Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 425, 2014 г.

Н. В. Растегаев

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С САМОПОДОБНЫМ ВЕСОМ ОБОБЩЕННОГО КАНТОРОВСКОГО ТИПА

§1. Введение

В настоящей работе обобщаются некоторые результаты работ [1] и [2], касающиеся асимптотик спектра задачи

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \tag{1}$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \tag{2}$$

где весовая мера ρ представляет собой обобщенную производную самоподобной функции обобщенного канторовского типа (в частности, ρ сингулярна относительно меры Лебега).

Замечание 1. Хорошо известно, что изменение граничных условий задачи влечет возмущение квадратичной формы ранга два. Из общей вариационной теории (см. [3, §10.3]) потому следует, что считающие функции собственных значений граничных задач, отвечающих одному и тому же уравнению, но разным граничным условиям, не могут различаться более, чем на 2.

Вопрос об асимптотическом поведении собственных значений этой задачи восходит к работам М. Г. Крейна (см., например, [4]).

Из работы [5] следует, что если мера ρ содержит абсолютно непрерывную компоненту, то ее сингулярная составляющая не влияет на главный член асимптотики спектра.

Ключевые слова: самоподобные меры, спектральная асимптотика, спектральная периодичность, спектральная квазипериодичность.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 13-01-00172А), грантом СПбГУ N6.38.64.2012, Лабораторией им. П.Л.Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026), ОАО "Газпром нефть".

В случае чисто сингулярной меры ρ из работы [6] видно, что считающая функция $N : (0, +\infty) \to \mathbb{N}$ собственных чисел краевой задачи для оператора $(-1)^l y^{(2l)}$ допускает оценку $o(\lambda^{\frac{1}{2l}})$ вместо обычной асимптотики $N(\lambda) \sim C\lambda^{\frac{1}{2l}}$ в случае меры, содержащей регулярную составляющую. Для некоторых специальных классов мер в [6] были получены лучшие оценки снизу для собственных чисел.

Точный степенной порядок D роста считающей функции $N(\lambda)$ в случае самоподобной меры ρ был установлен в [7] (см. также более ранние работы [8] и [9], где получены частные результаты, касающиеся классической канторовой лестницы).

В работах [1] и [10] показано, что считающая функция собственных значений задачи (1), (2) имеет при $\lambda \to +\infty$ асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot \big(s(\ln \lambda) + o(1)\big), \tag{3}$$

где s – некоторая зависящая от выбора веса ρ непрерывная периодическая функция, показатель $D \in (0, \frac{1}{2})$. В случае неарифметичности типа самоподобия (см. Определение 2 ниже) канторовой лестницы, производной которой является ρ, функция s вырождается в константу. В случае арифметического самоподобия она имеет период ν, зависящий от параметров лестницы.

В работе [11] этот результат обобщается на случай дифференциального оператора высшего четного порядка, и, кроме того, сформулирована гипотеза о том, что функция s является непостоянной для произвольного неравномерного веса с арифметически самоподобной первообразной.

В работе [12] при помощи компьютерных вычислений доказано, что функция s действительно не может являться постоянной в том простейшем случае, когда обобщённая первообразная веса ρ представляет собой классическую канторову лестницу.

В работе [2] гипотеза была подтверждена для “ровных” лестниц (см. ниже определение 3). Для таких лестниц была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Коэффициент s из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0, \nu] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ – некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

Отсюда утверждение о непостоянстве функции $s(t)$ следует немедленно. Этот результат позднее обобщен в работе [13] на случай уравнения четвертого порядка.

Целью настоящей работы является обобщение этого результата на более широкий класс лестниц, описанный ниже в Теореме 2.

Работа имеет следующую структуру. §2 носит обзорный характер, в нем приводятся необходимые определения самоподобных функций обобщенного канторовского типа, выводятся их свойства и определяются исследуемые классы функций. В §3 устанавливается факт спектральной периодичности для задачи Неймана, аналогичный [2], а также более слабый вариант спектральной "квазипериодичности" для некоторых других краевых задач. Наконец, в 4 доказывается Теорема 1 для выделенного класса лестниц.

