Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

А. Я. Казаков

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ КОНФЛЮЭНТНОГО УРАВНЕНИЯ ГОЙНА С ДОБАВЛЕННОЙ ЛОЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

§1. Уравнения класса Гойна

Специальные функции математической физики – функции Бесселя, функции Эйри, функции параболического цилиндра и т.д. – являются решениями обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Наиболее часто в приложениях используют специальные функции гипергеометрического типа, которые являются решениями гипергеометрического уравнения и различных его редуцированных и конфлюэнтных форм. Гипергеометрическое уравнение

$$w''(z) + \left[\frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_1}{z-1}\right] w'(z) + \frac{\delta}{z(z-1)} w(z) = 0 \tag{1}$$

имеет на комплексной плоскости переменной z 3 регулярные особые точки $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$. Известные справочники [1, 2] содержат обширную аналитическую информацию о решениях уравнения (1) и его редуцированных и конфлюэнтных форм. Ключевую роль в приложениях имеет описание монодромии этих уравнений – явные выражения для матриц связи, группе монодромии и т.д., соответствующая аналитическая теория изложена в [3, 4, 5, 6]. Справочники [1, 2] содержат полное описание монодромии уравнений гипергеометрического класса, для самого гипергеометрического уравнения это известные соотношения Куммера. Получение этой аналитической информации основано на существовании интегральных представлений для решений уравнений гипергеометрического класса.

Более сложным является класс уравнений Гойна. Само уравнение Гойна

$$w''(z) + \left[\frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_1}{z-1} + \frac{1-\theta_2}{z-\tau}\right] w'(z) + \frac{\zeta z + \nu}{z(z-1)(z-\tau)} w(z) = 0 \tag{2}$$

Ключевые слова: конфлюэнтное уранение Гойна, ложная особая точка, интегральное преобразование, монодромия.

имеет 4 особые регулярные точки на комплексной плоскости, $z = 0$, $z = 1$, $z = \tau$, $z = \infty$, его конфлюэнтные и редуцированные формы могут иметь регулярные и иррегулярные особые точки разных типов. К примеру, конфлюэнтное уравнение Гойна

$$w''(z) + \left[a + \frac{\beta}{z} + \frac{\gamma}{z-1}\right] w'(z) + \frac{\delta z + \chi}{z(z-1)} w(z) = 0 \tag{3}$$

может быть получено из уравнения Гойна (2) в результате предельного перехода $\tau \to \infty$ при подходящем предельном поведении коэффициентов (2), это уравнение имеет регулярные особые точки при $z = 0, 1$ и иррегулярную особую точку при $z = \infty$. Подробное описание этих уравнений и их различных приложений может быть найдено в [7]. Естественным способом дальнейшего обобщения этих уравнений является добавление ложных особых точек. Полученные в результате этой процедуры уравнения активно обсуждаются в литературе, к примеру, изомонодромные деформации уравнения Гойна с одной добавленной ложной особой точкой тесно связаны с теорией уравнений Пенлеве [5].

Данная работа посвящена конфлюэнтному уравнению Гойна с одной добавленной ложной особой точкой первого порядка. Это уравнение мы будем для краткости обозначать ниже cHeun1, его можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &w''(z) + \left[a + \frac{\beta}{z} + \frac{\gamma}{z-1} - \frac{1}{z-\lambda}\right] w'(z) \\ &+ \frac{1}{z(z-1)} \left[a\sigma z + L + \frac{\chi}{z-\lambda}\right] w(z) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь параметр L принимает специальное значение

$$L = -\frac{a\lambda^3\sigma + a\chi\lambda^2 - a\lambda^2\sigma - a\chi\lambda + \beta\chi\lambda + \chi\gamma\lambda - \beta\chi + \chi^2 - 2\chi\lambda + \chi}{\lambda(\lambda-1)}, \tag{5}$$

что гарантирует, что в точке $z = \lambda$ уравнение имеет ложную особую точку. Вычет коэффициента при $w'(z)$ в точке $z = \lambda$ равен отрицательному целому (здесь он равен -1), эта величина определяет порядок ложной особой точки (в данном случае он равен 1). Напомним, что ложная особая точка выделена следующим условием: уравнение в этой точке имеет особенность, однако все его решения в этой точке голоморфны. Сравнивая уравнения (3) и (4), приходим к выводу, что если $z = \lambda$ совпадает с одной из регулярных особых точек уравнения (с точкой $z = 0$ или точкой $z = 1$), уравнение (4) может быть сведено к уравнению (3) подстановкой $w(z) = (z - \lambda)^{\zeta} \cdot u(z)$ при подходящем значении величины ζ. Таким образом, изучая решения и монодромию уравнения (4) мы одновременно получаем информацию о соответствующих объектах уравнения (3).

Решения уравнений класса Гойна не имеют интегральных представлений, этот факт значительно осложняет их аналитическое исследование. Разумеется, если в уравнении присутствует большой или малый параметры, можно использовать подходящую асимптотическую технику и пытаться описать решения и их монодромию, однако в общем случае такие подходы не работают. Далее, для ряда специальных случаев можно получить аналитическое описание монодромии уравнения. Так, например, в [8], [9] было получено описание монодромии в случае, когда одна из регулярных особых точек уравнения (2) или уравнения (3) является ложной особой точкой. Заметим, что в этом случае уравнение следует, по-видимому, отнести к гипергеометрическому классу, в частности, в такой ситуации можно получить интегральные представления для решений [10, 11]. Однако для аналитического исследования уравнений класса Гойна в случае общего положения требуются иные аналитические средства.

