Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

А. С. Благовещенский

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ, РЕШЕНИЯ БЕЙТМЕНА И ИСТОЧНИКИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Предметом изучения настоящей статьи является некоторый класс решений волнового уравнения

$$\Box_{x,t}U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_x U = 0, \tag{1}$$

где $U = U(x,t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. В работе [1] было введено понятие волнового поля, порожденного источниками, находящимися на бесконечности. Кратко сформулируем его. Для этого введем сначала преобразование инверсии: это преобразование $(x,t) \to (\xi,\tau) \quad (\xi,\tau \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1)$:

$$\xi = \frac{x - x^*}{(t-t^*)^2 - |x-x^*|^2}, \quad \tau = \frac{t - t^*}{|t-t^*|^2 - |x-x^*|^2} \tag{2}$$

(формула его обращения:

$$x = \frac{\xi}{\tau^2 - |\xi|^2} + x^*, \quad t = \frac{\tau}{\tau^2 - |\xi|^2} + t^*). \tag{3}$$

Точки конуса $\tau^2 = |\xi|^2$ естественно назвать образами бесконечно удаленных точек при инверсии. С инверсией тесно связано преобразование Кельвина [2] (некоторые предпочитают называть его преобразованием Бейтмена [3]), сопоставляющее функции $U(x,t)$ функцию

$$V(\xi,\tau) = (KU)(\xi,\tau) = \frac{1}{\tau^2 - |\xi|^2} U\Big(x^* + \frac{\xi}{\tau^2 - |\xi|^2}, t^* + \frac{\tau}{\tau^2 - |\xi|^2}\Big). \tag{4}$$

Преобразование Кельвина обладает тем замечательным свойством, что если функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), то и функция $V(\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box_{\xi\tau}V = V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V = 0 \tag{5}$$

Ключевые слова: волновое уравнение, плоская волна, преобразование Кельвина–Бейтмена, решение Бейтмена, источник на бесконечности.

Исследование выполнено при поддержке гранта СПбГУ No. 11.38.215.2014.

при $\tau^2 - |\xi|^2 \neq 0$. Это можно интерпретировать как утверждение, что функция $V(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box_{\xi\tau} V = \Phi(\xi, \tau),$$

где $\Phi(\xi, \tau)$ - некоторая обобщенная функция с носителем, сосредоточенным на конусе $\tau^2 = |\xi|^2$. Как известно, правая часть неоднородного волнового уравнения интерпретируется как функция, описывающая распределение источников волн. Поэтому равенство (или неравенство) нулю функции $\Phi(\xi, \tau)$ означает отсутствие (или наличие) источников волн на бесконечности. Если $\Phi(\xi, \tau) = 0$, то будем говорить, что функция $U(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению в широком смысле слова.

В качестве содержательного примера рассмотрим плоскую волну – решение волнового уравнения вида

$$U(x, t) = f\big(t - (x, \omega)\big), \tag{7}$$

где $\omega \in \mathbb{R}^3$, $|\omega| = 1$. Функцию f будем предполагать финитной и бесконечно дифференцируемой. Справедлива

Теорема 1. *Плоская волна является решением однородного волнового уравнения в широком смысле слова.*

Решение волнового уравнения

$$V(\xi, \tau) = \frac{1}{\tau^2 - |\xi|^2}\, f\Big(\frac{\tau - (\xi, \omega)}{\tau^2 - |\xi|^2}\Big), \tag{8}$$

получающееся в результате применения к плоской волне преобразования Кельвина, называется решением Бейтмена. Очевидно, решение Бейтмена имеет сингулярность на образующей $\xi = \omega\tau$ конуса $\tau^2 = |\xi|^2$ (на образующей, а не на всем конусе вследствие финитности функции f). Будем далее называть ее сингулярной образующей.