§2. Самоподобные функции обобщенного канторовского типа

Пусть $m \geqslant 2$, и $\{I_k = [a_k, b_k]\}_{k=1}^m$ – подотрезки $[0,1]$, не пересекающиеся по внутренности. Обозначим через $S_k(t) = a_k + (b_k - a_k)\,t$ аффинные сжатия $[0,1]$ на I_k, не меняющие ориентации. Введем также набор положительных чисел $\{\rho_k\}_{k=1}^m$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^m \rho_k = 1$.

Определим оператор $\mathcal{S}$, действующий на пространстве $L_\infty(0,1)$ следующим образом:

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{k=1}^m \left(\chi_{I_k}(f \circ S_k^{-1}) + \chi_{\{x>b_k\}}\right)\rho_k.$$

Предложение 1. (см., напр., [14, Лемма 2.1]) $\mathcal{S}$ *– сжимающее отображение на* $L_\infty(0,1)$.

Отсюда по теореме Банаха о неподвижной точке существует (единственная) функция $C \in L_\infty(0,1)$ такая, что $\mathcal{S}(C) = C$.

Определение 1. Такую функцию $C(t)$ будем называть *обобщенной канторовой лестницей* с m ступеньками.

Функцию $C(t)$ можно искать как равномерный предел последовательности $\mathcal{S}^k(f)$ для $f(t) \equiv t$, что позволяет считать ее непрерывной и монотонной, причем $C(0) = 0$, $C(1) = 1$. Производная функции $C(t)$

в смысле обобщенных функций – сингулярная мера ρ без атомов, самоподобная по Хатчинсону (см. [15]), т.е. удовлетворяющая соотношению

$$\rho(E) = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \cdot \rho(S_k^{-1}(E \cap I_k)).$$

Более общие способы построения самоподобных функций описаны в [14].

Определение 2. Самоподобие будем называть *арифметическим*, если логарифмы величин $\rho_k(b_k - a_k)$ соизмеримы.

Определение 3. Будем называть обобщенную канторову лестницу *ровной*, если

$$\forall k = 2, \ldots, m \quad \rho_k = \rho_1 = \frac{1}{m}, \quad b_k - a_k = b_1 - a_1, \quad a_k - b_{k-1} = a_2 - b_1.$$

Именно такой класс лестниц рассмотрен в работе [2].

Основным результатом настоящей работы является следующее обобщение результатов [2].

Теорема 2. *Пусть* $a_1 = 0$, $b_m = 1$, $a_k - b_{k-1} > 0$, *и пусть*

$$\forall k = 1, \ldots, m \quad \rho_k(b_k - a_k) = \tau \tag{4}$$

для некоторой постоянной τ *(в рамках этого условия величины* ρ_k *и* $b_k - a_k$ *могут быть произвольными). Тогда*

$$\forall t \in [0, \nu] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ *– некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.*

Замечание 2. Для описанного класса лестниц показатель D и период функции $s(t)$ определяются следующими соотношениями (общие формулы были получены в [1]):

$$\tau^{-D} = m, \quad \nu = -\ln \tau. \tag{5}$$

§3. Спектральная периодичность

Будем рассматривать формальную граничную задачу

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{6}$$

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0. \tag{7}$$

Ее обобщенным решением называется функция $y \in W_2^1[0,1]$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_0^1 y'\eta'\,dx + \gamma_0 y(0)\eta(0) + \gamma_1 y(1)\eta(1) = \lambda \int_0^1 y\eta\,\rho(dx)$$

для любой функции $\eta \in W_2^1[0,1]$. Подставляя в интегральное тождество функции $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, устанавливаем, что производная y' является первообразной сингулярной меры без атомов $\lambda\rho y$, откуда следует, что $y \in C^1[0,1]$. Кроме того, нам потребуются следующие осцилляционные свойства собственных функций.

