Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

М. И. Белишев, А. В. Иванов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§1. Введение

Постановка. В трехмерном пространстве со стандартной системой декартовых координат x, y, z расположены два кольца $\{(x,y,z)\,|\,x = \mp h,\ y^2+z^2=1\}$. Между кольцами натягивается мыльная пленка, минимизирующая свою площадь под действием сил поверхностного натяжения. По симметрии физических условий, пленка приобретает вид поверхности вращения (вокруг оси x) и нахождение ее формы сводится к известной задаче о минимуме функционала

$$S_h[y] := 2\pi \int\limits_{-h}^{h} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{1.1}$$

при условиях закрепления

$$y(-h) = y(h) = 1\,. \tag{1.2}$$

Величина $h > 0$, равная половине расстояния между кольцами, играет роль основного параметра. Цель работы состоит в исследовании поведения решений задачи (1.1), (1.2) в зависимости от h.

Результаты. Данная задача, в приведенной или аналогичной постановках, рассматривается (по крайней мере на формальном уровне) практически во всех учебниках по вариационному исчислению. Ее подробное исследование имеется в монографии [3]; мы же ориентировались на версию в учебнике [2], по поводу которой ниже будут сделаны замечания. В нашей работе:

- предлагается чисто аналитический способ решения задачи[1], использующий известные факты теории Штурма–Лиувилля;

Ключевые слова: задача о форме мыльной пленки, критический случай, условие Гольдшмидта, солитонный потенциал.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00535_а и СПбГУ 6.38.670.2013.

[1] в [3] исследование проводится в геометрических терминах поведения поля экстремалей: см. стр 28–45

• подробно рассматривается ситуация с критическим значением $h = h_*$, после которого задача становится неразрешимой, причем исследование привлекает третью вариацию функционала $S_{h_*}[y]$;

• критически обсуждаются приведенные в [2] аргументы, относящиеся к условию Гольдшмидта и предлагается собственная трактовка неразрешимости при $h > h_*$, основанная на энергетических соображениях.

Интересно отметить, что при исследовании второй вариации функционала (1.1) ключевую роль играет уравнение Штурма–Лиувилля с односолитонным потенциалом. Однако содержательное объяснение этому факту нам найти не удалось.

Благодарность. Авторы признательны А.Ф.Вакуленко за полезные обсуждения и консультации.

§2. Исследование на экстремум

Экстремали. Напомним известные факты. Экстремали функционала (1.1) суть решения уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \,=\, 0\,,$$

где $F(y, y') := y\sqrt{1 + y'^2}$. Оно имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = C$; последующее интегрирование дает решения вида $y(x, C_1, C_2) = C_1 \mathrm{ch}\frac{x+C_2}{C_1}$. Из условий (1.2) легко следует $C_2 = 0$, что приводит к однопараметрическому семейству экстремалей задачи

$$y(x, C) \,=\, C\mathrm{ch}\frac{x}{C}\,, \qquad C > 0\,. \tag{2.1}$$

Значение функционала на экстремали находится интегрированием:

$$S_h[y(\cdot, C)] \,=\, 2\pi \int\limits_{-h}^{h} C\mathrm{ch}\frac{x}{C}\,\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{C}}\,dx = 2\pi Ch + \pi C^2 \mathrm{sh}\frac{2h}{C}\,. \tag{2.2}$$

Условия разрешимости. Подстановка $x = h$ в (2.1) с учетом (1.2) дает уравнение $C\mathrm{ch}\frac{h}{C} = 1$ для определения постоянной C, которое удобно записать в виде

$$\phi(\tau) \,=\, \frac{1}{h}\,, \qquad \text{где} \quad \tau := \frac{h}{C} > 0\,,\ \phi(\tau) := \frac{\mathrm{ch}\tau}{\tau}\,. \tag{2.3}$$

Элементарное исследование приводит к следующим фактам.