Теорема 2. *Решение Бейтмена удовлетворяет однородному волновому уравнению всюду в $\mathbb{R}^4$.*

Очевидно, Теорема 2 – это просто Теорема 1, сформулированная в других терминах, и не нуждается в специальном доказательстве.

Прежде чем доказывать Теорему 1, обсудим связанный с ней кажущийся парадокс. Решение (7) может быть получено на следующем пути. Рассмотрим поле точечного источника [4] (f – финитна и бесконечно дифференцируема):

$$\frac{1}{|x|} f(t-|x|). \tag{9}$$

Пусть точка нахождения источника удаляется в некотором направлении, при этом одновременно пропорционально сдвигается в прошлое начало действия источника и возрастает его интенсивность:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T}{|x+\omega T|} f(t+T-|x+\omega T|)$$
$$= \lim_{T\to\infty} f\left(t+T-T\sqrt{1+\frac{2(x,\omega)}{T}+\frac{|x|^2}{T^2}}\right) = f\big(t-(x,\omega)\big). \tag{10}$$

Таким образом, плоская волна, по-видимому, может рассматриваться как предельный случай поля точечного источника при удалении последнего на бесконечность. Парадокс разрешается благодаря тому, что на самом деле решению (9) отвечает, кроме точечного источника, расположенного в точке $x = 0$, источник на бесконечности. Действительно

$$g(\xi,\tau) = K\Big(\frac{1}{|x|} f(t-|x|)\Big)(\xi,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(\tau^2-|\xi|^2)}{|\xi|}\, f\Big(\frac{\tau}{\tau^2-|\xi|^2} - \frac{|\xi|}{|\tau^2-|\xi|^2|}\Big)$$
$$= \operatorname{sgn}(\tau^2-|\xi|^2) \begin{cases} \frac{1}{|\xi|} f(\frac{1}{\tau+|\xi|}) & \text{при } \tau^2 > |\xi|^2 \\ \frac{1}{|\xi|} f(\frac{1}{\tau-|\xi|}) & \text{при } \tau^2 < |\xi|^2 \end{cases}.$$

Тем самым функция $g(\xi,\tau)$ имеет скачок на конусе $\tau^2 = |\xi|^2$ и $\Box_{\xi\tau} g \neq 0$ на этом конусе. В пределе эти два источника, сливаясь, взаимно уничтожаются.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Если функция f финитна и ограничена, то преобразование Кельвина плоской волны, функция*

$$V(\xi,\tau) = \frac{1}{\tau^2-|\xi|^2}\, f\Big(\frac{\tau-(\xi,\omega)}{\tau^2-|\xi|^2}\Big),$$

локально суммируема.

Доказательство. Пусть $f(t) = 0$ при $|t| > A$. Вместо ξ введем цилиндрические координаты ρ,φ,ζ, направив ось ζ вдоль вектора ω.

