Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 425, 2014 г.

А. Прохоров, Н. Филонов

РЕГУЛЯРНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

0.1. Функциональные пространства. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, в которой заданы измеримые (3×3)-матричнозначные функции ε и μ. Функции ε и μ описывают диэлектрическую и магнитную проницаемости среды, заполняющей область. Мы предполагаем, что они вещественны, положительно определены и ограничены:

$$\begin{gathered}\varepsilon(x)=\overline{\varepsilon(x)}, \quad \mu(x)=\overline{\mu(x)},\\ 0<\varepsilon_0\mathbb{1}\leqslant\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon_1\mathbb{1}\,, \quad 0<\mu_0\mathbb{1}\leqslant\mu(x)\leqslant\mu_1\mathbb{1}\,.\end{gathered} \tag{0.1}$$

При изучении электромагнитных волн в области Ω возникают гильбертовы пространства

$$F(\Omega,s)=\{u\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3):\operatorname{rot}u,\operatorname{div}(su)\in L_2\}, \quad s=\varepsilon \text{ или } \mu,$$

снабженные нормой

$$\|u\|^2_{F(\Omega,s)}=\|\operatorname{rot}u\|^2_{L_2}+\|\operatorname{div}(su)\|^2_{L_2}+(su,u)_{L_2}.$$

В этих пространствах выделяются подпространства функций, удовлетворяющих граничным условиям идеальной проводимости,

$$F(\Omega,\varepsilon,\tau)=\{E\in F(\Omega,\varepsilon):\,E_\tau|_{\partial\Omega}=0\},$$

$$F(\Omega,\mu,\nu)=\{H\in F(\Omega,\mu):\,(\mu H)_\nu|_{\partial\Omega}=0\}.$$

Здесь символы τ и ν обозначают касательную и нормальную компоненты вектора на границе $\partial\Omega$; условия

$$E_\tau|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{и} \quad (\mu H)_\nu|_{\partial\Omega}=0 \tag{0.2}$$

понимаются в смысле интегральных тождеств.

Ключевые слова: область определения оператора Максвелла, выпуклые области, условие внешнего шара.

Первый автор поддержан грантом НИР СПбГУ 0.38.237.2014, второй – грантом РФФИ 14-01-00306.

Определение 0.1. *Пусть* $w \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$, $\operatorname{rot} w \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$. *Равенство* $w_\tau|_{\partial\Omega} = 0$ *означает*

$$\int\limits_\Omega \langle w, \operatorname{rot} h\rangle dx = \int\limits_\Omega \langle \operatorname{rot} w, h\rangle dx \quad \forall\ h \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} h \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3).$$

Здесь $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$.

Определение 0.2. *Пусть* $w \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$, $\operatorname{div} w \in L_2(\Omega)$. *Равенство* $w_\nu|_{\partial\Omega} = 0$ *означает*

$$\int\limits_\Omega \langle w, \nabla\varphi\rangle dx = -\int\limits_\Omega \operatorname{div} w\, \overline{\varphi} dx \quad \forall\ \varphi \in W_2^1(\Omega).$$

Замечание 0.3. Если $\partial\Omega$ липшицева и $w \in W_2^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$, то эти определения равенств $w_\tau|_{\partial\Omega} = 0$ и $w_\nu|_{\partial\Omega} = 0$ эквивалентны определениям в смысле теории следов.

При

$$\varepsilon, \mu \in W_3^1(\Omega) \tag{0.3}$$

введем подпространства пространства Соболева с соответствующими граничными условиями

$$W_2^1(\Omega, \tau) = \{u \in W_2^1(\Omega, \mathbb{C}^3) : u_\tau|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$W_2^1(\Omega, \mu, \nu) = \{v \in W_2^1(\Omega, \mathbb{C}^3) : (\mu v)_\nu|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Условия (0.1) и (0.3) для областей с липшицевой границей гарантируют импликацию

$$u \in W_2^1(\Omega) \quad \Rightarrow \quad su \in W_2^1(\Omega),$$

и следовательно,

$$W_2^1(\Omega, \tau) \subset F(\Omega, \varepsilon, \tau), \quad W_2^1(\Omega, \mu, \nu) \subset F(\Omega, \mu, \nu).$$

Нашей целью является доказательство совпадения этих пространств

$$F(\Omega, \varepsilon, \tau) = W_2^1(\Omega, \tau), \quad F(\Omega, \mu, \nu) = W_2^1(\Omega, \mu, \nu) \tag{0.4}$$

в областях, локально $(W_3^2 \cap W_\infty^1)$-диффеоморфных выпуклым областям (см. ниже определение 0.6).

0.2. Оператор Максвелла. В пространстве $L_2(\Omega, \mathbb{C}^6; \varepsilon, \mu)$ с нормой

$$\left\| \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \right\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^6;\varepsilon,\mu)} = \int\limits_\Omega \left(\langle \varepsilon E, E\rangle + \langle \mu H, H\rangle \right) dx$$

выделим подпространство

$$J = \left\{ E \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{div}(\varepsilon E) = 0 \right\} \\ \oplus \left\{ H \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{div}(\mu H) = 0, (\mu H)_\nu \big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Оператор Максвелла действует в пространстве J по формуле

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \\ -i\mu^{-1} \operatorname{rot} E \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

на области определения

$$\operatorname{Dom} \mathcal{M} = \left\{ E \in F(\Omega, \varepsilon, \tau) : \operatorname{div}(\varepsilon E) = 0 \right\} \\ \oplus \left\{ H \in F(\Omega, \mu, \nu) : \operatorname{div}(\mu H) = 0 \right\}.$$

Здесь E и H – электрическая и магнитная компоненты поля, подчиненные условиям соленоидальности

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = \operatorname{div}(\mu H) = 0 \tag{0.6}$$

и граничным условиям идеальной проводимости (0.2). Легко показать (см. [4]), что оператор Максвелла самосопряжен, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$. Также рассматривают “сильный” оператор Максвелла $\mathcal{M}_s$, заданный тем же выражением (0.5) на области определения

$$\operatorname{Dom} \mathcal{M}_s = \left\{ E \in W_2^1(\Omega, \tau) : \operatorname{div}(\varepsilon E) = 0 \right\} \\ \oplus \left\{ H \in W_2^1(\Omega, \mu, \nu) : \operatorname{div}(\mu H) = 0 \right\}.$$

Хорошо известно, что “сильный” оператор Максвелла не всегда совпадает со “слабым”: если область Ω – многогранник, у которого есть входящее ребро, $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$, то сильный оператор $\mathcal{M}_s$ симметричен, но не самосопряжен и имеет бесконечные индексы дефекта.