Одним из таких средств являются интегральные симметрии для уравнений класса Гойна. Как было показано в [12], такие симметрии приводят к соответствующим симметриям матриц монодромии. Интегральные симметрии для уравнений Гойна обсуждались в [13], в недавней работе [14] рассматривались ядра интегральных преобразований для уравнения Гойна (2). В работе [15] была получена эйлерова интегральная симметрия для уравнения Гойна с одной добавленной ложной особой точкой, связь этой симметрии с теорией промежуточной свертки (middle convolution theory, [17]), обсуждалась в [16]. В работе [18] была выписана эйлерова интегральная симметрия для конфлюэнтного уравнения Гойна с одной добавленной ложной особой точкой (4). Напомним, что ядром эйлеровой интегральной симметрии является функция $(z - t)^{\sigma}$ с подходящим значением параметра σ. В данной работе мы выведем еще одну интегральную симметрию для решений уравнения (4) с ядром вида $\Phi(z - t)$, где $\Phi(x)$ - подходящее решение конфлюэнтного гипергеометрического уравнения.

§2. Интегральная симметрия

2.1. Вспомогательная система линейных дифференциальных уравнений. Исходным объектом для нас является следующая линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$(z^2A + zB + C)\frac{dW(z)}{dz} + (\sigma zA + E)W(z) = 0, \tag{6}$$

где A, B, C, E - 2×2-матрицы, $W(z) = (w_1(z), w_2(z))^T$ - 2-вектор-функция. Хорошо известно, что эта система может быть редуцирована к скалярному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Различный выбор матричных параметров A, B, C, E приводит к уравнениям Гойна, конфлюэнтному уравнению Гойна или к этим уравнениям с одной или двумя добавленными ложными особыми точками, см. соответствующее обсуждение в [15, 18]. Мы рассмотрим следующий вариант, соответствующий уравнению cHeun1 (4):

$$(z^2+2c+1)w_1'(z)+(z-2c-1)w_2'(z)+(\sigma z-e_1)w_1(z)-e_2w_2(z) = 0, \tag{7}$$

$$(z+c)w_1'(z) - cw_2'(z) - e_3w_1(z) - e_4w_2(z) = 0. \tag{8}$$

Сводя эту систему к скалярному уравнению для функции $w_1(z)$, мы получим уравнение (4). Громоздкие выражения, связывающие матричные параметры и параметры уравнения (4), приведены в Приложении.

Мы будем выводить интегральную связь для решений уравнения cHeun1 (точнее, для решений системы (7), (8)), полагая

$$w_1(z) = \int\limits_C \Phi_1(z-t)V_1(t)dt, \tag{9}$$

$$w_2(z) = \int\limits_C \left[f_{11}\Phi_1(z-t)V_1(t) + f_{12}\Phi_1(z-t)V_2(t) + f_{21}\Phi_2(z-t)V_1(t)\right]dt, \tag{10}$$

где константы f_{ik} будут определены ниже. Контур интегрирования C будет определен, как это обычно и происходит, после вывода уравнений для функций $\Phi_k(x)$, $V_m(t)$ и фиксации их решений с подходящим поведением в окрестности особых точек.

Мы будем полагать в дальнейшем, что функции $\Phi_k(z-t)$ являются решениями следующей системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений,

$$M_1 = (z-t-1)\Phi_1'(z-t) - \Phi_2'(z-t) - \frac{\xi+\nu-\tau-2}{\xi-1}\Phi_1(z-t) - \Phi_2(z-t) = 0, \tag{11}$$

$$M_2 = \Phi_1'(z-t) + \Phi_2'(z-t) + \frac{\nu\xi+\xi^2-\tau-2\xi}{\xi-1}\Phi_1(z-t) + \xi\Phi_2(z-t) = 0. \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что функция $\Phi_1(x)$ при этом является решением конфлюэнтного гипергеометрического уравнения,

$$x\Phi_1''(x) + (\xi x+\nu)\Phi_1'(x) + \tau\Phi_1(x) = 0. \tag{13}$$

Необходимая аналитическая информация о решениях этого уравнения содержится в справочниках [1, 2]. В частности, это уравнение имеет решение, ветвящееся в окрестности регулярной особой точки $x = 0$, соответствующий показатель ветвления равен $1-\nu$. Это решение имеет интегральное представление, его асимптотическое поведение в окрестности иррегулярной особой точки $x = \infty$ может быть описано в явных аналитических терминах.

2.2. Схема вывода интегральной связи. Стандартный вывод интегральных связей для уравнений класса Гойна можно описать следующим образом: сначала следует подобрать ядро интегрального преобразования, затем – подставить решение в выбранной форме в исходное уравнение, применить интегрирование по частям и получить уравнение для подинтегральной функции (см. детали в [13, 14]). Однако в нашем случае нам следует модифицировать эти соображения: присутствие относительно высоких степеней переменной z в подинтегральном выражении препятствует реализации интегрирования по частям. Для того, чтобы обойти это препятствие, мы будем выводить интегральное преобразование для решений системы (6) (вместо решений уравнения (4)!), используя (9), (10), (12). Этот подход даст нам возможность понизить степень переменной z в подинтегральном выражении, при этом увеличится число уравнений для функций $V_m(t)$, $m = 1, 2$. Затем мы выберем подходящие значения параметров f_{km}, ξ, ν, τ таким образом, чтобы уменьшить число уравнений для функций $V_m(t)$, $m = 1, 2$.

Подставляя (9), (10) в систему уравнений (7), (8) и используя интегрирование по частям, нам следует вывести уравнения для функций $V_m(t)$, которые гарантируют выполнение соотношений (7), (8). Решения $\Phi_k(x)$, $V_m(t)$ и контур интегрирования C следует выбрать так, чтобы внеинтегральные члены исчезли. Обычно это исчезновение является простым следствием выбора решений в подинтегральном выражении и контура интегрирования.

Мы опишем здесь только схему вывода уравнений для функций $V_m(t)$, опуская его детали. Соответствующий вывод включает весьма громоздкие вычисления, которые были реализованы с помощью пакета Maple.