Для доказательства достаточно доказать локальную суммируемость функции
$$\Theta(\xi,\tau) = (\tau^2 - \zeta^2 - \rho^2)^{-1}\chi_Q(\rho,\zeta,\tau),$$
где $\chi_Q(\rho,\zeta,\tau)$ – характеристическая функция множества
$$Q := \Big\{\rho,\zeta,\tau : \Big|\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\rho^2-\zeta^2}\Big| < A\Big\}.$$
Множество Q есть объединение множеств
$$\Big\{\rho,\zeta,\tau : \tau^2 \geqslant \rho^2+\zeta^2,\ (\tau-a)^2 \geqslant (\zeta-a)^2+\rho^2,\ (\tau+a)^2 \geqslant (\zeta+a)^2+\rho^2\Big\}$$
и
$$\Big\{\rho,\zeta,\tau : \tau^2 \leqslant \rho^2+\zeta^2,\ (\tau-a)^2 \leqslant (\zeta-a)^2+\rho^2,\ (\tau+a)^2 \leqslant (\zeta+a)^2+\rho^2\Big\},$$
где $a = (2A)^{-1}$. Пусть Q_c означает конус $(\tau-c)^2 = (\zeta-c)^2+\rho^2$. Тогда множество Q может быть представлено в виде
$$(Q_0^{in}\cap Q_a^{in}\cap Q_{-a}^{in}) \cup (Q_0^e\cap Q_a^e\cap Q_{-a}^e),$$
где $Q_c^{in}(Q_c^e)$ – внутренность (внешность) конуса Q_c. Оценим снизу функцию $|\tau^2-\rho^2-\zeta^2|$ при условии, что точки $(\zeta,\rho,\tau)\in Q$. Пусть $\tau>0$ – фиксировано. (Вследствие симметрии области Q достаточно ограничиться рассмотрением положительных τ). Пусть $Q(\tau)$ – пересечение Q с плоскостью $\tau = \mathrm{const}$. При $\tau > a \quad Q(\tau) = Q^{(1)}(\tau)\cup Q^{(2)}(\tau)$, где $Q^{(1)}(\tau)$ – внутренность шара $\rho^2+(\zeta-a)^2 \leqslant (\tau-a)^2$, $\quad Q^{(2)}(\tau)$ - внешность шара $\rho^2+(\zeta+a)^2 \geqslant (\tau+a)^2$. Найдем $\min(\tau^2-\rho^2-\zeta^2)$ при условии, что $\zeta,\rho\in Q^{(1)}(\tau)$, $\rho^2+(\zeta-\tau)^2 = r^2$. Исключая ρ^2, приходим к задаче о $\min(2\tau^2-2\zeta\tau-r^2)$ при условии, что $r^2-(\zeta-\tau)^2+(\zeta-a)^2 \leqslant (\tau-a)^2$, или при $\zeta \leqslant \tau-\frac{r^2}{2(\tau-a)}$. Величина искомого минимума есть $2\tau^2-r^2-2\tau(\tau-\frac{r^2}{2(\tau-a)}) = \frac{a}{\tau-a}r^2$. Таким образом, в области $Q^{(1)}(\tau)$ $0 \leqslant \frac{1}{\tau^2-\rho^2-\zeta^2} \leqslant \frac{\tau-a}{a}\frac{1}{r^2}$.

Аналогично, в области $Q^{(2)}(\tau)$ находим $0 \leqslant \frac{1}{\rho^2+\zeta^2-\tau^2} \leqslant \frac{\tau+a}{a}\frac{1}{r^2}$.

При $\tau < a \quad Q(\tau)$ есть пересечение внешностей шаров $(\zeta+a)^2+\rho^2 \geqslant (\tau+a)^2$ и $(\zeta-a)^2+\rho^2 \geqslant (\tau-a)^2$; $\min(\rho^2+\zeta^2-\tau^2)$ при $\rho^2+(\zeta-\tau)^2 = r^2$ в области $Q(\tau)$ может только разве что уменьшиться, если отказаться от ограничения $(\zeta-a)^2+\rho^2 \geqslant (\tau-a)^2$, тогда получим, аналогично предыдущему, $\rho^2+\zeta^2-\tau^2 \geqslant \frac{a}{\tau+a}r^2$ и $\frac{1}{|\rho^2+\zeta^2-\tau^2|} \leqslant \frac{\tau+a}{a}\frac{1}{r^2}$. Поскольку r есть расстояние в плоскости $\tau = \mathrm{const}$ от произвольной точки до сингулярной образующей, то из найденных выше оценок следует локальная суммируемость $\Theta(\xi,\tau)$. $\square$

Перейдем к доказательству Теоремы 1. Пусть $\psi(\xi,\tau)$ – произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция. Поскольку V не зависит от угловой переменной φ, можно ограничиться функцией ψ, обладающей тем же свойством.