Кроме операторов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_s$ рассматривают расширенный оператор Максвелла $\mathcal{L}$. Он действует в пространстве $L_2(\Omega, \mathbb{C}^8; \varepsilon, \mu)$ с нормой

$$\|X\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^8;\varepsilon,\mu)} = \int\limits_\Omega \left(\langle \varepsilon E, E\rangle + |\varphi|^2 + \langle \mu H, H\rangle + |\eta|^2 \right) dx, \quad X = \begin{pmatrix} E \\ \varphi \\ H \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{L}$ определяется формулами

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\varepsilon^{-1}\,\mathrm{rot} & i\nabla \\ 0 & 0 & -i\,\mathrm{div}(\mu\cdot) & 0 \\ -i\mu^{-1}\,\mathrm{rot} & -i\nabla & 0 & 0 \\ i\,\mathrm{div}(\varepsilon\cdot) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{0.7}$$

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} E \\ \varphi \\ H \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon^{-1}\,\mathrm{rot}\, H + i\nabla\eta \\ -i\,\mathrm{div}(\mu H) \\ -i\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\, E - i\nabla\varphi \\ i\,\mathrm{div}(\varepsilon E) \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\mathrm{Dom}\,\mathcal{L} = F(\Omega,\varepsilon,\tau) \oplus W_2^1(\Omega,\mathbb{C}) \oplus F(\Omega,\mu,\nu) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega,\mathbb{C}).$$

Легко видеть, что оператор $\mathcal{L}$ также самосопряжен, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$.

Подпространство

$$\big\{E \in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3) : \mathrm{div}(\varepsilon E) = 0\big\} \oplus \big\{0\big\} \\ \oplus \big\{H \in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3) : \mathrm{div}(\mu H) = 0, (\mu H)_\nu\big|_{\partial\Omega} = 0\big\} \oplus \big\{0\big\}$$

приводит оператор $\mathcal{L}$, и сужение оператора $\mathcal{L}$ на это подпространство унитарно эквивалентно оператору $\mathcal{M}$. Функции из $\mathrm{Dom}\,\mathcal{L}$ допускают умножение на гладкую срезку, а условия соленоидальности (0.6) при умножении на срезку нарушаются, поэтому с оператором $\mathcal{L}$ работать удобнее.

“Сильный” оператор $\mathcal{L}_s$ определяется выражением (0.7) на области определения

$$\mathrm{Dom}\,\mathcal{L}_s = W_2^1(\Omega,\tau) \oplus W_2^1(\Omega,\mathbb{C}) \oplus W_2^1(\Omega,\mu,\nu) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega,\mathbb{C}).$$

Оператор $\mathcal{L}_s$, в отличие от $\mathcal{M}_s$, является эллиптическим. Мы покажем (см. ниже теорему 1.1), что в областях, локально $(W_3^2 \cap W_\infty^1)$-диффеоморфных выпуклым областям, при условиях (0.1) и (0.3) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_s$, и следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$ и выполнено (0.4).

0.3. Области. Опишем классы рассматриваемых областей.

Определение 0.4. *Область $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ называется специальной липшицевой областью, если*

$$\Lambda = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \phi(x')\},$$

где $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ – липшицева функция,

$$|\phi(x') - \phi(y')| \leqslant K|x' - y'| \quad \forall\, x', y' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

K – константа Липшица области Λ.

Определение 0.5. *Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется областью с липшицевой границей, если для каждой точки $x \in \partial\Omega$ существует окрестность D точки x и специальная липшицева область Λ, такие что $D \cap \Omega = D \cap \Lambda$.*

Определение 0.6. *Пусть $X(D, \mathbb{R}^n)$ – некоторое пространство функций, заданных в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathcal{C}(X)$, если для каждой точки $x \in \partial\Omega$ существует окрестность U точки x, биекция*

$$\psi : U \to \widetilde{U}, \quad \psi \in X(U), \quad \psi^{-1} \in X(\widetilde{U}),$$

и специальная липшицева область V, такие что $\psi(U \cap \Omega) = \widetilde{U} \cap V$ и множество $\widetilde{U} \cap V$ выпукло.

Ясно, что выпуклые области и области с границей класса X принадлежат $\mathcal{C}(X)$.

Далее, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \partial\Omega$. Обозначим $B_R(x)$ шар радиуса R с центром в точке x. Положим

$$R(x) = \sup\{R : \exists\, z \in \mathbb{R}^n \text{ такая, что } |x - z| = R, \ \ B_R(z) \cap \Omega = \emptyset\}$$

– наибольший радиус шара, которым можно коснуться точки x снаружи области, если такие шары существуют, и $R(x) = 0$, если их не существует.

Определение 0.7. *Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию внешнего шара (в дальнейшем – УВШ), если*

$$R(\Omega) := \inf_{x \in \partial\Omega} R(x) > 0.$$

Примеры:

- Любая выпуклая область Ω удовлетворяет УВШ; при этом $R(\Omega) = +\infty$.
- Любая ограниченная область с C^2-гладкой границей удовлетворяет УВШ.
- Угол на плоскости, описываемый в полярных координатах формулой $\Omega = \{(\rho, \theta) : \theta \in (\pi/2, 2\pi)\}$ не удовлетворяет УВШ, так как $R(0) = 0$.

Оказывается, что условие внешнего шара можно описать в терминах диффеоморфизмов.

Теорема 0.8. *Для ограниченных областей с липшицевой границей УВШ равносильно принадлежности классу* $\mathcal{C}(C^2)$.

Мы докажем эту теорему в §2.1.

Благодарности. Авторы благодарят А. И. Назарова за содержательные комментарии к работе.

§1. Регулярность электромагнитных полей

1.1. Формулировка результата.