Подставляя (9), (10) в уравнение (7), получаем:

$$\int_C P_1(z,t)dt = 0, \tag{14}$$

где подинтегральное выражение $P_1(z,t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} P_1(z,t) = {} & \big[(z+t-1)(z-t)+t^2-t+z+2c+1\big]\Phi_1'(z-t)V_1(t) \\ & + (z-2c-1)\big[f_{11}\Phi_1'(z-t)V_1(t)+f_{12}\Phi_1'(z-t)V_2(t) \\ & + f_{21}\Phi_2'(z-t)V_1(t)\big] + (\sigma-e_1)\Phi_1(z-t)V_1(t) \\ & - e_2\big[f_{11}\Phi_1(z-t)V_1(t)+f_{12}\Phi_1(z-t)V_2(t) \\ & + f_{21}\Phi_2(z-t)V_1(t)\big]. \end{aligned}$$

Мы можем добавить к этому выражению M_1 и M_2 с любыми коэффициентами. Мы добавим

$$M_1\cdot[(-z-t+\beta_1)V_1(t)+\beta_2V_2(t)]+M_2\cdot[(zb_1+tg_1+h_1)V_1(t)+h_2V_2(t)]\,, \tag{15}$$

где константы β_k, h_k, $k=1,2$, b_1, g_1 будут определены ниже. В результате получаем:

$$\begin{aligned} P_1(z,t) = {} & \big[(z+t-1)(z-t)+t^2-t+z+2c+1\big]\Phi_1'(z-t)V_1(t) \\ & + (z-2c-1)\big[f_{11}\Phi_1'(z-t)V_1(t)+f_{12}\Phi_1'(z-t)V_2(t) \\ & + f_{21}\Phi_2'(z-t)V_1(t)\big] + +(\sigma-e_1)\Phi_1(z-t)V_1(t) \\ & - e_2\big[f_{11}\Phi_1(z-t)V_1(t)+f_{12}\Phi_1(z-t)V_2(t) \\ & + f_{21}\Phi_2(z-t)V_1(t)\big] + +M_1\cdot\big[(-z-t+\beta_1)V_1(t)+\beta_2V_2(t)\big] \\ & + M_2\cdot\big[(zb_1+tg_1+h_1)V_1(t)+h_2V_2(t)\big]. \end{aligned}$$

Препятствием для интегрирования по частям в подинтегральном выражении $P_1(z,t)$ являются слагаемые, пропорциональные $z\Phi_k'(z-t)V_m(t)$ и $z\Phi_k(z-t)V_m(t)$ (слагаемое, пропорциональное $z^2\Phi_1'(z-t)V_1(t)$, исчезает в силу наших соотношений). Приравнивая коэффициенты при этих выражениях в $P_1(z,t)$ нулю, мы получаем значения ряда параметров:

$$\beta_1 = -1 - b_1 - f_{11}, \quad \beta_2 = -f_{12}, \quad \xi = \tau\sigma^{-1}, \tag{16}$$

$$f_{21} = (\sigma - \tau)\tau^{-1}, \quad b_1 = -\sigma\tau^{-1}. \tag{17}$$

Затем мы можем реализовать интегрирование по частям в $P_1(z,t)$, используя соотношение $\Phi_k'(z-t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_k'(z-t)$. Финальное выражение для $P_1(z,t)$ включает слагаемые, пропорциональные $\Phi_k(z-t)$, $k = 1, 2$. Приравнивая коэффициенты при этих функциях нулю (и тем самым приравнивая нулю $P_1(z,t)$), мы выводим пару уравнений для функций $V_m(t)$, $m = 1, 2$,

$$Q_{11} \cdot V_1'(t) + Q_{10} \cdot V_1(t) + Q_{21} \cdot V_2'(t) + Q_{20} \cdot V_2(t) = 0, \tag{18}$$

$$T_{11} \cdot V_1'(t) + T_{10} \cdot V_1(t) + T_{21} \cdot V_2'(t) + T_{20} \cdot V_2(t) = 0, \tag{19}$$

здесь мы опускаем явные и весьма громоздкие выражения для полиномиальных по t коэффициентов

$$\begin{aligned} &Q_{ik}(t), T_{ik}(t), \deg Q_{11}(t) = 2, \\ &\deg Q_{10}(t) = \deg Q_{21}(t) = \deg Q_{20}(t) = \deg T_{11}(t) = \deg T_{10}(t) = 1, \\ &\deg T_{21}(t) = \deg T_{20}(t) = 0. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим аналогичным образом уравнение (8). Подставляя соотношения (9), (10), мы получаем:

$$\int_C P_2(z,t)dt = 0, \tag{20}$$

где подинтегральное выражение $P_2(z,t)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_2(z,t) = {} & (z+c)\Phi_1'(z-t)V_1(t) - c\big[f_{11}\Phi_1'(z-t)V_1(t) \\ & + f_{12}\Phi_1'(z-t)V_2(t) + f_{21}\Phi_2'(z-t)V_1(t)\big] - -e_3\Phi_1(z-t)V_1(t) \\ & - e_4\big[f_{11}\Phi_1(z-t)V_1(t) + f_{12}\Phi_1(z-t)V_2(t) + f_{21}\Phi_2(z-t)V_1(t)\big]. \end{aligned}$$

Мы преобразуем это выражение для $P_2(z,t)$, добавляя

$$(\delta_1 M_2 - M_1) \cdot V_1(t), \tag{21}$$

значение константы δ_1 будет определено ниже. Полученное выражение не содержит слагаемых вида $z\Phi_k'(z-t)V_m(t)$, $z\Phi_k(z-t)V_m(t)$ в силу специальной стуктуры M_1 и M_2. Интегрируя по частям выражение для $P_2(z,t)$ и приравнивая нулю коэффициент при $\Phi_2(z-t)$, получим два уравнения (для $V_1'(t)$ и $V_1(t)$ соответственно),

$$\delta_1 = \frac{(c+1)\,(c-e_4)}{e_4}\,, \quad \tau = \frac{\sigma\, e_4}{c+1}\,.$$

Финальное выражение $P_2(z,t)$ будет пропорционально $\Phi_1(z-t)$. Приравнивая нулю коэффициент при $\Phi_1(z-t)$ (и тем самым приравнивая нулю $P_2(z,t)$),мы получаем еще одно уравнение для функций $V_m(t)$, $m=1,2$,

$$S_{11}\cdot V_1'(t) + S_{10}\cdot V_1(t) + S_{21}\cdot V_2'(t) + S_{20}\cdot V_2(t) = 0, \tag{22}$$

здесь мы опускаем для краткости явные выражение для полиномиальных по t коэффициентов $S_{ik}(t)$.