Предложение 2. **([16, Утверждение 11])** *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи* (6), (7) *с самоподобным весом. Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *собственное значение* λ_n *является простым, причём любая отвечающая ему собственная функция не обращается в нуль на границе отрезка* $[0,1]$ *и имеет внутри этого отрезка в точности* n *различных нулей.*

В работе [16] в качестве веса в уравнении Штурма-Лиувилля рассматриваются обобщенные функции класса $W_2^{-1}[0,1]$, в частности, Утверждение 11 выполняется для произвольных определенных выше самоподобных мер, а так же для их нетривиальных сужений на подотрезки $[0,1]$.

Докажем теперь основные утверждения этого параграфа.

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений задачи* (1), (2). *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\tau\lambda_{mn} = \lambda_n. \tag{8}$$

Доказательство. Схема доказательства повторяет [2, п.3.1.1]. Зафиксируем отвечающую собственному значению λ_n собственную функцию y_n. Сопоставим ей функцию $z \in C[0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$z = c_k \cdot (y_n \circ S_k^{-1}) \text{ на отрезках } I_k,$$

кроме того, продолжим ее константами на промежуточные отрезки. Не равные нулю величины c_k подбираются таким образом, чтобы совпали значения функции z на концах промежуточных интервалов. Нетрудно видеть, что получившаяся функция непрерывно дифференцируема и удовлетворяет равенству

$$z'(0) = z'(1) = 0.$$

Легко проверить, используя (4), что функция z представляет собой собственную функцию краевой задачи (1), (2), отвечающую собственному значению $\tau^{-1}\lambda_n$. Кроме того, она имеет на отрезке $[0, 1]$ в точности mn корней, что и означает (Предложение 2) выполнение равенства (8). □

Замечание 3. В доказательстве Теоремы 3 не используется условие $a_k - b_{k-1} > 0$, поэтому она верна и в случае лестницы, имеющей пустые промежуточные отрезки.

В [2, п.3.1.2] было получено также соотношение, связывающее собственные числа с номерами n и $m(n+1)-1$ в определенных задачах со смешанными граничными условиями вида (6), (7). В точности аналогичное утверждение в более общем случае не может быть доказано, поэтому мы выведем одностороннюю оценку, которую назовем *спектральной квазипериодичностью*. Зафиксируем функцию y_n, отвечающую собственному значению $\mu_n^{(1)}$ задачи с граничным условием

$$y'(0) - \gamma^{(1)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)} y(1) = 0.$$

Построим функцию z следующим образом. Определим

$$z = c_k \cdot (y_n \circ S_k^{-1}) \text{ на отрезках } I_k,$$

кроме того, продолжим ее гладко[1] линейными функциями на промежуточные отрезки до пересечения с осью абсцисс. Если положить $\gamma^{(1)} = \max\limits_k \left(\frac{2}{|a_{k+1} - b_k|}\right)$, то пересечения окажутся близко к краям I_k, и в серединах промежуточных отрезков функция останется не определена[2]. Мы определим ее нулем на всех оставшихся интервалах. Знаки ненулевых параметров c_k определим таким образом, чтобы на каждом

[1]Здесь и далее в этом параграфе имеется в виду C^1-гладкость.

[2]Длина отрезка до пересечения с осью абсцисс рядом с I_k составляет $|I_k| \cdot (\gamma^{(1)})^{-1}$, что при таком выборе $\gamma^{(1)}$ меньше половины длины любого промежуточного отрезка.

промежуточном отрезке функция z имела смену знака. Согласно соотношению (4) получившаяся функция почти всюду удовлетворяет уравнению (1) для $\mu = \tau^{-1}\mu_n^{(1)}$, но, к сожалению, не является гладкой. Мы проведем с ней некоторое непрерывное преобразование, не увеличивающее значения μ и не меняющее числа перемен знака. В результате мы получим гладкую функцию, являющуюся собственной для некоторой краевой задачи, и сможем написать оценку собственных значений этой краевой задачи через $\mu_n^{(1)}$.