Теорема 1.1. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathcal{C}(W_3^2 \cap W_\infty^1)$. *Пусть матрицы-функции* ε, μ *удовлетворяют условиям* (0.1) *и* (0.3). *Тогда "слабые" операторы Максвелла совпадают с "сильными",* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_s$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$, *выполняются равенства* (0.4) *и оценки*

$$\begin{aligned} \|E\|_{W_2^1} &\leqslant C\|E\|_{F(\Omega,\varepsilon)} \quad \forall\ E \in F(\Omega,\varepsilon,\tau), \\ \|H\|_{W_2^1} &\leqslant C\|H\|_{F(\Omega,\mu)} \quad \forall\ H \in F(\Omega,\mu,\nu). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Тем самым, F*-норма и* W_2^1*-норма в этих пространствах эквивалентны.*

Замечание 1.2. Под условия теоремы подпадают ограниченные области с липшицевой границей, удовлетворяющие УВШ (см. теорему 0.8). Наш класс $\mathcal{C}(W_3^2 \cap W_\infty^1)$ шире. Например, область

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : -|x'|^{3/2} < x_3 < 1 - |x'|^{3/2}, |x'| < 1\}$$

не удовлетворяет УВШ, так как $R(0) = 0$, но принадлежит $\mathcal{C}(W_3^2 \cap W_\infty^1)$; в качестве ψ можно взять отображение $(x', x_3) \to (x', x_3 + |x'|^{3/2})$.

Замечание 1.3. Условия на коэффициенты ε, μ и границу $\partial\Omega$ можно немного расширить. Как будет видно из доказательства, от коэффициентов достаточно потребовать выполнения (0.1) и следующего условия в духе теории мультипликаторов (см. [17]): *для любого положительного* δ *существует такое число* $C(\delta)$, *что*

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega |\partial_j s|^2 |u|^2 dx \leqslant \delta\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + C(\delta)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ u \in W_2^1(\Omega),\ s = \varepsilon \text{ или } \mu. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Для $s \in W_3^1(\Omega)$ условие (1.2) выполнено (см. ниже лемму 3.2). От диффеоморфизмов ψ, локально переводящих область Ω в выпуклую область, достаточно потребовать $\psi \in W^1_\infty$ и выполнения условия (1.2) для $s = \nabla\psi$.

Для простоты мы сформулировали и докажем теорему 1.1 только для ограниченных областей. Из доказательства ясно, что ее можно распространить на неограниченные области при соответствующей модификации условий на коэффициенты. Выделим случай оператора с периодическими коэффициентами в бесконечном цилиндре.

Теорема 1.4. *Пусть $\Omega = U \times \mathbb{R}$ – цилиндр, $U \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, $U \in \mathcal{C}(W^2_p)$, $p > 2$. Пусть ε, μ удовлетворяют* (0.1), *периодичны по направлению вдоль оси цилиндра с периодом a и $\varepsilon, \mu \in W^1_3(U \times [0, a])$. Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_s$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$ и выполняются соотношения* (0.4) *и* (1.1).

Замечание 1.5. Условия на границу области расширились до $\mathcal{C}(W^2_p)$, $p > 2$, поскольку соответствующие диффеоморфизмы зависят только от двух переменных; легко видеть, что если $s = s(x_1, x_2)$, $s \in W^1_p(U)$, $p > 2$, то условие (1.2) для $\Omega = U \times [0, a]$ выполняется.

1.2. Комментарии. Оператор Максвелла естественно также рассматривать на многообразиях произвольной размерности, см., например, [7,23]. В настоящей работе мы рассматриваем только случай области в $\mathbb{R}^3$.

Неравенства (1.1) при $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$, записанные на языке дифференциальных форм, известны как неравенства Гаффни-Фридрихса. Они были доказаны (без связи с оператором Максвелла) соответственно Гаффни для многообразий без края [11] и Фридрихсом в случае гладких многообразий с краем [10]. Следует отметить, что из неравенств (1.1), проверенных только для полей из W^1_2, *не вытекает* совпадение пространств (0.4): например, в многогранниках с входящими ребрами (1.1) выполнено при $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$, а (0.4) – нет.

Не претендуя на полноту обзора, приведем некоторые известные результаты для ограниченных областей. R. Leis в 1968 г. доказал [16] равенства (0.4) при $\partial\Omega \in C^3$, $\varepsilon, \mu \in C^5(\overline{\Omega})$. J. Gobert в 1971 г. получил [12] результат (в многомерном случае) при $\partial\Omega \in C^2$, $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$, а C. Weber в 1981 г. [22] – при $\partial\Omega \in C^2$, $\varepsilon, \mu \in C^1(\overline{\Omega})$ (см. также следующий пункт). В 1982 г. J. Saranen доказал [20] “электрическое” равенство (0.4) для случая выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ при $\varepsilon \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$. “Магнитное” равенство (0.4) для выпуклых областей было установлено F. Kikuchi и S. Kaizu [14] в 1986 г. при $\mu = \mathbb{1}$. M. Mitrea в 2001 г. установил (0.4) для липшицевых областей, удовлетворяющих УВШ, при $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$ [18]. В недавней работе [1] G. Alberti и Y. Capdeboscq исследовали регулярность решений системы Максвелла с несамосопряженными ε и μ. В частности, они установили равенства (0.4) в ограниченных областях с $C^{2,1}$-гладкой границей при следующих условиях на коэффициенты:

$$\varepsilon + \varepsilon^* \geqslant \varepsilon_0 \mathbb{1} > 0, \quad \mu + \mu^* \geqslant \mu_0 \mathbb{1} > 0, \qquad \varepsilon, \mu \in W_p^1(\Omega), \ p > 3.$$

Таким образом, можно считать, что "электрический" случай теоремы 1.1 был известен. Наоборот, "магнитный" случай для переменных коэффициентов μ в выпуклой области разобран не был. Для удобства мы приведем единое доказательство обоих случаев.

Отметим также, что активно изучался вопрос о компактности вложений

$$F(\Omega, \varepsilon, \tau) \subset L_2(\Omega) \quad \text{и} \quad F(\Omega, \mu, \nu) \subset L_2(\Omega).$$

Тогда работает фредгольмова теория разрешимости соответствующих задач, и спектры соответствующих операторов дискретны. Если выполнено (0.4), то вложения, разумеется, компактны. Но компактность этих вложений имеет место уже на произвольных липшицевых многообразиях с краем (см. [19] и цитируемую там литературу).