Итак, для пары функций $V_m(t)$, $m=1,2$ мы вывели 3 уравнения (18), (19), (22). Выпишем условия, при которых уравнения (19), (22) отличаются только скалярным множителем,

$$g_1 = -\frac{c+1}{e_4}, \quad h_2 = \frac{f_{12}(c+1)(c-e_4)}{e_4}, \quad \nu = \frac{c\sigma + c - e_2 - e_3 + e_4 + 1}{c+1},$$
$$f_{11} = \frac{c^3 - 3\,c^2 e_4 + 2\,c{e_4}^2 + {e_4}^2 h_1 + 2\,c^2 - 5\,ce_4 + 2\,{e_4}^2 + c - 2\,e_4}{(c+1)\,(c-e_4)\,e_4}.$$

Итоговая система уравнений для функций $V_m(t)$, $m=1,2$ имеет вид,

$$\widetilde{Q}_{11}\cdot V_1'(t) + \widetilde{Q}_{21}\cdot V_2'(t) + \widetilde{Q}_{10}\cdot V_1(t) + \widetilde{Q}_{20}\cdot V_2(t) = 0, \tag{23}$$

$$\widetilde{T}_{11}\cdot V_1'(t) + \widetilde{T}_{21}\cdot V_2'(t) + \widetilde{T}_{10}\cdot V_1(t) + \widetilde{T}_{20}\cdot V_2(t) = 0, \tag{24}$$

где $\deg\widetilde{Q}_{11}(t) = 2$, $\deg\widetilde{Q}_{10}(t) = \deg\widetilde{Q}_{21}(t) = \deg\widetilde{T}_{11}(t) = 1$, $\deg\widetilde{Q}_{20}(t) = \deg\widetilde{T}_{10}(t) = \deg\widetilde{T}_{21}(t) = \deg\widetilde{T}_{20}(t) = 0$. Исключая функцию $V_2(t)$, мы получаем уравнение cHeun1 для функции $V_1(t)$:

$$V_1''(t) + \left[a + \frac{3-\gamma}{t} + \frac{3-\beta}{t-1} - \frac{1}{t-\widetilde{\lambda}}\right] V_1'(t)$$
$$+ \frac{1}{t(t-1)}\left[a(2-\sigma)t + \widetilde{L} + \frac{\widetilde{\chi}}{t-\widetilde{\lambda}}\right] V_1(t) = 0. \tag{25}$$

Явные выражения для параметров $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\chi}$ мы поместили, в силу их громоздкости, в Приложение. Параметр $\widetilde{L}$ связан с параметрами уравнения (25) соотношением, аналогичным (5).

Суммируя результаты вышеприведенных выкладок и учитывая соотношение (9) и обычные соображения о выборе решений и контура интегрирования, мы получаем следующее утверждение, которое является основным результатом данной работы.

Теорема. *Пусть функция $V(t)$ будет решением уравнения* (25)*, ветвящимся в окрестности регулярной особой точки* (*либо* $t = 0$*, либо* $t = 1$)*, функция $\Phi(x)$ будет решением конфлюэнтного гипергеометрического уравнения*

$$x\Phi''(x) + (ax + \beta + \gamma - 1)\Phi'(x) + a\sigma\Phi(x) = 0, \tag{26}$$

которое ветвится в окрестности регулярной особой точки $x = 0$, контур интегрирования C на комплексной плоскости t - двойная восьмерка (контур Похгаммера), охватывающая точки $t = z$ и соответствующую точку $t = 0$ or $t = 1$ (в соответствии с выбором решения $V(t)$). Тогда функция

$$w(z) = \int_C \Phi(z - t)V(t)dt \tag{27}$$

является решением уравнения (4)*, которое ветвится в точке $z = 0$ или $z = 1$ соответственно.*

Замечание. Наш выбор коэффициентов в соотношениях (9), (10), (15) и (21) может выглядеть несколько искусственным. На самом деле исходные выражения были более симметричными, но такой более симметричный вид приводил к более громоздким соотношениям. Выражения, представленные здесь, были получены с помощью Maple.

§3. Обсуждение результатов

Обсудим вкратце известный набор симметрий уравнения cHeun1 (4).

1. Это уравнение обладает элементарными симметриями, которые возникают при простых преобразованиях уравнения (4). К таким симметриям следует отнести перестановку регулярных особых точек, связанную с заменой независимой переменной $z = 1 - s$. Очевидно, что

такая замена изменит коэффициенты уравнения, однако его структура сохранится. Далее, имеются s-гомотопные преобразования, возникающие при подстановках $w(z) = z^{1-\beta}u(z)$, $w(z) = (1-z)^{1-\gamma}v(z)$. Эти подстановки преобразуют решение, голоморфное в особой точке в решение, ветвящееся в этой точке и наоборот. Имеется еще симметрия, связанная с подстановкой $w(z) = exp(-az)v(z)$, которая изменяет асимптотическое поведение решений в окрестности иррегулярной особой точки $z = \infty$.

2. Это уравнение имеет интегральные симметрии. Одна из них, эйлерова интегральная симметрия, была описана в [18]. В данной работе мы получили еще одно интегральное преобразование, ядро которого выражается с помощью подходящего решения конфлюэнтного гипергеометрического уравнения.

3. Уравнение (4) обладает также калибровочными симметриями. Этот тип симметрий обсуждался ранее в [20].