Ниже будет показано, что

$$(\square_{\xi\tau}V,\psi)=0. \tag{11}$$

Вычислим

$$(\square_{\xi\tau}V,\psi)=(V,\square_{\xi\tau}\psi)=\iiint\limits_{\rho>0}\rho\,d\rho\,d\zeta\,d\tau\;V(\rho,\zeta,\tau)\,\square_{\xi\tau}\,\psi(\rho,\zeta,\tau)$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon}\rho\,d\rho\,d\zeta\,d\tau\,V(\rho,\zeta,\tau)\,\square_{\xi\tau}\,\psi(\rho,\zeta,\tau), \tag{12}$$

где $\Omega_\epsilon:=\big\{\rho,\zeta,\tau\,:\,\rho>0,\,max(|\zeta-\tau|,\rho)>\epsilon\big\}$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим с учетом того, что в Ω_ϵ $V(\rho,\zeta,\tau)$ является классическим решением волнового уравнения

$$(\square_{\xi\tau}V,\psi)=\lim_{\epsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\zeta\int\limits_0^{\epsilon}\rho\,d\rho\Big(-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}-\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\Big)V+\psi\Big(\frac{\partial V}{\partial\tau}+\frac{\partial V}{\partial\zeta}\Big)\Big|_{\tau=\zeta+\epsilon}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\zeta\int\limits_0^{\epsilon}\rho\,d\rho\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\Big)V-\psi\Big(\frac{\partial V}{\partial\tau}+\frac{\partial V}{\partial\zeta}\Big)\Big|_{\tau=\zeta-\epsilon}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\zeta\int\limits_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon}d\tau\Big(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}V-\rho\psi\frac{\partial V}{\partial\rho}\Big)\Big|_{\rho=\epsilon}. \tag{13}$$

Заметим, что в интегралах по переменным ζ, ρ интегрирование ведется по характеристической поверхности и оператор $\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\zeta}$ является внутренним дифференциальным оператором на этой поверхности. Поэтому в этих интегралах можно произвести интегрирования по частям. В итоге формула (13) приобретает вид:

$$(\square_{\xi\tau}V,\psi)=\lim_{\epsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\zeta\int\limits_0^{\epsilon}\rho\,d\rho\Big(-2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\Big)\cdot V\Big)\Big|_{\tau=\zeta+\epsilon}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int\limits_{0}^{\epsilon} \rho\, d\rho\, 2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\Big)\, V\Big|_{\tau=\zeta-\epsilon} + \epsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int\limits_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} d\tau \Big(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}V - \psi\frac{\partial V}{\partial\rho}\Big)\Big|_{\rho=\epsilon}. \tag{14}$$

Наконец, произведя замену, справедливую с точностью до $O(\epsilon)$, значений $\psi(\rho,\zeta,\tau)$ и ее производных $\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$ их значениями на сингулярной образующей $\rho=0$, $\tau=\zeta$ и подставляя выражение для V, найдем:

$$(\Box_{\xi\tau}V,\psi)$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int\limits_{0}^{\epsilon} \rho\, d\rho \Big(-2\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big)\Big)\psi(0,\zeta,\zeta)\frac{1}{2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2} f\Big(\frac{\epsilon}{2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\Big)$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int\limits_{0}^{\epsilon} \rho\, d\rho\, 2\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big)\psi(0,\zeta,\zeta)\frac{1}{-2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\, f\Big(\frac{-\epsilon}{-2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\Big)$$

$$+\epsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int\limits_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial\rho}\psi(0,\zeta,\zeta)\frac{1}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\cdot f\Big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\Big)$$

$$-2\epsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, \psi(0,\zeta,\zeta) \int\limits_{\zeta-\xi}^{\zeta+\xi} d\tau \Big(\frac{1}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)^2}\cdot f\Big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\Big)$$

$$+\frac{\tau-\zeta}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)^3}\cdot f'\Big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\Big)\Big)$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0} -2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \big(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\big)\psi(0,\zeta,\zeta)$$