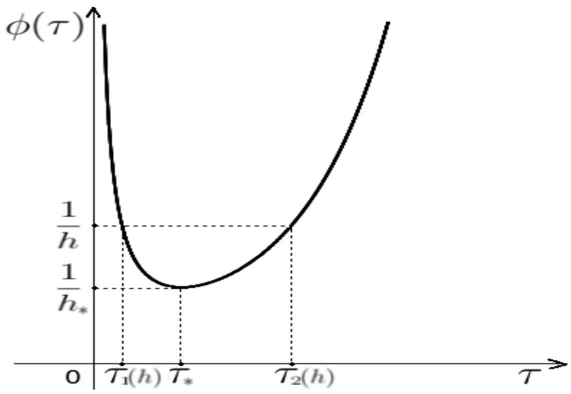

Рис. 1. Функция ϕ.

• Функция ϕ выпукла вниз, причем выполнено $\phi(\tau) \to \infty$ при $\tau \to 0$ и $\tau \to \infty$. Она имеет единственный положительный минимум в точке $\tau = \tau_*$, определяемой равенством $\phi'(\tau) = 0$. Последнее равносильно трансцендентному уравнению

$$1 - \tau \mathrm{th} \tau = 0 . \tag{2.4}$$

• Уравнение (2.3) разрешимо лишь при $h \leqslant h_*$, где $h_* := \frac{1}{\phi(\tau_*)}$. При $h < h_*$ оно имеет два различных корня $\tau_{1,2}(h) : \tau_1(h) < \tau_2(h)$; при $h = h_*$ корни совпадают. При $h \to 0$ выполнено $\tau_1(h) \to 0$ и $\tau_2(h) \to \infty$, причем

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_1(h)}{h} = 1 , \qquad \lim_{h \to 0} h \frac{e^{\tau_2(h)}}{\tau_2(h)} = 2 . \tag{2.5}$$

• Функция $\tau_1(h)$, определенная при $0 \leqslant h \leqslant h_*$, обратима; обратная функция есть

$$h = h(\tau_1) \overset{(2.3)}{=} \frac{\tau_1}{\mathrm{ch} \tau_1} , \qquad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_* .$$

Для нее имеем:

$$\frac{dh}{d\tau_1} = \frac{1 - \tau_1 \mathrm{th} \tau_1}{\mathrm{ch} \tau_1} ,$$

откуда

$$\frac{d\tau_1}{dh} = \frac{\mathrm{ch} \tau_1}{1 - \tau_1 \mathrm{th} \tau_1} , \qquad \lim_{h \to h_*} \frac{d\tau_1}{dh} \overset{(2.4)}{=} \infty . \tag{2.6}$$

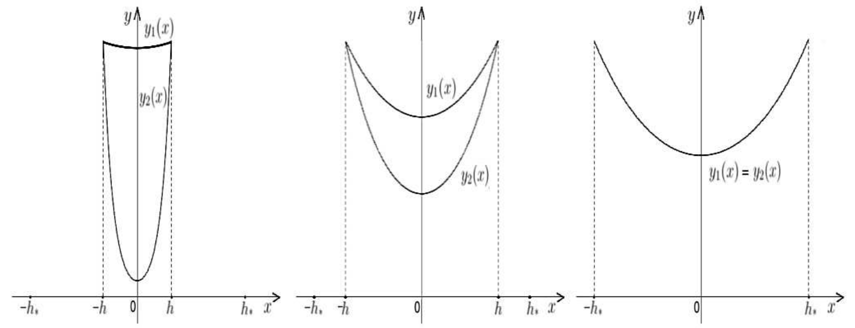

Рис. 2. Экстремали.

Из приведенного выше, в частности, следует, что при $h \leqslant h_*$ функционал $S_h[y]$ имеет две экстремали

$$y_{1,2}(x) \overset{(2.1)}{=} \frac{h}{\tau_{1,2}(h)} \operatorname{ch}\left[\frac{\tau_{1,2}(h)}{h}\, x\right], \qquad -h \leqslant x \leqslant h\,, \tag{2.7}$$

различные при $h < h_*$ и совпадающие при $h = h_*$. *При $h > h_*$ функционал $S_h[y]$ экстремалей не имеет.* На рис.2 показаны графики экстремалей для малого, промежуточного и критического значений расстояния h.