Подчеркнем, что все эти симметрии связывают решения соответствующих уравнений. Таким образом, эти симметрии могут быть выражены в терминах матриц монодромии уравнения (4), см. детали в [12, 19].

Суммируя, мы заключаем, что уравнение cHeun1 (4) имеет богатый набор симметрий, которые влекут соответствующие соотношения для матриц монодромии. Результаты, описанные здесь, могут быть полезны при изучении орбиты уравнения под действием этого набора симметрий. Заметим, что даже косвенная информация о монодромии уравнения Гойна может быть полезна при изучении определенных прикладных задач, см., например, [21].

Приведем в заключение еще одну интерпретацию соотношения (27). Если мы фиксируем нормировку решений $\Phi(x)$ и $V(t)$ в окрестностях соответствующих особых точек, мы можем вычислить нормировку решений $w(z)$ в левой части соотношения (27) (т.е. описать поведение этих решений в окрестности соотвветствующей сингклярности). Таким образом, соотношения (27) можно понимать как вычисление соответствующих определенных интегралов, тем самым они расширяют известный список определенных интегралов [22].

Автор благодарен С. Ю. Славянову за интерес к работе и позитивную критику.

§4. Приложение

Здесь мы приведем громоздкие соотношения, вынесенные из основного текста.

Следующие соотношения связывают матричные параметры системы уравнений (7) и (8) и параметры уравнения (4):

$$c = \frac{a\lambda\,(\lambda-1)}{R_0}, \tag{28}$$

$$R_0 = (\beta\,\lambda + \gamma\,\lambda - \beta + \chi - 2\,\lambda + 1)\,,$$

$$e_1 = \frac{R_1}{a\lambda^2\,(\lambda-1)\,R_0}, \tag{29}$$

$$\begin{gathered}
R_1 = -2\,a^3\lambda^5 + a^2\beta\,\lambda^5 + a^2\gamma\,\lambda^5 + 2\,a^2\lambda^5\sigma + 4\,a^3\lambda^4 - 7\,a^2\beta\,\lambda^4 \\
+3\,a^2\chi\,\lambda^4 - 4\,a^2\gamma\,\lambda^4 - 2\,a^2\lambda^5 - 4\,a^2\lambda^4\sigma + 2\,a\beta^2\lambda^4 + 3\,a\beta\,\gamma\,\lambda^4 \\
+a\beta\,\lambda^4\sigma + a\gamma^2\lambda^4 + a\gamma\,\lambda^4\sigma - 2\,a^3\lambda^3 + 11\,a^2\beta\,\lambda^3 - 8\,a^2\chi\,\lambda^3 + 3\,a^2\gamma\,\lambda^3 \\
+11\,a^2\lambda^4 + 2\,a^2\lambda^3\sigma - 8\,a\beta^2\lambda^3 + 6\,a\beta\,\chi\,\lambda^3 - 8\,a\beta\,\gamma\,\lambda^3 - 7\,a\beta\,\lambda^4 \\
-2\,a\beta\,\lambda^3\sigma + 5\,a\chi\,\gamma\,\lambda^3 + a\chi\,\lambda^3\sigma - a\gamma^2\lambda^3 - 5\,a\gamma\,\lambda^4 - a\gamma\,\lambda^3\sigma \\
-2\,a\lambda^4\sigma + \beta^3\lambda^3 + 2\,\beta^2\gamma\,\lambda^3 + \beta\,\gamma^2\lambda^3 \\
-5\,a^2\beta\,\lambda^2 + 5\,a^2\chi\,\lambda^2 - 14\,a^2\lambda^3 + 10\,a\beta^2\lambda^2 - 14\,a\beta\,\chi\,\lambda^2 \\
+5\,a\beta\,\gamma\,\lambda^2 + 24\,a\beta\,\lambda^3 + a\beta\,\lambda^2\sigma + 4\,a\chi^2\lambda^2 - 5\,a\chi\,\gamma\,\lambda^2 - 11\,a\chi\,\lambda^3 \\
-a\chi\,\lambda^2\sigma + 10\,a\gamma\,\lambda^3 + 6\,a\lambda^4 + 3\,a\lambda^3\sigma - 3\,\beta^3\lambda^2 + 3\,\beta^2\chi\,\lambda^2 \\
-4\,\beta^2\gamma\,\lambda^2 - 5\,\beta^2\lambda^3 + 4\,\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda^2 - \beta\,\gamma^2\lambda^2 - 6\,\beta\,\gamma\,\lambda^3 + \chi\,\gamma^2\lambda^2 \\
-\gamma^2\lambda^3 + 5\,a^2\lambda^2 - 4\,a\beta^2\lambda + 8\,a\beta\,\chi\,\lambda - 25\,a\beta\,\lambda^2 - 4\,a\chi^2\lambda \\
+19\,a\chi\,\lambda^2 - 5\,a\gamma\,\lambda^2 - 17\,a\lambda^3 - a\lambda^2\sigma + 3\,\beta^3\lambda - 6\,\beta^2\chi\,\lambda + 2\,\beta^2\gamma\,\lambda \\
+13\,\beta^2\lambda^2 + 3\,\beta\,\chi^2\lambda - 4\,\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda - 10\,\beta\,\chi\,\lambda^2 + 10\,\beta\,\gamma\,\lambda^2 + 8\,\beta\,\lambda^3 \\
+2\,\chi^2\gamma\,\lambda - 6\,\chi\,\gamma\,\lambda^2 + \gamma^2\lambda^2 + 4\,\gamma\,\lambda^3 + 8\,a\beta\,\lambda - 8\,a\chi\,\lambda + 15\,\lambda^2 a - \beta^3 \\
+3\,\beta^2\chi - 11\,\beta^2\lambda - 3\,\beta\,\chi^2 + 16\,\beta\,\chi\,\lambda - 4\,\beta\,\gamma\,\lambda - 18\,\beta\,\lambda^2 \\
+\chi^3 - 5\,\chi^2\lambda + 4\,\chi\,\gamma\,\lambda + 8\,\chi\,\lambda^2 \\
-6\,\gamma\,\lambda^2 - 4\,\lambda^3 - 4\,a\lambda + 3\,\beta^2 - 6\,\beta\,\chi + 13\,\beta\,\lambda \\
+3\,\chi^2 - 10\,\chi\,\lambda + 2\,\gamma\,\lambda + 8\,\lambda^2 - 3\,\beta + 3\,\chi - 5\,\lambda + 1,
\end{gathered}$$