$$\times\Big(\int\limits_{0}^{\epsilon} \rho\, d\rho\, \frac{1}{2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\, f\Big(\frac{\epsilon}{2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\Big)$$

$$-\int\limits_{0}^{\epsilon} \rho\, d\rho \frac{1}{-2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\, f\big(\frac{-\epsilon}{-2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\big)\Big)$$

$$+\epsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int\limits_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial\rho}\psi(0,\zeta,\zeta)\frac{1}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\cdot f\big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\big)$$

$$-2\epsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta\ \psi(0,\zeta,\zeta) \int\limits_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} d\tau \frac{1}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)^2}$$

$$\times\Big(f\Big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\Big)+\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\cdot f'\Big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\Big)\Big)$$

$$=: \lim_{\epsilon\to+0}\big(-2I_1+2I_2+I_3-2I_4\big). \tag{15}$$

Рассмотрим слагаемое

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde\psi_1(\zeta)\,d\zeta\int\limits_0^{\epsilon}\frac{2\rho\,d\rho}{2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}f\Big(\frac{\epsilon}{2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}\Big). \tag{16}$$

Здесь $\tilde\psi_1(\zeta)=\big(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\big)\psi(0,\zeta,\zeta)$. Произведем во внутреннем интеграле замену переменных, обозначив аргумент функции f, $\frac{\epsilon}{2\epsilon\zeta+\epsilon^2-\rho^2}=: l$. Тогда

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{-\epsilon/2}\tilde\psi_1(\zeta)\,d\zeta\int\limits_{1/(2\zeta+\epsilon)}^{1/2\zeta}\frac{dl}{l}f(l)+\int\limits_0^{\infty}\tilde\psi_1(\zeta)\,d\zeta\int\limits_{1/(2\zeta+\epsilon)}^{1/2\epsilon}\frac{dl}{l}f(l)$$

$$+\int\limits_{-\epsilon/2}^{0}\tilde\psi_1(\zeta)\,d\zeta\Big(\int\limits_{1/(2\zeta+\epsilon)}^{\infty}\frac{dl}{l}f(l)+\int\limits_{-\infty}^{1/2\zeta}\frac{dl}{l}f(l)\Big).$$

Ввиду финитности функции $f(l)$ интеграл по интервалу $(\frac{-\epsilon}{2},0)$ оси ζ равен нулю при достаточно малых ϵ.

Пусть $|f|\leqslant M$, $|\tilde\psi_1|<m_1$, $\tilde\psi_1=0$ при $|x|>b$,

$$\Big|\int\limits_{(2\zeta+\epsilon)^{-1}}^{(2\zeta)^{-1}}\frac{dl}{l}f(l)\Big|\leqslant M\,\ln\Big|\frac{\zeta+\epsilon/2}{\zeta}\Big|.$$

Выберем b достаточно большим, так что $\tilde\psi_1=0$ при $\zeta>b-\frac{\epsilon}{4}$, $\zeta<-b$. Тогда

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{-\epsilon/2}d\zeta\,\tilde\psi_1(\zeta)\,\ln\frac{\zeta+\epsilon/2}{\zeta}\Big|+\Big|\int\limits_0^{\infty}d\zeta\,\tilde\psi_1(\zeta)\,\ln\frac{\zeta+\epsilon/2}{\zeta}\Big|$$

$$\leqslant m_1 \int\limits_{-b-\epsilon/4}^{-\epsilon/2} \ln \frac{\zeta}{\zeta+\epsilon/2} d\zeta + m_1 \int\limits_{0}^{b-\epsilon/4} \ln \frac{\zeta+\epsilon/2}{\zeta} d\zeta$$

$$= m_1 \int\limits_{-b}^{-\epsilon/4} \ln \frac{\zeta-\epsilon/4}{\zeta+\epsilon/4} d\zeta + m_1 \int\limits_{\epsilon/4}^{b} \ln \frac{\zeta+\epsilon/4}{\zeta-\epsilon/4} d\zeta = 2m_1 \int\limits_{\epsilon/4}^{b} \ln \frac{\zeta+\epsilon/4}{\zeta-\epsilon/4} d\zeta$$

$$= 2m_1 \Big(\ln \frac{b+\epsilon/4}{b-\epsilon/4} \cdot \Big(b - \frac{\epsilon}{4}\Big) + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\zeta+\epsilon/4}{\epsilon/2} \Big) \to 0.$$