1.3. Результат в гладкой области. В этом пункте мы следуем работам [2, 4]. Введем пространства градиентов решений скалярных эллиптических задач

$$E(\Omega, \varepsilon, \tau) = \{\nabla\varphi : \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \ \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) \in L_2(\Omega)\},$$

$$E(\Omega, \mu, \nu) = \{\nabla\eta : \eta \in W_2^1(\Omega), \ \operatorname{div}(\mu\nabla\eta) \in L_2(\Omega), \, (\mu\nabla\eta)_\nu|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Эти пространства являются подпространствами $F(\Omega, \varepsilon, \tau)$ и $F(\Omega, \mu, \nu)$ соответственно. Для ограниченных областей с липшицевой границей имеет место разложение

$$F(\Omega, \varepsilon, \tau) = W_2^1(\Omega, \tau) + E(\Omega, \varepsilon, \tau). \tag{1.3}$$

В [2] оно доказано при $\varepsilon = \mathbb{1}$, но доказательство проходит без изменений для $\varepsilon \in W_3^1(\Omega)$.

Аналогичное разложение для магнитных полей

$$F(\Omega, \mu, \nu) = W_2^1(\Omega, \mu, \nu) + E(\Omega, \mu, \nu) \tag{1.4}$$

выполняется не всегда. В [3] оно показано при $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$ для "областей с ребрами и вершинами"; точное описание класса областей см. в [3]; он включает в себя все области, C^2-диффеоморфные многогранникам. В работе [9] (1.4) было показано в случае $\partial\Omega \in C^{3/2+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, $\mu \in W_3^1(\Omega)$. Там же была построена область Ω с границей класса $C^{3/2}$, в которой равенство (1.4) не выполняется (при $\mu = \mathbb{1}$). Отметим также, что равенства (1.3), (1.4) имеют место для "областей с экранами" [5,8].

Если выполнено равенство (1.3) (соотв. (1.4)), то возможные особенности функций из класса $F(\Omega, \varepsilon, \tau)$ (соотв. $F(\Omega, \mu, \nu)$) сводятся к особенностям функций из $E(\Omega, \varepsilon, \tau)$ (соотв. $E(\Omega, \mu, \nu)$), то есть градиентов решений задачи Дирихле (соотв. Неймана) для скалярного эллиптического уравнения второго порядка с правой частью из $L_2(\Omega)$. Скалярные эллиптические задачи хорошо изучены. Сильная разрешимость известна и для гладких областей, и для выпуклых, и более общо, для областей класса $\mathcal{C}(W_3^2 \cap W_\infty^1)$ в нашей терминологии (см. [15] и [13])[1]. Из сильной разрешимости скалярных задач следуют включения

$$E(\Omega, \varepsilon, \tau) \subset W_2^1(\Omega, \tau) \quad \text{и} \quad E(\Omega, \mu, \nu) \subset W_2^1(\Omega, \mu, \nu)$$

при $\varepsilon, \mu \in W_3^1(\Omega)$. Из этих результатов, в частности, вытекает

Теорема 1.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, $\partial\Omega \in C^2$, $\varepsilon, \mu \in W_3^1(\Omega)$ удовлетворяют* (0.1). *Тогда выполняются равенства* (0.4) *и оценки* (1.1).

1.4. План работы. При помощи локализации и допустимых диффеоморфизмов мы сводим доказательство теоремы 1.1 к случаю специальной липшицевой области. В рассмотрении этого случая мы следуем идеологии статьи [18]: модельные области приближаются гладкими (§2), в гладких областях доказываются равномерные априорные оценки (§4), где ключевую роль играет алгебраическая лемма 3.1 (§3). Отметим, что нам недостаточно оценки (1.1), установленной в теореме 1.6 для гладких областей. Нужна оценка *равномерная* по номеру гладкой области, приближающей выпуклую негладкую область. Наконец, в §5 из априорных оценок выводится теорема 1.1.

§2. Классы областей

2.1. Области, удовлетворяющие условию внешнего шара.

[1]Собственно, аналогия со скалярными уравнениями второго порядка и стимулировала нашу уверенность в том, что в выпуклых областях "слабый" оператор Максвелла совпадает с "сильным".

Лемма 2.1. *Пусть* Ω *– специальная липшицева область,*

$$\Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \phi(x')\}, \tag{2.1}$$

$$|\phi(x_1') - \phi(x_2')| \leqslant K|x_1' - x_2'| \quad \forall\ x_1', x_2' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.2}$$

Если Ω *удовлетворяет УВШ на участке границы* $\partial\Omega \cap \{x = (x', x_n) : |x'| < \rho\}$, *то существуют положительные константы* ϵ_0, C_0, *такие что*

$$\begin{gathered} \phi(y+z) + \phi(y-z) - 2\phi(y) \geqslant -C_0|z|^2 \\ \forall\ y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| < \rho, \quad \forall\ z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z| < \epsilon_0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Доказательство. Фиксируем $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|y| < \rho$. Пусть (p, q) – центр шара радиуса $R = R(\Omega)$, касающегося снаружи области Ω в точке $(y, \phi(y))$,

$$|y-p|^2 + (\phi(y) - q)^2 = R^2. \tag{2.4}$$

Этот внешний шар лежит вне конуса

$$\big\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \phi(y) + K|x' - y|\big\}.$$

Следовательно, $\frac{|y-p|}{\phi(y)-q} \leqslant K$ и

$$\phi(y) - q \geqslant \frac{R}{\sqrt{1+K^2}}\,. \tag{2.5}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \phi(y+z) - q &\geqslant \sqrt{R^2 - |y+z-p|^2} \\ &= \sqrt{R^2 - |y-p|^2}\left(1 - \frac{2\langle z, y-p\rangle}{R^2 - |y-p|^2} - \frac{z^2}{R^2 - |y-p|^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая (2.4) и формулу Тейлора

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + O(\alpha^3), \quad \alpha \to 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \phi(y+z) - q \geqslant \phi(y) - q &- \frac{\langle z, y-p\rangle}{\phi(y) - q} - \frac{z^2}{2(\phi(y) - q)} \\ &- \frac{\langle z, y-p\rangle^2}{2(\phi(y)-q)^3} + O(|z|^3), \quad z \to 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выберем $\epsilon > 0$ так, чтобы было

$$\frac{\left|2\langle z, y-p\rangle + z^2\right|}{(\phi(y)-q)^2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{при } |z| \leqslant \epsilon;$$