Подстановка (2.7) в (2.1) приводит к равенствам

$$S_h\,[y_{1,2}] \;=\; 2\pi \frac{h^2}{\tau_{1,2}(h)} + \pi\,\frac{h^2}{\tau_{1,2}^2(h)} \operatorname{sh} 2\tau_{1,2}(h)\,, \qquad 0 < h \leqslant h_*\,. \tag{2.8}$$

Из них, с учетом (2.5), легко выводятся соотношения

$$\lim_{h\to 0} S_h[y_1] \;=\; 0\,, \qquad \lim_{h\to 0} S_h[y_2] \;=\; 2\pi\,.$$

Дополнительный анализ дает

$$S_h[y_1] \;<\; S_h[y_2]\,, \qquad 0 < h < h_*; \tag{2.9}$$

при этом $S_{h_*}[y_1] = S_{h_*}[y_2]$ по совпадению экстремалей при $h = h_*$ (см. рис.3).

Вторая вариация. Исследование экстремалей на наличие экстремума использует тейлоровское представление

$$S_h[y+t\eta] \underset{t\sim 0}{=} S_h[y]+t\delta S_h[y;h]+t^2\delta^2 S_h[y;h]+t^3\delta^3 S_h[y;h]+o(t^3) \quad (2.10)$$

[2] и, в частности, вторую вариацию. Ее общий вид на экстремалях (2.1) устанавливается прямым дифференцированием:

$$\delta^2 S_h[y;\eta] := \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dt^2}\,S_h[y+t\eta]\right]\Big|_{t=0} \overset{(1.1),(2.1)}{=} \frac{1}{2C}\int\limits_{-h}^{h}\frac{C^2\eta'^2(x)-\eta^2(x)}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{C}}\,dx\,,$$

где $\eta\in C^1[-h,h]$ – пробная функция, $\eta(-h)=\eta(h)=0$. Вводя новую переменную $s=\frac{x}{C}$ и пробную функцию

$$\psi(s) := \frac{\eta(Cs)}{\operatorname{ch}s} \qquad (\text{при этом } \ \eta(x)=\psi\left(\frac{x}{C}\right)\operatorname{ch}\frac{x}{C}\,)\,, \tag{2.11}$$

и интегрируя по частям с учетом $\psi(-\tau)=\psi(\tau)=0$, после несложных вычислений получим

$$\delta^2 S_h[y;\eta] = \alpha\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left[\psi'^2(s)-\frac{2}{\operatorname{ch}^2 s}\,\psi^2(s)\right]\,ds\,, \tag{2.12}$$

где $\alpha=\mathrm{const}>0$.

Рассмотрим интеграл в (2.12) как функционал над ψ. Отвечающее ему уравнение Эйлера имеет вид уравнения Штурма–Лиувилля

$$\psi''+\frac{2}{\operatorname{ch}^2 s}\psi \;=\; 0 \tag{2.13}$$

с *солитонным потенциалом* $q=\frac{2}{\operatorname{ch}^2 s}$. Является ли присутствие последнего в данной задаче случайным обстоятельством или имеет какой-то содержательный подтекст, нам установить не удалось.

В исследовании второй вариации мы используем решение уравнения (2.13) специального вида

$$\mu(s) \;:=\; 1-s\operatorname{th}s\,. \tag{2.14}$$

Оно выделено условиями $\mu(0)=1$ и $\mu(-s)=\mu(s)$, имеет простые корни $\tau=\mp\tau_*$ (см. (2.4)) и *положительно* в интервале $(-\tau_*,\tau_*)$. Напомним, что любое решение уравнения $u''+qu=0$ вне своих корней

[2] в нем для экстремалей y выполнено $\delta S_h[y;h]=0$

удовлетворяет известному уравнению Риккати

$$\left[\frac{u'}{u}\right]' + \left[\frac{u'}{u}\right]^2 = -q\,.$$

Применительно к решению μ имеем:

$$\left[\frac{\mu'}{\mu}\right]' + \left[\frac{\mu'}{\mu}\right]^2 = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2\tau}\,. \tag{2.15}$$

Поэтому при $|\tau| < \tau_*$ (вне корней μ) следующие преобразования интеграла из (2.12) вполне корректны:

$$\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left[\psi'^2(s) - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 s}\,\psi^2(s)\right]ds \overset{(2.15)}{=} \int\limits_{-\tau}^{\tau}\left\{\psi'^2 + \left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)' + \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\right]\psi^2\right\}ds$$

$$\overset{(*)}{=} \int\limits_{-\tau}^{\tau}\left[\psi'^2 - \frac{\mu'}{\mu}\,(\psi^2)' + \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\psi^2\right]ds = \int\limits_{-\tau}^{\tau}\left[\psi' - \frac{\mu'}{\mu}\,\psi\right]^2 ds\,.$$

При интегрировании по частям в равенстве $(*)$ использованы граничные условия $\psi(\mp\tau) = 0$. Из них же следует ограниченность $\frac{\psi}{\mu}$ при $|s| \leqslant \tau_*$, что позволяет оправдать выкладки и в случае $\tau = \tau_*$.