Рассмотрения, аналогичные предыдущим, дают $\lim\limits_{\epsilon \to +0} I_2 = 0$. Рассмотрим

$$I_3 = \epsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{\partial}{\partial\rho} \psi(0,\zeta,\zeta) \int\limits_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} d\tau \frac{1}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)} \cdot f\Big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\Big). \qquad (17)$$

Произведем во внутреннем интеграле замену переменных, обозначив, аналогично предыдущему, через l аргумент функции f:

$$l = \frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}, \quad \tau \in (\zeta-\epsilon, \zeta+\epsilon), \qquad (18)$$

выражение для τ через l:

$$\tau = \frac{1}{2l}\Big(1 \pm \sqrt{(2\zeta l - 1)^2 + 4l^2\epsilon^2}\Big), \qquad (19)$$

где знак плюс или минус здесь и далее выбирается в соответствии с правилом: верхний знак – при $\zeta l > \frac{1}{2}$, нижний – при $\zeta l < \frac{1}{2}$. Дифференцируя равенство (18), найдем

$$dl = -\frac{(\tau-\zeta)^2+\epsilon^2}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)^2}\, d\tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)^2} &= -\frac{dl}{(\tau-\zeta)^2+\epsilon^2}, \\ \frac{d\tau}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2} &= -\frac{\tau-\zeta}{(\tau-\zeta)^2+\epsilon^2} \cdot \frac{dl}{l}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Подставляя в формулы (20) выражения для $\tau-\zeta$, полученные из (19), найдем

$$\frac{d\tau}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)^2} = -\frac{2l^2 dl}{\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}\,\left(\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}-|2\zeta l-1|\right)}$$

$$= -\frac{2l^2(\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}+|2\zeta l-1|)dl}{\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}\cdot 4\epsilon^2 l^2}$$

$$= -\frac{1}{2\epsilon^2}\frac{(\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}+|2\zeta l-1|)dl}{\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}} \tag{21}$$

$$\frac{d\tau}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2} = \mp\frac{dl}{\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}}. \tag{22}$$

Используя формулу (22), получим

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta\,\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(0,\zeta,\zeta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon dl}{\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}}\,(\mp f(l)). \tag{23}$$

Оценим, используя неравенство Коши,

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon dl}{\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}}\,(\pm f(l))\Big|$$

$$\leqslant \epsilon\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(l)|^2\,dl\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}\Big)^{1/2}$$

$$= \epsilon\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(l)|^2\,dl\Big)^{1/2}\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2+\epsilon^2}}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{(l-\frac{\zeta}{2(\zeta^2+\epsilon^2)})^2+\frac{\epsilon^2}{4(\zeta^2+\epsilon^2)^2}}\Big)^{1/2}$$

$$= \epsilon\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(l)|^2\,dl\Big)^{1/2}\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2+\epsilon^2}}\Big(\frac{2\pi(\zeta^2+\epsilon^2)}{\epsilon}\Big)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon\pi}{2}}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(l)|^2\,dl\Big)^{1/2}\to 0.$$

Рассмотрим внутренний интеграл в последнем слагаемом в (15), переходя в нем к переменной l (см.(18)) и воспользовавшись формулой (21):

$$\epsilon^2 \int\limits_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} \frac{d\tau}{(\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2)^2} f\Big(\frac{\tau-\zeta}{\tau^2-\zeta^2-\epsilon^2}\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dl\, \frac{(\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}+|2\zeta l-1|)}{\sqrt{(2\zeta l-1)^2+4l^2\epsilon^2}} (f(l)+lf'(l))$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dl\, \big(lf(l)\big)' = 0 \quad \text{при}\, \epsilon\to 0.$$