в силу (2.5) такое ϵ можно выбрать не зависящим от y. При таком выборе постоянная в знаке O в формуле (2.6) равномерна по $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|y| < \rho$. Складывая формулы (2.6) для векторов z и $-z$, получим

$$\begin{aligned}\phi(y+z) + \phi(y-z) - 2\phi(y) &\geqslant -\frac{z^2}{\phi(y)-q} - \frac{\langle z, y-p\rangle^2}{(\phi(y)-q)^3} + O(|z|^3)\\ &\geqslant -C_0|z|^2 \quad \text{при } |z| \leqslant \epsilon_0\end{aligned}$$

при достаточно малом ϵ_0. □

Лемма 2.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $0 \in \partial\Omega$,*

$$\hat{B} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'|^2 + |x_n - R|^2 < R^2\} \subset B_1(0),$$

и $\hat{B} \cap \Omega = \emptyset$. Пусть $\psi : B_1(0) \to U$ – C^2-диффеоморфизм. Тогда в множестве U содержится шар $\widetilde{B}$ радиуса a, не пересекающийся с $\psi(\Omega \cap B_1(0))$. При этом $\psi(0) \in \partial\widetilde{B}$, а радиус a зависит только от R и от $\|\psi^{-1}\|_{C^2(U)}$.

Доказательство. Обозначим новые переменные $y = \psi(x)$, $x = \psi^{-1}(y)$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$x(0) = 0, \quad \frac{\partial x_n}{\partial y_i}(0) = 0,\ i = 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial x_n}{\partial y_n}(0) > 0. \tag{2.7}$$

Покажем, что при достаточно малом a выполнено

$$(y_n - a)^2 + |y'|^2 < a^2 \quad \Rightarrow \quad (x_n - R)^2 + |x'|^2 < R^2. \tag{2.8}$$

Поскольку диффеоморфизм ψ^{-1} действует в ограниченном множестве U, и выполнено (2.7), имеем

$$|x| \leqslant c_1|y| \quad \text{и} \quad x_n \geqslant \gamma y_n - c_2|y|^2, \quad \gamma > 0.$$

Подставляя эти оценки в (2.8), получаем, что нам достаточно установить импликацию

$$|y|^2 < 2ay_n \quad \Rightarrow \quad -2R\gamma y_n + (2Rc_2 + c_1^2)|y|^2 < 0.$$

Это выполняется при $a < \dfrac{R\gamma}{2Rc_2 + c_1^2}$. □

Доказательство теоремы 0.8. Пусть Ω – липшицева область, удовлетворяющая УВШ, $x_0 \in \partial\Omega$. Пусть D и Λ – окрестность точки x_0 и специальная липшицева область из определения 0.5 соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$, $D = B_{2\rho}(0)$. По лемме 2.1 функция ϕ, определяющая Λ, удовлетворяет (2.3) с некоторыми C_0 и ϵ_0. Рассмотрим C^2-диффеоморфизм $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\psi : (x', x_n) \mapsto (y', y_n) = (x', x_n + \xi(x')),$$

где ξ – гладкая функция x', $\xi(x') = C_0|x'|^2$ при $|x'| < \rho$, и удовлетворяющая условию Липшица на всем $\mathbb{R}^{n-1}$. Область $\psi(\Lambda)$ – специальная липшицева область, которая описывается функцией $\widetilde{\phi}$, удовлетворяющей неравенству

$$\begin{gathered}\widetilde{\phi}(y' + z) + \widetilde{\phi}(y' - z) - 2\widetilde{\phi}(y') \geqslant 0 \\ \forall\, y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y'| < \rho, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z| < \epsilon_0.\end{gathered}$$

Тем самым, множество $\psi(\Lambda) \cap B_r(0)$, $r < \rho$, выпукло, и в качестве V и U из определения 0.6 можно взять соответственно $\psi(\Lambda)$ и $\psi^{-1}(B_r(0))$ при достаточно малом r. Следовательно, $\Omega \in \mathcal{C}(C^2)$.

Установим обратное включение. Поскольку выпуклые области удовлетворяют УВШ, из леммы 2.2 вытекает, что для области класса $\mathcal{C}(C^2)$ в каждой точке границы существует внешний шар, и его радиус можно выбрать не зависящим от точки. $\square$

Замечание 2.3. Фактически мы также показали, что класс областей с липшицевой границей, удовлетворяющих УВШ, совпадает с $\mathcal{C}(C^\infty)$.

2.2. Приближение выпуклых областей гладкими.

Теорема 2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – специальная липшицева область* (2.1), (2.2), *и множество*

$$\Omega \cap \{x = (x', x_n) : |x'| < 2\rho\}$$

выпукло. Тогда существует семейство вложенных специальных липшицевых областей $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ класса C^∞, таких что

1) *Области Ω_α описываются формулами*

$$\Omega_\alpha = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \phi_\alpha(x')\}, \tag{2.9}$$

причем

$$|\phi_\alpha(x_1') - \phi_\alpha(x_2')| \leqslant K|x_1' - x_2'| \ \ \forall\, x_1', x_2',$$

$\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1)} \Omega_\alpha = \Omega$, *и области $\Omega_\alpha \cap \{x = (x', x_n) : |x'| < \rho\}$ – выпуклые.*

2) *Существуют операторы продолжения*

$$P_\alpha : W_2^1(\Omega_\alpha) \to W_2^1(\mathbb{R}^n), \quad \|P_\alpha\| \leqslant C_1,$$

причем $\|\nabla(P_\alpha u)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\alpha)}$ *при всех* $u \in W_2^1(\Omega_\alpha)$.

3) *При* $n > 2$

$$\|u\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\alpha)} \leqslant C_2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\alpha)} \quad \forall\ u \in W_2^1(\Omega_\alpha).$$

Константы C_1, C_2 *не зависят от* α.

Замечание 2.5. Теорема 2.4 заимствована из [18], где получен её аналог в более общем случае специальной липшицевой области, удовлетворяющей УВШ. Нам достаточно случая выпуклых областей. Для полноты изложения мы приводим соответствующее доказательство.

Доказательство. Пусть

$$\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \operatorname{supp} \omega \subset B_\rho(0), \quad \omega(x') \geqslant 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(x')\, dx' = 1.$$

Функции ϕ_α определим как усреднения функции ϕ, сдвинутые на константу:

$$\phi_\alpha(x') = M\alpha + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(z')\varphi(x' - \alpha z')\, dz', \tag{2.10}$$

где $M > K \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(z')|z'|\, dz'$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\alpha(x')}{\partial \alpha} &= M - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(z')\langle z', \nabla\varphi(x' - \alpha z')\rangle dz' \\ &\geqslant M - K \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(z')|z'|\, dz' > 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Области Ω_α определим формулой (2.9).