Как следствие, для второй вариации (2.12) при любой пробной функции η имеем:

$$\delta^2 S_h[y;\eta] = \beta\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left[\psi' - \frac{\mu'}{\mu}\,\psi\right]^2 ds = \begin{cases} > 0 & \text{при } \tau < \tau_*\,, \\ \geqslant 0 & \text{при } \tau = \tau_* \end{cases} \tag{2.16}$$

причем равенство $\delta^2 S_h[y;\eta] = 0$ (при $\tau = \tau_*$) выполнено только на функции η, которой отвечает (в смысле связи (2.11)) функция $\psi = c\mu$ с постоянной $c \neq 0$.

Экстремаль y_1. Фиксируем $h < h_*$; при этом выполнено неравенство $\tau_1(h) < \tau_*$. В силу последнего, справедливо представление (2.16) с $\tau < \tau_*$, из которого имеем

$$\delta^2 S_h[y_1;\eta] \;>\; 0$$

для любой пробной функции η. Следовательно, экстремаль y_1 доставляет минимум функционалу $S_h[y]$. Величина минимума находится по (2.8). Как видно из (2.9), этот минимум является *локальным* (не является глобальным).

Экстремаль y_2. При $h < h_*$ выполнено $\tau_2(h) > \tau_*$ и представление (2.16) теряет силу. Покажем, что вариация $\delta^2 S_h[y_2;\eta]$ перестает быть знакоопределенной и принимает отрицательные значения на подходящих η.

Рассмотрим граничную спектральную задачу

$$\psi'' + \lambda \frac{2}{\operatorname{ch}^2 s}\psi \,=\, 0\,, \qquad -\tau < s < \tau \tag{2.17}$$

$$\psi(-\tau) \,=\, \psi(\tau) \,=\, 0 \tag{2.18}$$

для неоднородной струны с плотностью $\rho = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 s}$ и закрепленными концами. В ней τ играет роль параметра. Приведем известные факты (см., например, [1]).

• Задача имеет простой дискретный спектр $\{\lambda_k(\tau)\}_{k\geqslant 1}$:

$$0 < \lambda_1(\tau) < \lambda_2(\tau) < \ldots, \quad \lambda_k(\tau) \underset{k\to\infty}{\to} \infty$$

и соответствующие собственные функции $\{\psi_k(\cdot\,;\tau)\}_{k\geqslant 1}$, образующие ортогональный базис пространства $L_{2,\,\rho}(-\tau,\tau)$.

• Выполнено $\frac{d\lambda_k(\tau)}{d\tau} < 0$, т.е. собственные значения строго монотонно убывают по τ.

• Первое (наименьшее) собственное значение есть

$$\lambda_1(\tau) \,=\, \min_{0\neq\psi\in H_0^1[-\tau,\tau]} \frac{\int\limits_{-\tau}^{\tau} \psi'^2(s)\,ds}{\int\limits_{-\tau}^{\tau} \frac{2}{\operatorname{ch}^2 s}\,\psi^2(s)\,ds}\,, \tag{2.19}$$

где $H_0^1[-\tau,\tau] := \{y \mid y, y' \in L_2(-\tau,\tau),\ y(\mp\tau) = 0\}$ – пространство Соболева. При $\tau \to 0$ выполнено $\lambda_1(\tau) \to \infty$.

• Собственная функция ψ_1 не имеет корней при $-\tau < s < \tau$. Функции ψ_k с номерами $k \geqslant 2$ *имеют* корни внутри этого интервала.