$$e_2=-\frac{(\lambda^2 a-a\lambda+\beta\lambda+\gamma\lambda-!1\beta+\chi-2\lambda+1)(-2a\lambda+\beta\lambda+\gamma\lambda-\beta+\chi-2\lambda+1)}{\lambda R_0}, \tag{30}$$

$$e_3 = -\frac{R_3}{\lambda R_0}, \tag{31}$$

$$R_3 = a^2\lambda^3 - a\lambda^3\sigma - a^2\lambda^2 + 2\,a\beta\,\lambda^2 - a\chi\,\lambda^2 + a\gamma\,\lambda^2 + a\lambda^2\sigma - 2\,a\beta\,\lambda$$
$$+2\,a\chi\,\lambda - 3\,\lambda^2 a + \beta^2\lambda - \beta\,\chi\,\lambda + \beta\gamma\,\lambda - \chi\,\gamma\,\lambda$$
$$+2\,a\lambda - \beta^2 + 2\,\beta\,\chi - 3\,\beta\,\lambda - \chi^2 + 2\,\chi\,\lambda - \gamma\,\lambda + 2\,\beta - 2\,\chi + 2\,\lambda - 1,$$

$$e_4 = \frac{a\left(\lambda^2 a - a\lambda + \beta\,\lambda + \gamma\,\lambda - \beta + \chi - 2\,\lambda + 1\right)}{R_0}. \tag{32}$$

Ниже приведены параметры уравнения (25),

$$\widetilde{\lambda} = [(\beta\,\lambda + \gamma\,\lambda - \beta + \chi - 2\,\lambda + 1)(a\lambda^2 - a\lambda + \beta\,\lambda$$
$$+\gamma\,\lambda - \beta + \chi - 2\,\lambda + 1)]^{-1}\cdot \tag{33}$$

$$[\lambda\,(a\lambda^3\sigma + a\chi\,\lambda^2 + a\gamma\,\lambda^2 - 2\,a\lambda^2\sigma - a\chi\,\lambda - a\gamma\,\lambda - a\lambda^2 + a\lambda\,\sigma$$
$$+\beta\,\chi\,\lambda + \beta\,\gamma\,\lambda + \beta\,\lambda^2 + \chi\,\gamma\,\lambda + \gamma^2\lambda + \gamma\,\lambda^2 + a\lambda - \beta\,\chi - \beta\,\gamma$$
$$-3\,\beta\,\lambda + \chi^2 + \chi\,\gamma - \chi\,\lambda - 4\,\gamma\,\lambda - 2\,\lambda^2 + 2\,\beta - \chi + \gamma + 5\,\lambda - 2)],$$

$$\widetilde{\chi} = [(\beta\,\lambda + \gamma\,\lambda - \beta + \chi - 2\,\lambda + 1)(a\lambda^2 - a\lambda$$
$$+\beta\,\lambda + \gamma\,\lambda - \beta + \chi - 2\,\lambda + 1)^2]^{-1}\cdot \tag{34}$$

$$[a^2\beta\,\lambda^6\sigma + a^2\gamma\,\lambda^6\sigma + a^2\lambda^6\sigma^2 + a^2\beta\,\chi\,\lambda^5 - 4\,a^2\beta\,\lambda^5\sigma + a^2\chi\,\gamma\,\lambda^5$$
$$+2\,a^2\chi\,\lambda^5\sigma - 2\,a^2\gamma\,\lambda^5\sigma - -4\,a^2\lambda^6\sigma - 3\,a^2\lambda^5\sigma^2 + a\beta^2\lambda^5\sigma$$
$$+2\,a\beta\,\gamma\,\lambda^5\sigma + a\gamma^2\lambda^5\sigma - 3\,a^2\beta\,\chi\,\lambda^4 + a^2\beta\,\lambda^5 + 6\,a^2\beta\,\lambda^4\sigma + +a^2\chi^2\lambda^4$$
$$-2\,a^2\chi\,\gamma\,\lambda^4 - 4\,a^2\chi\,\lambda^5 - 5\,a^2\chi\,\lambda^4\sigma - a^2\gamma\,\lambda^5 + a^2\gamma\,\lambda^4\sigma + 12\,a^2\lambda^5\sigma$$
$$+3\,a^2\lambda^4\sigma^2 + +2\,a\beta^2\chi\,\lambda^4 + a\beta^2\lambda^5 - 4\,a\beta^2\lambda^4\sigma + 4\,a\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda^4$$
$$+3\,a\beta\,\chi\,\lambda^4\sigma + 2\,a\beta\,\gamma\,\lambda^5 - 5\,a\beta\,\gamma\,\lambda^4\sigma - -4\,a\beta\,\lambda^5\sigma + 2\,a\chi\,\gamma^2\lambda^4$$
$$+3\,a\chi\,\gamma\,\lambda^4\sigma + a\gamma^2\lambda^5 - a\gamma^2\lambda^4\sigma - 4\,a\gamma\,\lambda^5\sigma + 3\,a^2\beta\,\chi\,\lambda^3 - 3\,a^2\beta\,\lambda^4 -$$
$$-4\,a^2\beta\,\lambda^3\sigma - 2\,a^2\chi^2\lambda^3 + a^2\chi\,\gamma\,\lambda^3 + 10\,a^2\chi\,\lambda^4 + 4\,a^2\chi\,\lambda^3\sigma + 2\,a^2\gamma\,\lambda^4$$
$$-13\,a^2\lambda^4\sigma - a^2\lambda^3\sigma^2 - 6\,a\beta^2\chi\,\lambda^3 - 2\,a\beta^2\lambda^4 + 6\,a\beta^2\lambda^3\sigma + 4\,a\beta\,\chi^2\lambda^3$$
$$-8\,a\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda^3 - 9\,a\beta\,\chi\,\lambda^4 - 8\,a\beta\,\chi\,\lambda^3\sigma - -5\,a\beta\,\gamma\,\lambda^4 + 4\,a\beta\,\gamma\,\lambda^3\sigma - 6\,a\beta\,\lambda^5$$

