Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 426, 2014 г.

В. М. Бабич

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНЫ, БЕГУЩЕЙ ВДОЛЬ РЕБРА УПРУГОГО КЛИНА

Посвящается столетию со дня рождения Г. И. Петрашеня

1. Постановка задачи

Пусть упругий клин описывается неравенствами:

$$0 \leqslant y \leqslant l, \ l = \mathrm{const} > 0, \ -\infty < z < +\infty \tag{1}$$

Вектор смещения w зависит от времени гармоническим образом:

$$w(x, y, z, t) = u(x, y, z)e^{-i\omega t}, \ \omega = \mathrm{const} > 0, \tag{2}$$

внутри клина выполняются классические уравнения динамической теории упругости:

$$\mathbf{L}u + \omega^2 u = -\frac{\mathbf{m}}{\rho}\delta(x - x_0, y - y_0)\delta(z),$$
$$\mathbf{L} = a^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}(\dots) - b^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\dots), \tag{3}$$

где ρ – плотность среды, a и b – скорости продольной и поперечной волн, δ – дельта функция Дирака, $\mathbf{m} = \mathrm{const}$ – вектор, характеризующий величину и направление сосредоточенной силы, приложенной в точке $(x_0, y_0, z = 0)$.

Естественно предположить, что такой источник колебаний породит кроме волн другой природы также и клиновые волны. Наша цель – найти соответствующие коэффициенты возбуждения. Мы предположим, что все волны кроме клиновых при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to +\infty$ будут затухать. Мы будем интересоваться лишь клиновой волной (ее для краткости мы будем называть ребровbooлной), бегущей в сторону возрастающих z, предполагая, что при $z \geqslant A = \mathrm{const} > 0$ волна имеет вид:

$$u_e = \mathbf{\Psi}(x, y, x_0, y_0)e^{ikz}, \ k = \mathrm{const} > 0, \tag{4}$$

Ключевые слова: упругий клин, коэффициент возбуждения, точечный источник колебаний, клиновая волна.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00535А.

где вектор $\mathbf{\Psi}$ квадратично интегрируем по x, y:

$$\iint\limits_{\Omega} |\mathbf{\Psi}|^2\, dxdy < +\infty.$$

Здесь Ω область $0 < y < lx < +\infty$ – сечение клина плоскостью $z = 0$.

Подставляя выражение(4) в уравнение $\mathbf{L}u + \omega^2 u = 0$, получим:

$$L(ik)\mathbf{\Psi} + \omega^2\mathbf{\Psi} = 0, \tag{5}$$

$L(ik)$ – оператор вида $a^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}(\dots) - b^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\dots)$, где дифференцирование $\frac{\partial}{\partial z}$ следует заменить умножением на ik. Такую же замену следует сделать и в краевых условиях. Как показано в работе [4], при любом $k > 0$, существует собственная вектор-функция оператора $L(ik)$, соответствующая некоторому собственному числу $\omega^2(k)$. Таким образом:

$$\mathbf{\Psi} = \Phi(x_0, y_0)\varphi(x, y). \tag{6}$$

Здесь φ нормированная $\big(\iint\limits_{\Omega} |\varphi|^2 dxdy = 1\big)$ собственная вектор-функция, а Φ – искомый коэффициент возбуждения.

2. Ребároволна – волна без дисперсии

Этот факт хорошо известен (см. например главу 10 книги [1] и работу [5]). Приведем в удобной для дальнейшего форме соответствующие соотношения. Положим в формуле (5) $k = 1$. Пусть $\varphi_1(x, y))$ соответствующая нормированная $(\iint\limits_{\Omega} |\varphi_1(x, y)|^2 dxdy = 1)$ собственная вектор-функция:

$$L(i1)\varphi_1 + \omega_1^2\varphi_1 = 0. \tag{7}$$

Положим $\varphi(x, y) = k\varphi_1(kx, ky)$. Очевидно, что $\varphi(x, y)$ нормировано и удовлетворяет уравнению (5), если $\omega^2 = k^2\omega_1^2$. Считая k волновым числом, придем к дисперсионному соотношению

$$\omega(k) = k\omega_1 \;\Leftrightarrow\; k = k(\omega) = \frac{\omega}{\omega_1}, \tag{8}$$

откуда $\frac{d\omega}{dk} = \omega_1 = const$ и не зависит от частоты, что можно интерпретировать как отсутствие дисперсии у ребároволны. Таким образом, физический смысл ω_1 – скорость ребároволны. Эту скорость мы будем обозначать $v_e (v_e = \omega_1 > 0)$.

3. Предварительные построения

Предполагая, что Фурье преобразования по z компонент вектор-функции $u(x, y, z)$ в смысле обобщенных функций [1] законны, имеем

$$U(x, y, x_0, y_0, k, \omega) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z, x_0, y_0, \omega) e^{-ikz} dz, \tag{9}$$

$$u(x, y, z, x_0, y_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, x_0 . y_0, k, \omega) e^{ikz} dk \tag{10}$$

Не стремящейся к нулю при $z \to \pm\infty$ волне u_e (см. (4)) , будет соответствовать сингулярность по k вектор – функции U. Выясним,что это за сингулярность.