Из приведенного следует, что поведение нижней границы спектра струны таково. При $\tau \sim 0$ имеем $\lambda_1(\tau) \gg 1$. С ростом τ величина $\lambda_1(\tau)$ уменьшается, а при $\tau = \tau_*$ выполнено $\lambda_1(\tau_*) = 1$ и $\psi_1 = c\mu$. В самом деле, при $\tau = \tau_*$ уравнение (2.13) [3] имеет решение $\psi = \mu$, удовлетворяющее условиям (2.18), т.е. являющееся собственной функцией струны, отвечающей $\lambda = 1$. То, что это именно *первая* собственная функция, следует из отсутствия корней у μ внутри $(-\tau_*, \tau_*)$.

[3] оно же – уравнение (2.17) с $\lambda = 1$

Далее, при $\tau > \tau_*$ по монотонности собственных значений имеем $\lambda_1(\tau) < 1$. Поэтому, в силу (2.19), найдется функция $\psi_0 \in H_0^1[-\tau,\tau]$, для которой выполнено

$$\frac{\int\limits_{-\tau}^{\tau} {\psi_0}'^2(s)\,ds}{\int\limits_{-\tau}^{\tau} \frac{2}{\mathrm{ch}^2 s}\,\psi_0^2(s)\,ds} < 1\,,$$

что равносильно

$$\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left[{\psi_0}'^2(s) - \frac{2}{\mathrm{ch}^2 s}\,{\psi_0}^2(s)\right] ds < 0\,.$$

Отсюда, для функции η_0, связанной с ψ_0 соотношением (2.11), в силу (2.12) имеем:

$$\delta^2 S_h[y_2;\eta_0] < 0\,.$$

Следовательно на экстремали y_2 функционал $S_h[y]$ экстремума не имеет.

Критический случай. Предыдущие рассмотрения относились к случаю $h < h_*$. Пусть теперь $h = h_*$, так что экстремали сливаются:

$$y_1(x) = y_2(x) \overset{(2.7)}{=} \frac{h_*}{\tau_*}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\tau_*}{h_*}\,x\right] =: y_*(x)\,, \qquad -h_* \leqslant x \leqslant h_*\,.$$

Покажем, что на y_* экстремума нет. Напомним, что функция μ определена в (2.14).

Найдем вариации функционала $S_{h_*}[y]$, выбрав в качестве пробной функцию

$$\eta_*(x) \overset{(2.11)}{=} \mu\left(\frac{\tau_*}{h_*}\,x\right)\mathrm{ch}\left[\frac{\tau_*}{h_*}\,x\right]\,.$$

По выбору имеем $\delta S_{h_*}[y_*;\eta_*] = 0$ и $\delta^2 S_{h_*}[y_*;\eta_*] \overset{(2.16)}{=} 0$. Подсчитаем третью вариацию. Как нетрудно проверить, на произвольных элементе и пробной функции она имеет вид

$$\begin{aligned}\delta^3 S_h[y;\eta] &:= \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dt^3}\,S_h[y+t\eta]\right]\Big|_{t=0} \\ &= \pi\int\limits_{-h}^{h}\frac{{\eta'}^2(x)}{\left(1+{y'}^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\eta(x) - \frac{y(x)y'(x)\eta'(x)}{1+{y'}^2(x)}\right]dx\,.\end{aligned}$$

Полагая $h = h_*$, $y = y_*$ и $\eta = \eta_*$, после несложных вычислений получаем:

$$\delta^3 S_{h_*}[y_*;\eta_*] = \frac{2\pi\tau_*^4}{3h_*} \neq 0\,.$$

В силу (2.10) имеем $S_{h_*}[y_* + th_*] \underset{t\sim 0}{=} \gamma t^3 + o(t^3)$ с $\gamma \neq 0$, что и указывает на отсутствие экстремума.

§3. Комментарии

Об условии Гольдшмидта. При $h > h_*$ функционал (1.1) с условиями (1.2) экстремалей не имеет. В [2] (глава 17, раздел 2) этому факту дается следующее качественное объяснение.

С ростом h площадь пленки растет. При достаточно большом h энергетически более выгодным оказывается положение, при котором пленка затягивает оба кольца по-отдельности, приобретая суммарную площадь $\pi 1^2 + \pi 1^2 = 2\pi$. Это приводит к ее разрыву, причем критическим оказывается значение площади 2π, что и объявляется *условием разрыва Гольдшмидта.*

Приведенное объяснение[4] не является состоятельным. Определив "постоянную Гольдшмидта" h_G как решение уравнения $S_h[y_1] = 2\pi$ (относительно h), нетрудно проверить, что оно разрешимо и

$$0.5277... = h_G < h_* = 0.6627...\,,$$

так что соответствующая экстремаль y_1 существует и описывает устойчивое докритическое положение пленки: см. рис.3.