1) Ясно, что

$$\begin{aligned} |\phi_\alpha(x_1') - \phi_\alpha(x_2')| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(z')\left(\phi(x_1' - \alpha z') - \phi(x_2' - \alpha z')\right) dz' \right| \\ &\leqslant K|x_1' - x_2'|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Из определения (2.10) вытекает, что

$$\phi_\alpha(x'+y')+\phi_\alpha(x'-y')-2\phi_\alpha(x') \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(z')\left(\phi(x'+y'-\alpha z')+\phi(x'-y'-\alpha z')-2\phi(x'-\alpha z')\right)dz' \geqslant 0$$

при всех x', y', таких что $x' \pm y' \in B_\rho$, то есть функции ϕ_α выпуклые в B_ρ.

Из (2.11) и стремления $\phi_\alpha(x') \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \phi(x')$ вытекает, что области Ω_α вложены друг в друга и вместе исчерпывают Ω, $\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1)} \Omega_\alpha = \Omega$.

2) Хорошо известно (см. [21]), что для специальных липшицевых областей существует оператор продолжения $P_\alpha : W_2^1(\Omega_\alpha) \to W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $\|P_\alpha\| \leqslant C_1$, причем выполняется оценка $\|\nabla(P_\alpha u)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\alpha)}$, и постоянная C_1 зависит только от константы Липшица области Ω_α. Остается сослаться на (2.12).

3) По неравенству Соболева имеем

$$\|u\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\alpha)} \leqslant \|P_\alpha u\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla(P_\alpha u)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ \leqslant CC_1\|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\alpha)} \quad \forall\, u \in W_2^1(\Omega_\alpha). \ \square$$

§3. Вспомогательные утверждения

3.1. Алгебраическая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть B – самосопряженная (3×3)-матрица,*

$$0 < \beta_0 \mathbb{1} \leqslant B \leqslant \beta_1 \mathbb{1}\,,$$

U – произвольная (3×3)-матрица. Тогда

$$\operatorname{tr}(BU\overline{BU}) + \beta_1^2\left(\operatorname{tr}(UU^*) - \operatorname{tr}(U\overline{U})\right) \geqslant \beta_0^2 \operatorname{tr}(UU^*). \tag{3.1}$$

Доказательство. Матрица B диагонализуется, $B = O\Lambda O^*$, где O – унитарная матрица,

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \qquad \beta_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \beta_0.$$

Положим $W = O^* U \overline{O}$. Тогда (3.1) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{tr}(\Lambda W \overline{\Lambda W}) + \beta_1^2\left(\operatorname{tr}(WW^*) - \operatorname{tr}(W\overline{W})\right) \geqslant \beta_0^2 \operatorname{tr}(WW^*)$$

или

$$\sum_{i,j}\left(\lambda_i\lambda_j w_{ij}\overline{w_{ji}} + \beta_1^2(w_{ij}\overline{w_{ij}} - w_{ij}\overline{w_{ji}})\right) \geqslant \beta_0^2 \sum_{i,j} w_{ij}\overline{w_{ij}}.$$

Поскольку $\lambda_i \geqslant \beta_0$, достаточно рассмотреть слагаемые с $i \neq j$. Соответствующее неравенство "распадается" на три независимых неравенства:

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2(w_{12}\overline{w_{21}} + w_{21}\overline{w_{12}}) + \beta_1^2\left(|w_{12}|^2 + |w_{21}|^2 - w_{12}\overline{w_{21}} - w_{21}\overline{w_{12}}\right)& \\ \geqslant \beta_0^2\left(|w_{12}|^2 + |w_{21}|^2\right)&\end{aligned} \tag{3.2}$$

и такие же неравенства для пар значков $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$. Ясно, что левая часть (3.2) оценивается снизу следующим образом:

$$\begin{aligned}&\beta_1^2\left(|w_{12}|^2 + |w_{21}|^2\right) - 2(\beta_1^2 - \lambda_1\lambda_2)\operatorname{Re}(w_{12}\overline{w_{21}}) \\ &\quad\geqslant \beta_1^2\left(|w_{12}|^2 + |w_{21}|^2\right) - (\beta_1^2 - \lambda_1\lambda_2)\left(|w_{12}|^2 + |w_{21}|^2\right) \\ &\quad\geqslant \beta_0^2\left(|w_{12}|^2 + |w_{21}|^2\right).\end{aligned}$$

□

3.2. Оценки младших членов.

Лемма 3.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– специальная липшицева область,* $\Omega \cap \{x = (x', x_n) : |x'| < 2\rho\}$ *– выпуклая,* $0 \in \partial\Omega$. *Пусть* v *– вектор-функция с компактным носителем,* $v \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega} \cap B_\rho(0)$. *Пусть* s *– самосопряженная* (3×3)*-матрица-функция,* $s \in W_3^1(\Omega \cap B_\rho)$ *и*

$$0 < \beta_0 \mathbb{1} \leqslant s \leqslant \beta_1 \mathbb{1}.$$

Пусть $\delta > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_\alpha \cap B_\rho} |\partial_i s_{jk}|^2 |v_l|^2 dx \leqslant \delta \|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega_\alpha)} + C(\delta, \rho, s)\|v\|^2_{L_2(\Omega_\alpha)} \tag{3.3}$$

и

$$\int\limits_{\Omega_\alpha \cap B_\rho} |s_{ij}\partial_k s_{lm} v_n \partial_p v_q|\, dx \leqslant \delta \|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega_\alpha)} + C(\delta, \rho, s)\|v\|^2_{L_2(\Omega_\alpha)}, \tag{3.4}$$

где $\{\Omega_\alpha\}$ *– построенное в теореме* 2.4 *семейство областей, исчерпывающее* Ω*; постоянная* $C(\delta, \rho, s)$ *не зависит от* α *и от* v.

Замечание 3.3. Эти оценки хорошо известны. Для полноты изложения мы приводим доказательство.