Считая, что ребpayload при $z \geqslant A = \mathrm{const} > 0$ имеет вид (4), где $k = k_0(\omega) = \mathrm{const} > 0$, рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{A}^{+\infty} u_e e^{-ikz} dz = \mathbf{\Psi} \int\limits_{A}^{+\infty} e^{i(k_0-k)z} dz = \mathbf{\Psi} \lim_{B \to +\infty} \int\limits_{A}^{B} e^{(k_0-k)zi} dz$$

$$\mathbf{\Psi}(-i) \frac{e^{i(k_0-k)A}}{k-k_0} = (-i)\mathbf{\Psi} \frac{1}{k-k_0} = \ldots, \tag{11}$$

где точками обозначено регулярное слагаемое. Предел понимается как предел в пространстве Л. Шварца S'. Итак, ребpayload соответствует сингулярность (11), причем функция $\frac{1}{k-k_0}$ при вещественных k понимается как $\lim\limits_{Imk \to -0} \frac{1}{k-k_0}$.

4. Формула для коэффициента возбуждения

Преобразуя по Фурье правую и левую части уравнения (3), мы получим уравнение для U:

$$L(ik)U + \omega^2 U = -\delta(x - x_0, y - y_0)) \frac{\mathbf{m}}{\rho}. \tag{12}$$

U будет также удовлетворять и соответствующим краевым условиям. Вспоминая, что U имеет сингулярность при $k = k_0 = k(\omega) = \frac{\omega}{v_e}$,

---

[1] $u(x, y, z)$ естественно считать ограниченной при $z \to \pm\infty$, поэтому компоненты $u(x, y, z)$ можно считать обобщенными функциями z класса S' Л. Шварца.

описываемую формулой (11), получим при k, близких к $k = k_0 = \frac{\omega}{v_e}$, $k \neq k_0$:

$$\begin{aligned}
&(L(ik) + \omega^2)\left(\frac{-i\boldsymbol{\Psi}}{k - k(\omega)} + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{0}} + (k - k(\omega))\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{1}} + \dots\right) \\
&\qquad = -\delta(x - x_0, y - y_0)\frac{\mathbf{m}}{\rho} \\
&\boldsymbol{\Psi} = \Phi(x_0, y_0)\varphi(x, y)
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $k(\omega) = \frac{\omega}{v_e}$ – такое k, при котором ω^2 является собственным числом оператора $L(ik)$. Напоминаем, что φ – нормированная собственная вектор функция, соответствующая собственному числу $\omega(k) = kv_e$. При $k \to k(\omega)$ в пределе получаем:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to k(\omega)}\left[(-i)\frac{\boldsymbol{\Psi}(\omega^2 - \omega^2(k))}{k - k(\omega)} + (L(ik) + \omega^2(k))\boldsymbol{\Psi}_0\right] \\
&= -\delta(x - x_0, y - y_0)\frac{\mathbf{m}}{\rho}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Пользуясь формулой (8), равенство (14) можно записать в виде:

$$i\varphi 2v_e\omega\boldsymbol{\Psi}(x_0, y_0) + (L(ik) + \omega^2(k))\boldsymbol{\Psi}_0 = -\delta(x - x_0, y - y_0)\frac{\mathbf{m}}{\rho} \tag{15}$$

Умножая (15) скалярно справа на φ, интегрируя по Ω (см. раздел 1), пользуясь нормированностью φ и самосопряженностью оператора $L(ik)$, получаем

$$2iv_e\omega\Phi(x_0, y_0) = -\varphi^*(x_0, y_0)\frac{\mathbf{m}}{\rho}. \tag{16}$$

Звездочка означает комплексное сопряжение.Из соотношения (16) следуют формулы для коэффициента возбуждения:

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{i(\varphi^*, \mathbf{m})}{2v_e\omega\rho} \tag{17}$$

и для для ребровoлны:

$$w = ue^{-i\omega t} = \varphi(x, y)\frac{i(\varphi^*(x_0, y_0), \mathbf{m})}{2v_e\omega\rho}e^{-i\omega(t - \frac{z}{v_e})}, \tag{18}$$

где $\varphi = k\varphi_1(kx, ky)\ \ k = \frac{\omega}{v_e}$.

Литература

1. С. В. Бирюков, Ю. В. Гуляев, В. В. Крылов, В. П. Плесский, *Поверхностные акустические волны в неоднородных средах.* Наука, М., 1991.
2. А. В. Шанин, *Отражение клиновой моды высокого порядка от торца остроугольного упругого клина.* — Акустический ж. **44**, No. 1 (1998), 101–105.
3. А. В. Шанин, *Возбуждение и рассеяние клиновой волны в упругом клине с углом раскрыва, близким к* 180^o. — Акустический ж. **43**, No.3 (1997), 402–408.
4. И. В. Камоцкий, *О поверхностной волне бегущей вдоль ребра упругого клина.* – Алгебра и Анализ **20**, No. 1 (2008), 86–92.
5. P. E. Lagasse, *Analysis of a dispersionfree guides for elastic waves.* — Electron Lett. **8**, No. 15 (1972), 372–373.

Babich V. M. On excitation coefficient of a wave propagating along the edge of an elastic wedge.

The formula for excitation coefficient of a wave, propagating along the edge of an elastic wedge is derived. The source of oscillations is a force concentrated in a point inside of the wedge. The case of harmonic oscillations is considered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия
E-mail: `babich@pdmi.ras.ru`

Поступило 27 октября 2014 г.