Таким образом,

$$(\Box V, \psi) = 0.$$

Теорема доказана. В заключение сделаем следующие замечания: $\Box$

Замечание 1. Общим решением уравнения (5), зависящим только от $\gamma := \tau^2-\zeta^2-\rho^2$ и $s=\tau-\zeta$, является при $\gamma\neq 0$ сумма решений Бейтмена: $\frac{1}{\gamma}f(\frac{\tau}{\gamma})$ и очевидного $g(s)$, где f и g – произвольные функции. Действительно, если ищется решение, зависящее только от γ и s, уравнение (5) принимает вид:

$$sV_{\gamma s}+\gamma V\gamma\gamma+2V_\gamma = 0 \quad \text{или} \quad \big(s\frac{\partial}{\partial s}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+2\big)V_\gamma = 0,$$

откуда следует, что V_γ является однородной функцией степени минус второй от s и γ. Интегрируя по γ, получим, что V есть сумма однородной функции степени -1 и функции от s, при $\gamma\neq 0$:

$$V = \frac{1}{\gamma}f(\frac{s}{\gamma})+g(s).$$

Замечание 2. Решение Бейтмена может быть получено следующим образом [5]: пусть E^+ – причинное фундаментальное решение, $E^+ := \frac{1}{2\pi}\delta(\tau^2-\xi^2)\epsilon(\tau)$, E^- – антипричинное фундаментальное решение, $E^-(\xi,\tau) := E^+(\xi,-\tau)$, $E^0 := E^+-E^- = \frac{1}{\pi}\operatorname{sgn}\tau\delta(\tau^2-\xi^2)$, $h(t)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция, $\omega\in\mathbb{R}^3$ – единичный вектор. Тогда функция

$$W(\xi,\tau) = E^0 * \big(\delta(\xi-\omega\tau)h(\tau)\big)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\int d\tau'\, d\xi' \ \operatorname{sgn} \tau' \delta(\tau'^2 - \xi'^2)\, \delta(\xi - \xi' - \omega\tau + \omega\tau')\, h(\tau - \tau')$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\tau' \ \operatorname{sgn} \tau' \delta(\tau'^2 - |\xi - \omega\tau + \omega\tau'|^2)\, h(\tau - \tau')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\tau - (\xi, \omega)}\, h\Big(\frac{\tau^2 - \zeta^2}{2(\tau - (\xi, \omega))}\Big). \tag{24}$$

Функцию (24) можно представить в виде (8), положив

$$f(l) = \frac{1}{4\pi l}\, h\Big(\frac{1}{2l}\Big).$$

Литература

1. A. S. Blagovestchensky *On wave fields the sources disposed in the infinity.* — J.Inv. Ill-posed Problems, **16** (2008), 1–11.
2. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* **IV**, ч.1, М., Наука (1981).
3. H. Bateman, *The conformal transformations in four dimensions and their applications to geometrical optics.* — Proc. London Math. Soc., **7** (1909), 70–89.
4. Р. Курант, *Уравнения с частными производными.* М., Мир (1964).
5. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* **I**, М., Мир (1986).

Blagovestchensky A. S. Plane waves, Batmen's solutions and sources at infinity.

For threedimensional wave equation two equivalent statements are proved:

1) plane waves are not generated by a source at infinity,

2) Bateman's solution (the solution that obtained by the application of Kelvin–Bateman transformation to a plane wave) is the solution to wave equation everywhere in $\mathbb{R}^4$.

С.-Петербургский
государственный университет,
ул. Ульяновская, д.3,
Петродворец, 198504,
С.-Петербург, Россия
E-mail: ablagoveshhenskij@yandex.ru

Поступило 1 октября 2014 г.