Наше преобразование будет состоять из нескольких шагов. На шаге j функция z склеена из собственных функций краевых задач на подотрезках I_k с некоторыми граничными условиями

$$z'(a_k) - \alpha_j^{(k)} z(a_k) = z'(b_k) + \beta_j^{(k)} z(b_k) = 0$$

и продолжена линейно на промежуточные отрезки. На некоторых промежуточных отрезках z уже гладкая, на остальных кусочно линейна. Мы зафиксируем на краях $\alpha_j^{(1)} = \gamma^{(1)} \cdot |I_1|^{-1}$ и $\beta_j^{(m)} = \gamma^{(1)} \cdot |I_m|^{-1}$ и будем непрерывно изменять остальные значения $\alpha_j^{(k)}$ и $\beta_j^{(k)}$ таким образом, чтобы собственные числа, которым отвечают функции на отрезках I_k оставались одинаковыми, z оставалась гладкой на промежутках, где гладкость уже была достигнута, и $\beta_j^{(k)}$, $\alpha_j^{(k+1)}$ уменьшались на концах промежутков, где гладкости еще нет.[3] Эта процедура уменьшает значение μ в силу вариационного принципа и не меняет числа перемен знака согласно Предложению 2.

В некоторый момент хотя бы на одном из промежуточных отрезков нулевой интервал функции z сожмется в точку. Допустим, это произошло между отрезками I_l и I_{l+1}. В этот момент мы умножаем c_{l+1} и все последующие на общий коэффициент таким образом, чтобы z была гладкой на отрезке $[a_l, b_{l+1}]$.

После $m-1$ шага z станет полностью гладкой. После этого можно уменьшить один из параметров краевых условий на концах, чтобы выполнялось

$$\alpha_m^{(1)} = \beta_m^{(m)} = \gamma^{(2)} := \gamma^{(1)} \cdot \min\{|I_1|^{-1}, |I_m|^{-1}\}.$$

[3]Это оказывается возможным в силу непрерывной и монотонной зависимости собственных значений уравнения от параметра.

Заметим, что получившаяся функция z имеет в точности $m(n+1)-1$ корней, а значит, является собственной функцией, отвечающей собственному числу $\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}$ краевой задачи

$$z'(0)-\gamma^{(2)}z(0)=z'(1)+\gamma^{(2)}z(1)=0.$$

Кроме того, по построению получившееся $\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}$ не превышает исходного значения $\tau^{-1}\mu^{(1)}_n$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Положим*

$$\gamma^{(1)}=\max_k\Big(\frac{2}{|a_{k+1}-b_k|}\Big),$$
$$\gamma^{(2)}=\gamma^{(1)}\cdot\min\{|I_1|^{-1},|I_m|^{-1}\}.$$

Пусть $\{\mu^{(1)}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению (6) *граничной задачи*

$$y'(0)-\gamma^{(1)}y(0)=y'(1)+\gamma^{(1)}y(1)=0,$$

а $\{\mu^{(2)}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$y'(0)-\gamma^{(2)}y(0)=y'(1)+\gamma^{(2)}y(1)=0.$$

Тогда независимо от выбора индекса $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\tau\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}\leqslant\mu^{(1)}_n.$$

§4. Уточнение характеристик спектра

Для доказательства Теоремы 2 нам потребуются следующие факты:

Предложение 3. ([2, Утверждение 4.1.3]) *Пусть $f\in L_2[0,1]$ – ограниченная непостоянная неубывающая функция, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность неубывающих ступенчатых функций, а $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность множеств точек разрыва функций f_n. Пусть также при $n\to\infty$ выполняется асимптотическое соотношение*

$$(\#\mathfrak{A}_n+2)\cdot\|f-f_n\|_{L_2[0,1]}=o(1).$$

Тогда монотонная функция f является чисто сингулярной (т.е. f' сингулярна относительно меры Лебега).

Предложение 4. (**[2, Утверждение 5.2.1]**) *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи с самоподобным весом*

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$
$$y'(0) = y'(1) = 0,$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи*

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0,$$

где $\gamma_0, \gamma_1 \geqslant 0$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln\mu_n - \ln\lambda_n| < +\infty.$$

Замечание 4. Более общие результаты о регуляризованных произведениях собственных значений рассматривались также в [17].