$$+13\,a\beta\,\lambda^4\sigma+4\,a\chi^2\gamma\,\lambda^3+2\,a\chi^2\lambda^3\sigma-2\,a\chi\,\gamma^2\lambda^3-9\,a\chi\,\gamma\,\lambda^4-4\,a\chi\,\gamma\,\lambda^3\sigma$$
$$-6\,a\chi\,\lambda^4\sigma-3\,a\gamma^2\lambda^4-6\,a\gamma\,\lambda^5+7\,a\gamma\,\lambda^4\sigma+4\,a\lambda^5\sigma+\beta^3\chi\,\lambda^3+$$
$$+\beta^3\lambda^4+3\,\beta^2\chi\,\gamma\,\lambda^3+3\,\beta^2\gamma\,\lambda^4+3\,\beta\,\chi\,\gamma^2\lambda^3+3\,\beta\,\gamma^2\lambda^4+\chi\,\gamma^3\lambda^3$$
$$+\gamma^3\lambda^4-a^2\beta\,\chi\,\lambda^2++3\,a^2\beta\,\lambda^3+a^2\beta\,\lambda^2\sigma+a^2\chi^2\lambda^2-8\,a^2\chi\,\lambda^3$$
$$-a^2\chi\,\lambda^2\sigma-a^2\gamma\,\lambda^3+a^2\lambda^4+6\,a^2\lambda^3\sigma++6\,a\beta^2\chi\,\lambda^2 4\,a\beta^2\lambda^2\sigma$$
$$-8\,a\beta\,\chi^2\lambda^2+4\,a\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda^2+24\,a\beta\,\chi\,\lambda^3+7\,a\beta\,\chi\,\lambda^2\sigma+4\,a\beta\,\gamma\,\lambda^3$$
$$-a\beta\,\gamma\,\lambda^2\sigma+15\,a\beta\,\lambda^4-16\,a\beta\,\lambda^3\sigma+2\,a\chi^3\lambda^2$$
$$-4\,a\chi^2\gamma\,\lambda^2-10\,a\chi^2\lambda^3-3\,a\chi^2\lambda^2\sigma++12\,a\chi\,\gamma\,\lambda^3+a\chi\,\gamma\,\lambda^2\sigma$$
$$+8\,a\chi\,\lambda^4+12\,a\chi\,\lambda^3\sigma+2\,a\gamma^2\lambda^3+15\,a\gamma\,\lambda^4-4\,a\gamma\,\lambda^3\sigma+8\,a\lambda^5$$
$$-10\,a\lambda^4\sigma-3\,\beta^3\chi\,\lambda^2-3\,\beta^3\lambda^3+3\,\beta^2\chi^2\lambda^2-6\,\beta^2\chi\,\gamma\,\lambda^2-4\,\beta^2\chi\,\lambda^3$$
$$-7\,\beta^2\gamma\,\lambda^3-7\,\beta^2\lambda^4++6\,\beta\,\chi^2\gamma\,\lambda^2-3\,\beta\,\chi\,\gamma^2\lambda^2-8\,\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda^3$$
$$-5\,\beta\,\gamma^2\lambda^3-14\,\beta\,\gamma\,\lambda^4+3\,\chi^2\gamma^2\lambda^2-4\,\chi\,\gamma^2\lambda^3--\gamma^3\lambda^3-7\,\gamma^2\lambda^4$$
$$-a^2\beta\,\lambda^2+2\,a^2\chi\,\lambda^2-2\,a^2\lambda^3-a^2\lambda^2\sigma-2\,a\beta^2\chi\,\lambda+2\,a\beta^2\lambda^2$$
$$+a\beta^2\lambda\,\sigma+4\,a\beta\,\chi^2\lambda-21\,a\beta\,\chi\,\lambda^2-2\,a\beta\,\chi\,\lambda\,\sigma-a\beta\,\gamma\,\lambda^2-10\,a\beta\,\lambda^3$$
$$+9\,a\beta\,\lambda^2\sigma-2\,a\chi^3\lambda+15\,a\chi^2\lambda^2++a\chi^2\lambda\,\sigma-3\,a\chi\,\gamma\,\lambda^2$$
$$-16\,a\chi\,\lambda^3-8\,a\chi\,\lambda^2\sigma-10\,a\gamma\,\lambda^3+a\gamma\,\lambda^2\sigma-20\,a\lambda^4$$
$$+10\,a\lambda^3\sigma+3\,\beta^3\chi\,\lambda 3\,\beta^3\lambda^2-6\,\beta^2\chi^2\lambda+3\,\beta^2\chi\,\gamma\,\lambda+11\,\beta^2\chi\,\lambda^2$$
$$+5\,\beta^2\gamma\,\lambda^2+19\,\beta^2\lambda^3+3\,\beta\,\chi^3\lambda-6\,\beta\,\chi^2\gamma\,\lambda-11\,\beta\,\chi^2\lambda^2$$
$$+12\,\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda^2+2\,\beta\,\chi\,\lambda^3+2\,\beta\,\gamma^2\lambda^2+28\,\beta\,\gamma\,\lambda^3+16\,\beta\,\lambda^4$$
$$+3\,\chi^3\gamma\,\lambda-11\,\chi^2\gamma\,\lambda^2++\chi\,\gamma^2\lambda^2+2\,\chi\,\gamma\,\lambda^3+9\,\gamma^2\lambda^3$$
$$+16\,\gamma\,\lambda^4+a^2\lambda^2-a\beta^2\lambda+6\,a\beta\,\chi\,\lambda-a\beta\,\lambda^2-2\,a\beta\,\lambda\,\sigma-5\,a\chi^2\lambda+$$
$$+12\,a\chi\,\lambda^2+2\,a\chi\,\lambda\,\sigma+a\gamma\,\lambda^2+14\,a\lambda^3-5\,a\lambda^2\sigma-\beta^3\chi-\beta^3\lambda+3\,\beta^2\chi^2$$
$$-10\,\beta^2\chi\,\lambda-\beta^2\gamma\,\lambda--17\,\beta^2\lambda^2-3\,\beta\,\chi^3+17\,\beta\,\chi^2\lambda-4\,\beta\,\chi\,\gamma\,\lambda$$
$$-6\,\beta\,\chi\,\lambda^2-16\,\beta\,\gamma\,\lambda^2-38\,\beta\,\lambda^3+\chi^4-6\,\chi^3\lambda++5\,\chi^2\gamma\,\lambda+9\,\chi^2\lambda^2$$
$$+4\,\chi\,\lambda^3-2\,\gamma^2\lambda^2-26\,\gamma\,\lambda^3-12\,\lambda^4+2\,a\beta\,\lambda-4\,a\chi\,\lambda-a\lambda^2$$
$$+a\lambda\,\sigma+3\,\beta^2\chi+5\,\beta^2\lambda-6\,\beta\,\chi^2+7\,\beta\,\chi\,\lambda+2\,\beta\,\gamma\,\lambda+29\,\beta\,\lambda^2$$
$$+3\,\chi^3-9\,\chi^2\lambda+\chi\,\gamma\,\lambda--6\,\chi\,\lambda^2+11\,\gamma\,\lambda^2+24\,\lambda^3-a\lambda-3\,\beta\,\chi-7\,\beta\,\lambda$$
$$+3\,\chi^2-\gamma\,\lambda-15\,\lambda^2+\chi+3\,\lambda].$$