Доказательство. Для любого $\delta_0 > 0$ функцию $\partial_i s_{jk} \in L_3(\Omega \cap B_\rho)$ можно представить в виде $\partial_i s_{jk} = \nu_1 + \nu_2$, где $\nu_1 \in L_\infty(\Omega \cap B_\rho)$, $\nu_2 \in L_3(\Omega \cap B_\rho)$, причем $\|\nu_2\|_{L_3(\Omega\cap B_\rho)} \leqslant \delta_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\partial_i s_{jk} v_l\|_{L_2(\Omega_\alpha)} &\leqslant \|\nu_1\|_{L_\infty(\Omega\cap B_\rho)}\|v_l\|_{L_2(\Omega_\alpha)} + \delta_0\|v_l\|_{L_6(\Omega_\alpha)} \\ &\leqslant C\delta_0\|\nabla v_l\|_{L_2(\Omega_\alpha)} + C(\delta_0, \rho, s)\|v_l\|_{L_2(\Omega_\alpha)},\end{aligned} \tag{3.5}$$

где мы воспользовались пунктом 3) теоремы 2.4. Таким образом, (3.3) доказано. Далее, в силу (3.5)

$$\int\limits_{\Omega_\alpha\cap B_\rho} |s_{ij}\partial_k s_{lm} v_n \partial_p v_q|\,dx \leqslant \beta_1 \|\partial_k s_{lm} v_n\|_{L_2(\Omega_\alpha)} \|\partial_p v_q\|_{L_2(\Omega_\alpha)}$$
$$\leqslant \beta_1 \left(C\delta_0 \|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega_\alpha)} + C(\delta_0,\rho,s)\|v_n\|_{L_2(\Omega_\alpha)}\right) \|\nabla v_q\|_{L_2(\Omega_\alpha)},$$

откуда вытекает (3.4). □

Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает

Лемма 3.4. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– специальная липшицева область, множество*

$$\Omega \cap \{x = (x', x_n) : |x'| < 2\rho\}$$

выпукло, $0 \in \partial\Omega$. *Пусть* v *– вектор-функция с компактным носителем,*

$$v \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega} \cap B_\rho(0).$$

Пусть s *– самосопряженная* (3×3)*-матрица-функция,* $s \in W_3^1(\Omega \cap B_\rho)$ *и*

$$0 < \beta_0 \mathbb{1} \leqslant s \leqslant \beta_1 \mathbb{1}\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega_\alpha\cap B_\rho} \left(|\nabla(sv)|^2 - |\operatorname{rot}(sv)|^2 + \beta_1^2 |\operatorname{rot} v|^2\right) dx$$
$$\geqslant \frac{\beta_0^2}{2} \int\limits_{\Omega_\alpha} |\nabla v|^2 dx - C(\rho, s) \int\limits_{\Omega_\alpha} |v|^2 dx,$$

где $\{\Omega_\alpha\}$ *– построенное в теореме 2.4 семейство областей, исчерпывающее* Ω*; постоянная* $C(\rho,s)$ *не зависит от* v *и* α.

Доказательство. Имеем

$$|\nabla v|^2 = \operatorname{tr}(UU^*), \quad |\nabla v|^2 - |\operatorname{rot} v|^2 = \operatorname{tr}(U\overline{U}), \quad \text{где } U_{kj} = \partial_j v_k.$$

Следовательно,

$$|\nabla(sv)|^2 - |\operatorname{rot}(sv)|^2 + \beta_1^2 |\operatorname{rot} v|^2 = \operatorname{tr}(\widetilde{U}\overline{\widetilde{U}}) + \beta_1^2 \left(\operatorname{tr}(UU^*) - \operatorname{tr}(U\overline{U})\right),$$

где $\widetilde{U}_{ij} = \partial_j(s_{ik} v_k)$. Поэтому главные слагаемые в левой части (когда все производные падают на v) оцениваются по лемме 3.1, примененной к матрицам $B = s$, $U_{kj} = \partial_j v_k$,

$$\int\limits_{\Omega_\alpha \cap B_\rho} \left(\mathrm{tr}(BU\overline{BU}) + \beta_1^2 \left(\mathrm{tr}(UU^*) - \mathrm{tr}(U\overline{U})\right)\right) dx \geqslant \beta_0^2 \int\limits_{\Omega_\alpha} |\nabla v|^2 dx.$$

Младшие слагаемые по лемме 3.2 не превосходят

$$\frac{\beta_0^2}{2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega_\alpha)} + C(\rho, s)\|v\|^2_{L_2(\Omega_\alpha)}. \qquad \square$$

3.3. Плотность гладких функций. Нам понадобится приближать функции из класса Соболева, удовлетворяющие касательному или нормальному граничному условию, гладкими функциями с тем же граничным условием. Для удобства читателя мы приводим доказательство соответствующего факта.

Лемма 3.5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – специальная липшицева область,*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \phi(x_1, x_2)\},$$

причем $\phi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\phi(0) = 0$. Тогда

а) *для любой $u \in W_2^1(\Omega, \tau)$, $\mathrm{supp}\, u \subset B_\rho$, существует последовательность функций $u^k \in W_2^1(\Omega, \tau) \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, причем $\mathrm{supp}\, u^k \subset B_\rho$, $u^k \xrightarrow[k\to\infty]{W_2^1} u$;*

б) *для любой $u \in W_2^1(\Omega, \mathbb{1}, \nu)$, $\mathrm{supp}\, u \subset B_\rho$, существует последовательность функций $u^k \in W_2^1(\Omega, \mathbb{1}, \nu) \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, причем $\mathrm{supp}\, u^k \subset B_\rho$, $u^k \xrightarrow[k\to\infty]{W_2^1} u$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу-функцию

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \partial_1\phi(x_1, x_2) \\ 0 & 1 & \partial_2\phi(x_1, x_2) \\ -\partial_1\phi(x_1, x_2) & -\partial_2\phi(x_1, x_2) & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырождена, $\det M = 1 + |\nabla\phi|^2 \neq 0$. Пусть $u \in W_2^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$, $\mathrm{supp}\, u \subset B_\rho$. Обозначим $v = Mu \in W_2^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$, $\mathrm{supp}\, v \subset B_\rho$. Тогда

$$u_\tau|_{\partial\Omega} = 0 \Leftrightarrow v_1|_{\partial\Omega} = v_2|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u_\nu|_{\partial\Omega} = 0 \Leftrightarrow v_3|_{\partial\Omega} = 0.$$

Рассмотрим электрический случай, магнитный делается аналогично. Мы можем приблизить v_1, v_2 с помощью $v_1^k, v_2^k \in C_0^\infty(B_\rho)$, v_3 с помощью $v_3^k \in C^2(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} v \subset B_\rho$. Тогда

$$u^k = M^{-1}v^k \in W_2^1(\Omega, \tau) \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3), \quad u^k \xrightarrow[k\to\infty]{W_2^1} u. \qquad \square$$

§4. Априорные оценки

4.1. Магнитное поле.

