда получаем

$$U_0^{\text{ref}} = \sigma^2 \frac{e^{iks}i}{2\sqrt{\pi}} \int_{L_1} e^{i|\sigma|^3 t} \frac{w_2(-\sigma^2 t)}{w_1(-\sigma^2 t)} w_1(-\sigma^2 t - \nu) dt, \quad (2.2)$$

при этом направление контура L_1 противоположно направлению контура L .

Будем предполагать, что перевальная точка находится на полуоси $t > 0$, тогда при $\sigma^2 \rightarrow \infty$ функции Эйри заменим их асимптотиками при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} w_1(-\sigma^2 t) &\simeq (\sigma^2 t)^{-1/4} \exp\left\{i\left[\frac{2}{3}(\sigma^2 t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]\right\}, \\ w_2(-\sigma^2 t) &= \overline{w_1(-\sigma^2 t)}. \end{aligned}$$

Вернемся к контуру L . Тогда окончательно для U_0^{ref} имеем

$$\begin{aligned} U_0^{\text{ref}} &= -\sigma^2 e^{-i\pi/4} \frac{e^{iks}i}{2\sqrt{\pi}} \int_L dt \frac{\exp\{i\psi\}}{(\sigma^2 t + \nu)^{1/4}}, \\ \psi &= |\sigma|^3 t - \frac{4}{3}(\sigma^2 t)^{3/2} + \frac{2}{3}(\sigma^2 t + \nu)^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

здесь под радикалом понимается арифметическое значение корня, потому фазу ψ можно записать так

$$\psi = |\sigma|^3 \left[t - \frac{4}{3}t^{3/2} + \frac{2}{3} \left(t + \frac{\nu}{\sigma^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.4)$$

Используя уравнение для критической точки

$$1 - 2t^{1/2} + \left(t + \frac{\nu}{\sigma^2} \right)^{1/2} = 0, \quad (2.5)$$

находим квадратное уравнение относительно $t^{1/2}$. Его решение таково

$$t_{1,2}^{1/2} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{3\nu}{\sigma^2}}. \quad (2.6)$$

Умножив обе части (2.6) на $|\sigma|$, получаем

$$(\sqrt{\sigma^2 t})_{1,2} = \frac{2}{3}|\sigma| \pm \frac{1}{3}\sqrt{\sigma^2 + 3\nu}. \quad (2.7)$$

Обратим внимание на сходство уравнения (2.5) с уравнением для s_* , которое позволяет сформулировать следующее утверждение. Критическая или перевальная точка для интеграла (2.3) соответствует той точке на $\partial\Sigma$, исходящей из которой луч отраженной волны попадает в точку наблюдения с координатами σ и ν в области Фока. Поэтому в (2.6) выбираем тот корень, который соответствует условию $s_* = s$ при $\nu = 0$. Здесь s_* и s отрицательны, поскольку они лежат на освещенной части $\partial\Sigma$ в зоне Фока:

$$(\sqrt{\sigma^2 t_*}) = \frac{2}{3}|\sigma| + \frac{1}{3}\sqrt{\sigma^2 + 3\nu}. \quad (2.8)$$

Вычислим фазу ψ в критической точке (2.8), для чего представим её в виде

$$\psi = |\sigma|\sigma^2 t - \frac{4}{3}\left(\sqrt{\sigma^2 t}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\sigma^2 t + \nu}\right)^3, \quad (2.9)$$

и воспользуемся следующим равенством, вытекающим из уравнения (2.5)

$$\sqrt{\sigma^2 t + \nu} = 2\sqrt{\sigma^2 t} - |\sigma|.$$

В результате получаем

$$\psi_* = \frac{5}{27}|\sigma|^3 + \frac{1}{3}|\sigma|\nu + \frac{4}{27}(\sigma^2 + 3\nu)^{3/2}.$$

Учитывая, наконец, что $|\sigma| = -\sigma$, получаем фазу отраженной волны

$$\psi_* = -\frac{5}{27}\sigma^3 - \frac{1}{3}\sigma\nu + \frac{4}{27}(\sigma^2 + 3\nu)^{3/2}. \quad (2.10)$$

²⁰ Вычисление асимптотики отраженной волны U_0^{ref} при $|\sigma| \rightarrow \infty$, $\sigma < 0$.