Перейдем к доказательству Теоремы 2.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mu_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\mu_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений уравнения (1), отвечающих граничным условиям

$$\begin{aligned} \lambda_n:&\quad y'(0) = y'(1) = 0,\\ \mu_n^{(1)}:&\quad y'(0) - \gamma^{(1)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)} y(1) = 0,\\ \mu_n^{(2)}:&\quad y'(0) - \gamma^{(2)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(2)} y(1) = 0, \end{aligned}$$

где параметры $\gamma^{(1)}$ and $\gamma^{(2)}$ введены в Теореме 4.

Положим $\sigma_k(t) := m^{-k} N(e^{k\nu+t})$, где N – считающая функция λ_n. Заметим, что из соотношений (3) и (5) следует $\sigma_k(t) = e^{Dt}\big(s(t) + o(1)\big)$ при $k \to +\infty$, а значит при всех $t \in [0,\nu]$ существует предел $\sigma(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k(t)$.

Очевидно, что $\sigma(t)$ монотонна как предел монотонных функций. Утверждение Теоремы 2, таким образом, сводится к утверждению о сингулярности функции $\sigma(t)$.

Докажем, что $\sigma_k(t)$ и $\sigma_{k+1}(t)$ для всех $t \in [0,\nu]$ различаются не более чем на m^{-k}. Действительно, в силу (5) мы имеем

$$|\sigma_k(t) - \sigma_{k+1}(t)| = m^{-k-1} |mN(e^{k\nu+t}) - N(\tau^{-1} e^{k\nu+t})|.$$

Для $\lambda_n < e^{k\nu+t} \leqslant \lambda_{n+1}$ верно $N(e^{k\nu+t}) = n+1$, а из (8) можно увидеть, что $mn + 1 \leqslant N(\tau^{-1}e^{k\nu+t}) \leqslant m(n+1)$. Отсюда значение модуля в правой части не превышает m, и утверждение доказано.

Далее, в силу равенства (8) независимо от выбора индекса $k \in \mathbb{N}$ для всех $t \in [0,\nu]$, удовлетворяющих при некотором $n \in \mathbb{N}$ неравенствам

$$\lambda_{m(n+1)-1} < e^{(k+1)\nu+t} < \lambda_{m(n+1)}, \tag{9}$$

значения функций σ_k и σ_{k+1} совпадают. Оценим меру множества всех прочих t. Если для $t \in [0,\nu]$ не выполняется (9), то для него верно следующее:

$$(k+1)\nu + t \in \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \big[\ln \lambda_{mn}, \ln \lambda_{m(n+1)-1}\big] \Big) \cap [(k+1)\nu, (k+2)\nu].$$

Оценим последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_{m(n+1)-1} - \ln \lambda_{mn}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_{m(n+1)-1} - \ln \mu^{(2)}_{m(n+1)-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln \lambda_{mn}|.$$

Оценим отдельно каждую сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_{m(n+1)-1} - \ln \mu^{(2)}_{m(n+1)-1}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_n - \ln \mu^{(2)}_n| \leqslant C.$$

Здесь первое неравенство получается расширением множества слагаемых, а второе – применением Предложения 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln \lambda_{mn}| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln \lambda_{mn} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln \mu^{(1)}_n - \ln \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \mu^{(1)}_n - \ln \lambda_n| \leqslant C.$$

Здесь первое неравенство следует из Теоремы 4, второе из Предложения 4, равенства верны в силу соотношений

$$\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} > \mu^{(2)}_{mn} > \lambda_{mn}, \quad \mu^{(1)}_n > \lambda_n.$$

Таким образом мы показали, что мера множества

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\left[\ln\lambda_{mn},\ln\lambda_{m(n+1)-1}\right]$$

ограничена, а это значит, что после пересечения с уходящими на бесконечность отрезками $[(k+1)\nu,(k+2)\nu]$ мы получим, что

$$\operatorname{meas}\{t\in[0,\nu]\ :\ \sigma_{k+1}(t)\neq\sigma_k(t)\}=o(1),\quad k\to\infty.$$