Вероятно, некорректное объяснение является простым недоразумением. В первом упражнении в конце раздела (стр 689) читателю предлагается "найти такое значение $\pm h$, чтобы поверхность вращения оказалась равной площади двух торцевых колец".

Физические соображения. Выделено ли чем-нибудь значение $h = h_*$ с физической точки зрения? Ниже предлагается вариант ответа на этот вопрос.

Пусть $h < h_*$ и пленка имеет форму, описываемую экстремалью y_1. При контакте с кольцами пленка действует на них силами поверхностного натяжения, притягивая друг к другу. По мере раздвижения

[4] оно, в основном, и мотивировало наш интерес к задаче

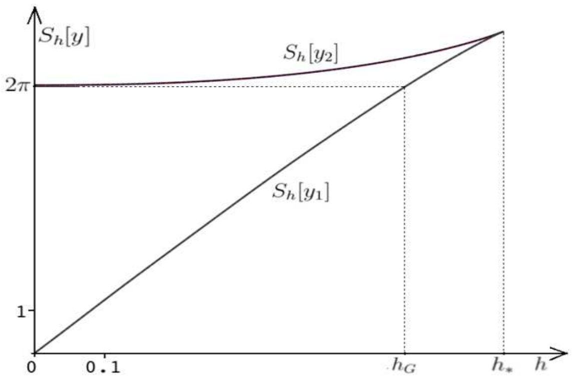

Рис. 3. Площади

колец система запасает потенциальную энергию. В рамках рассматриваемой модели можно предположить, что потенциальная энергия сил натяжения пропорциональна площади пленки $S_h[y_1]$. Производную

$$-\frac{dS_h[y_1]}{dh} =: F(h)$$

естественно[5] интерпретировать как силу взаимного притяжения колец. Найдем ее величину.

Положив $R(\tau) := \frac{2}{\tau} + \frac{\operatorname{sh} 2\tau}{\tau^2}$, имеем $S_h[y_1] \overset{(2.8)}{=} \pi h^2 R(\tau_1(h))$, откуда

$$F(h) = -2\pi h R(\tau_1(h)) - \pi h^2 R'(\tau_1(h))\tau_1'(h).$$

Проводя дифференцирование в правой части, после несложных преобразований с учетом первого из равенств (2.6), получим

$$F(h) = -4\pi \frac{h}{\tau_1(h)}.$$

Дифференцируя еще раз, приходим к соотношениям

$$F'(h) = -4\pi \frac{\tau_1(h) - h\tau_1'(h)}{\tau_1^2(h)} \qquad \underset{h \to h_*}{\overset{(2.6)}{\longrightarrow}} \infty \, .$$

Такое поведение и дает основание считать значение $h = h_*$ критическим: можно полагать, что именно бесконечная скорость роста силы

[5]по аналогии с моделью упругой пружины, где $E_{\text{pot}} = \frac{kh^2}{2}$ и $F = -E_{\text{pot}}' = -kh$

приводит к разрыву пленки и делает невозможным ее существование при $h > h_*$.

Литература

1. Ф. В. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи.* М., Мир (1968).
2. Г. А. Арфкен, *Математические методы в физике.* М., Атомиздат (1970).
3. В. С. Буслаев, *Вариационное исчисление.* Ленинград, Издательство Ленинградского Университета (1980).

Belishev M. I., Ivanov A. V. On a calculus of variations problem.

The paper is of scientific-methodical character. The classical soap film shape (minimal surface) problem is considered, the film being stretched between two parallel coaxial rings. An analytical approach based on relations to the Sturm-Liouville problem is proposed. An energy terms interpretation of the classical Goldschmidt condition is discussed. Appearance of the soliton potential in course of the second variation analysis is noticed.

Санкт-Петербургское Отделение
Математического Института
им. В.А.Стеклова РАН,
Санкт-Петербургский
Государственный Университет
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2014 г.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: regul1@mail.ru