Литература

1. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, v. 1. McCraw-Hill Book Company Inc., New York, 1953.
2. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions.* National Bureau of Standards, 1964.
3. W. Vasov, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations.* John Wiley, New York, 1965.
4. A. A. Bolibrukh, *Fuchsian differential equations and holomorphic bundles* MCCME, Moscow, 2000.
5. Y. Sibuya, *Linear ODE in complex domain.* Analytic continuation. AMS, Providence, Rhode Island, 1990.
6. K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yosida, *From Gauss to Painleve: A modern theory of special functions.* Braunshweig, Vieweg, 1991.
7. S. Yu. Slavyanov, W. Lay, *Special functions: A unified theory based on singularities.* Oxford university press, Oxford, New York, 2000.
8. A. Ya. Kazakov, *Euler integral symmetry and deformed hypergeometric equation.* — J. Math. Sci. **185**, No. 4 (2012), 573–580.
9. A. Ya. Kazakov, *Monodromy of Heun equations with apparent singularities.* — Intern. J. Theor. Math.Phys. **3**, No. 6 (2013), 190–196.
10. A. V. Shanin, R. V. Craster, *Removing false singular points as a method of solving ordinary differential equations.* — Euro. J. Appl. Math. **13** (2002), 617–639.
11. A. Ishkhanyan, K. A. Suominen, *New solutions of Heun's general equation.* — J. Phys. A, **36** (2003) L81–L85.
12. A. Ya. Kazakov, *Integral symmetry, integral invariants and monodromy of ordinary differential equations.* — Theor. Math. Phys. **116**, No. 3 (1998), 991–1000.
13. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Integral relations for the special functions of the Heun class.* — Theor. Math. Phys. **107**, No. 3 (1996), 388–396.
14. L. J. El-Jaick, B. D. B. Figueiredo, *Transformation of Heun equation and its integral relations.* — J. Phys. A. **44** (2011) 075204.
15. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Euler integral symmetries for a deformed Heun equation and symmetries of the Painleve PVI equation.* — Theor. Math. Phys. **155**, No. 2 (2008), 721–732.
16. K. Takemura, *Middle convolution and Heun's equation.* — SIGMA, **5** (2009), 040, 22 pp.
17. M. Detweiler, S. Reiter, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems.* — J. Algebra, **318** (2007), 1–24.
18. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Euler integral symmetries for a deformed confluent Heun equation and symmetries of the Painleve PV equation.* — Theor. Math. Phys. **179** (2014), 543–549.
19. A. Ya. Kazakov, *Symmetries of the confluent Heun equation.* J. Math. Sci. **117**, No. 2 (2003), 3918–3927.

20. A. Ya. Kazakov, *Isomonodromy deformation of the Heun class equation.* In: Painleve Equations and related topics, ed. by A.D.Bruno, A.B.Batkhin, De Gruyter Proceedings in mathematics, pp.107-116, 2012.
21. A. Castro, J. M. Lapan, A. Maloney, M. J. Rodriguez, *Black hole scattering from monodromy.* Class. Quant. Gravity, **30**, 165005, 2013.
22. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products.* Academic Press, Inc, 1994.

Kazakov A. Ya. Integral symmetry for the confluent Heun equation with added apparent singularity.

Confluent Heun equation with added apparent singular point is under consideration. New integral transform connecting solutions of this equation with different parameters is obtained. Kernel of this transform is a suitable solution of the confluent hypergeometric equation.

С.-Петербургский
госудпрственный университет
технологии и дизайна,
С.-Петербургский
госудпрственный университет
аэрокосмического приборостроения
E-mail: a_kazak@mail.ru

Поступило 30 сентября 2014 г.