Соответственно, справедливы оценки

$$\|\sigma_{k+1}-\sigma_k\|_{L_2[0,\nu]}=o(m^{-k}),$$

а тогда и вытекающая из них асимптотика

$$\|\sigma_k-\sigma\|_{L_2[0,\nu]}=o(m^{-k}).$$

Убедимся, что число точек разрыва функций σ_k допускает при $k\to\infty$ оценку $O(m^k)$. Используя соотношение (8), получим следующее неравенство:

$$m^{k+c}+1=N(\lambda_{m^{k+c}})=N(\tau^{-k-c}\lambda_1)\geqslant N(e^{k\nu+t})$$

для любого целого $c>(1-\nu^{-1}\ln\lambda_1)$. Остается заметить, что число разывов функции $N(\lambda)$ на отрезке не превосходит ее значения на правом конце.

Таким образом, функция σ вместе с последовательностью кусочно постоянных приближений σ_k удовлетворяют всем условиям Предложения 3, что и доказывает утверждение теоремы.

Автор выражает благодарность А. И. Назарову за внимание, проявленное к работе, а также рецензенту за содержательные замечания.

Литература

1. M. Solomyak, E. Verbitsky, *On a spectral problem related to self-similar measures.* — Bull. London Math. Soc. **27**, No. 3. (1995), 242–248.
2. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа.* — Функциональный анализ и его приложения **47**, вып. 4 (2013), 18–29.
3. М. С. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд. “Лань”, 2010.
4. М. Г. Крейн. *Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру.* — ДАН СССР **76**, No. 3 (1951), 345–348.
5. М. С. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов.* — Изв. АН СССР, матем. **34**, No. 6 (1970), 1143–1158.

6. В. В. Борзов. *О количественных характеристиках сингулярных мер.* — Проблемы матем. физики **4** (1970), 42–47.
7. T. Fujita. *A fractional dimention, self-similarity and a generalized diffusion operator.* — Taniguchi Symp. PMMP. Katata. (1985), 83–90.
8. I. Hong, T. Uno. *Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation* $d^2u/dx^2+\lambda\rho(x)u=0$. — Japanese Journ. Math. **29** (1959), 152–164.
9. H. P. McKean, D. B. Ray. *Spectral distribution of a differential operator.* — Duke Math. Journ. **29** (1962), 281–292.
10. J. Kigami, M. L. Lapidus. *WeylTs problem for the spectral distributions of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals.* — Comm. Math. Phys. **158** (1991), 93–125.
11. А. И. Назаров. *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры.* Зап. науч. семин. ПОМИ **311** (2004), 190–213.
12. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом.* — Матем. сборник **197**, No. 11 (2006), 13–30.
13. А. А. Владимиров. *Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвёртого порядка с самоподобным весом.* `arxiv:1107.4791`
14. И. А. Шейпак. *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$.* — Матем. заметки **81**, No. 6 (2007), 924–938.
15. J. E. Hutchinson. *Fractals and self similarity.* — Indiana Univ. Math. J. **30**, No. 5 (1981), 713–747.
16. А. А. Владимиров. *К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами.* — Журнал выч. матем. и матем. физ. **49**, No. 9 (2009), 1609–1621.
17. А. И. Назаров. *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций.* — Теория вероятностей и ее применения **54**. No. 2 (2009), 209–225.

Rastegaev N. V. On spectral asymptotics of the Neumann problem for the Sturm–Liouville equation with self-similar generalized Cantor type weight.

Spectral asymptotics of the weighted Neumann problem for the Sturm-Liouville equation is considered. The weight is assumed to be the distributional derivative of a self-similar generalized Cantor type function. The spectrum is shown to have a periodicity property for a wide class of Cantor type self-similar functions. The weaker "quasi-periodicity" property is demonstrated under certain mixed boundary value conditions. This allows for a more precise description of the main term of the eigenvalue counting function asymptotics. Previous results by A. A. Vladimirov and I. A. Sheipak are generalized.

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева
199178, 14 линия В.О., дом 29Б;
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия, Санкт-Петербург
E-mail: rastmusician@gmail.com

Поступило 5 августа 2014 г.