Для U_0^{ref} выбираем первую из формул (2.3). Пусть t_* есть критическая, стационарная точка, ψ_* – значение фазы в ней. Тогда в окрестности t_* , используя технику метода перевальной точки, получаем выражение для отраженной волны в виде

$$U_0^{\text{ref}} = -\sigma^2 e^{-i\pi/4} \frac{e^{iks_i}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\exp\{i\psi_*\}}{(\sigma^2 t_* + \nu)^{1/4}} \times$$

$$\times \left[\frac{\pi}{2 \left(- \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{t_*} \right)} \right]^{1/2} e^{-i\pi/4}. \quad (2.11)$$

Для второй производной от фазы имеем, см. (2.9)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{t_*} = - \frac{\sigma^4 \sqrt{\sigma^2 + 3\nu}}{2 \sqrt{\sigma^2 t_*} \sqrt{\sigma^2 t_* + \nu}}. \quad (2.12)$$

Подставляя выражение (2.12) в (2.11), приходим к следующему результату для отраженной волны

$$U_0^{\text{ref}} \cong - \sqrt[4]{\frac{\sigma^2 t_*}{\sigma^2 + 3\nu}} \exp \left\{ i \left(ks - \frac{5}{27} \sigma^3 - \frac{1}{3} \nu \sigma + \frac{4}{27} (\sigma^2 + 3\nu)^{3/2} \right) \right\}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим более подробно выражение $\sqrt{\sigma^2 t_*}$ в (2.13) и в амплитуде отраженной волны (1.21). Напомним, что в лучевой формуле (2.13) для отраженной волны s_* есть координата точки отражения того луча, который попадает в точку наблюдения s, n в освещенной части области Фока. При этом s_* и s являются отрицательными, т.е. $s_* = -|s_*|$ и $s = -|s|$. Поэтому формулу (1.15) можно представить в виде $|s_*| = \frac{2}{3}|s| + \frac{1}{3}\sqrt{s^2 + \frac{6n}{K(0)}}$, и, перейдя в ней к растянутым координатам σ, ν , см. равенства (1.22), мы в точности получим формулу (2.8) для $\sqrt{\sigma^2 t_*}$.

В заключение отметим следующий факт. Если в формулах (1.15) и (2.8) фиксировать координаты точки наблюдения s, n или σ, ν , то левые части этих формул дают координату точки отражения на $\partial\Sigma$ того луча, который попадает в эту точку наблюдения. При этом, очевидно, s_* и соответствующее t_* являются постоянными на данном луче и поэтому входят в амплитуду, как постоянные интегрирования уравнения переноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, *Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн*. — Изд-во "Советское радио", М., 1970, 520.
2. В. А. Фок, *Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела*. — "Известия АН СССР" сер. физическая **10**, No. 2 (1946), 171.
3. В. С. Буслаев, *Коротковолновая асимптотика в задаче дифракции на гладких выпуклых контурах*. — Труды МИАН **XXIII**, No. 2, (1964), 14–117.

4. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. — Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1974, 124.
5. N. Ya. Kirpichnikova, M. M. Popov, *Leontovich–Fock parabolic equation method in the problems of short-wave diffraction by prolate bodies*. — Zap. Nauchn. Semin. POMI **409**, No. 42 (2012), 55–79.
6. М. М. Попов, Н. Я. Кирпичникова, *О проблемах применения параболического уравнения к дифракции на вытянутых телах*. — Акустический журнал **60**, No. 4 (2014), 365–372.
7. В. П. Смышляев *Метод квазиоднородных функций и задача Фока*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР **148**, No. 15 (1985), 144–151.
8. В. С. Булдырев, М. А. Лялинов, *О сшиваемости лучевого разложения с формулой В. А. Фока для полутеневого области в задаче дифракции на поглощающем выпуклом теле*. — Проблемы теоретической физики, III. Изд-во ЛГУ, 1988, 160–171.
9. N. Ya. Kirpichnikova, M. M. Popov, *Diffraction by strongly elongated bodies and matching of the asymptotics in illuminated part of the light-shadow boundary*. — Proc. Intern.Conf. “Days on Diffraction 2014,” St. Petersburg.

Kirpichnikova N. Ya., Popov M. M. Matching of local asymptotics in the illuminated part of Fock domain.

Exploration of shortwave diffraction by elongated bodies of revolution requires detail consideration of matching of the local asymptotics in the illuminated part of Fock domain. In the paper we solve that task by means of the direct construction of the reflected wave with the help of the ray method. The main problem on that way, which was estimated by V.A. Fock as rather complicated, is the calculation of the eikonal and geometrical spreading in curvilinear coordinates used in the boundary layer method in the vicinity of light-shadow zone.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия

E-mail: nkirp@pdmi.ras.ru,
mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 1 октября 2014 г.