Лемма 4.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – специальная липшицева область,*

$$\Omega = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \phi(x_1, x_2)\big\},$$

причем $\phi \in C^3(\mathbb{R}^2)$. Пусть $w \in W_2^1(\Omega)$, $w_\nu|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям

$$\int\limits_\Omega \big(|\operatorname{rot} w|^2 + |\operatorname{div} w|^2\big)\, dx = \int\limits_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \langle Aw, w\rangle dS,$$

где

$$A(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\phi(x)|^2}} \begin{pmatrix} \partial_1^2\phi(x) & \partial_1\partial_2\phi(x) & 0 \\ \partial_1\partial_2\phi(x) & \partial_2^2\phi(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

– отображение Вейнгартена (см., например, [6]).

Доказательство. В силу леммы 3.5 достаточно рассмотреть гладкие w. Имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \big(|\nabla w|^2 - |\operatorname{rot} w|^2\big)\, dx &= \int\limits_\Omega \partial_j w_k \partial_k \overline{w}_j \, dx \\ &= -\int\limits_\Omega w_k \partial_j \partial_k \overline{w}_j \, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \nu_j w_k \partial_k \overline{w}_j \, dS \\ &= \int\limits_\Omega |\operatorname{div} w|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \nu_j w_k \partial_k \overline{w}_j \, dS - \int\limits_{\partial\Omega} \nu_k w_k \partial_j \overline{w}_j \, dS, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\nu(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\phi(x)|^2}} \begin{pmatrix} \partial_1\phi(x) \\ \partial_2\phi(x) \\ -1 \end{pmatrix}$$

– единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$. По условию $\langle w,\nu\rangle|_{\partial\Omega}=0$, поэтому последнее слагаемое в (4.2) обращается в нуль. Кроме того, $w_k\partial_k(\nu_j\overline{w}_j)=0$, так как оператор $w_k\partial_k$ действует только в касательной плоскости. Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega}\bigl(|\operatorname{rot} w|^2+|\operatorname{div} w|^2-|\nabla w|^2\bigr)\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\partial_k\nu_j w_k\overline{w}_j\,dS.$$

Далее,

$$\partial_k\nu=\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\,\partial_k\begin{pmatrix}\partial_1\phi\\ \partial_2\phi\\ -1\end{pmatrix}+\partial_k\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\right)\begin{pmatrix}\partial_1\phi\\ \partial_2\phi\\ -1\end{pmatrix},$$

откуда, снова используя условие $\langle w,\nu\rangle|_{\partial\Omega}=0$, получаем

$$\langle\overline{w},\partial_k\nu\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\left\langle\overline{w},\begin{pmatrix}\partial_1\partial_k\phi\\ \partial_2\partial_k\phi\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle$$

и $w_k\overline{w}_j\partial_k\nu_j=\langle Aw,w\rangle$. □

Теорема 4.2. *Пусть Ω – специальная липшицева область,*

$$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^3: x_3>\phi(x_1,x_2)\},$$

множество $\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^3:\sqrt{x_1^2+x_2^2}<2\rho\}$ выпукло, $\Omega_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^3: x_3>\phi_\alpha(x_1,x_2)\}$ – построенные в теореме 2.4 области, исчерпывающие Ω. Пусть $0\in\partial\Omega$, матрица-функция μ определена в $\Omega\cap B_\rho(0)$ и удовлетворяет (0.1) *и* (0.3) *в $\Omega\cap B_\rho(0)$. Тогда*

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega_\alpha)}\leqslant C(\rho,\mu)\|v\|_{F(\Omega_\alpha,\mu)}\quad\forall v\in W_2^1(\Omega_\alpha,\mu,\nu),\ \operatorname{supp} v\subset B_\rho,$$

постоянная $C(\rho,\mu)$ не зависит от v и α.

Доказательство. Пусть $v \in W_2^1(\Omega_\alpha, \mu, \nu)$, $\operatorname{supp} v \subset B_\rho$. По лемме 4.1, примененной к области Ω_α и функции $w = \mu v$, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\alpha} |\operatorname{div}(\mu v)|^2 dx + \mu_1^2 \int\limits_{\Omega_\alpha} |\operatorname{rot} v|^2 dx \\ = \int\limits_{\Omega_\alpha} \left(|\nabla(\mu v)|^2 - |\operatorname{rot}(\mu v)|^2 + \mu_1^2 |\operatorname{rot} v|^2\right) dx \\ + \int\limits_{\partial\Omega_\alpha} \langle A_\alpha \mu v, \mu v\rangle dS =: I_1 + I_2,\end{aligned}$$

где матрица A_α определяется формулой (4.1) с заменой ϕ на ϕ_α. По лемме 3.4

$$I_1 \geqslant \frac{\mu_0^2}{2} \int\limits_{\Omega_\alpha} |\nabla v|^2 dx - C(\rho, \mu) \int\limits_{\Omega_\alpha} |v|^2 dx.$$

Кроме того, по теореме 2.4 $D^2\phi_\alpha \geqslant 0$ при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \rho$, следовательно, $I_2 \geqslant 0$. Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} |\operatorname{div}(\mu v)|^2 dx + \mu_1^2 \int\limits_{\Omega_\alpha} |\operatorname{rot} v|^2 dx \geqslant \frac{\mu_0^2}{2} \int\limits_{\Omega_\alpha} |\nabla v|^2 dx - C(\rho, \mu) \int\limits_{\Omega_\alpha} |v|^2 dx. \ \square$$

4.2. Электрическое поле. Отметим, что именно в этом пункте мы используем вещественность коэффициента s.

Лемма 4.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, $\partial\Omega \in C^2$. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, s – (3×3)-матрица-функция с вещественными элементами, $s \in W_3^1(\Omega)$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} \left(|\operatorname{rot}(su)|^2 + |\operatorname{div}(su)|^2\right) dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla(su)|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} K(x, u(x))\, dS + I_3,$$

где

$$K(x, u(x)) = s_{jm} s_{kn} (\nu_k \partial_j u_m - \nu_j \partial_k u_m) \overline{u}_n, \tag{4.3}$$

$\nu(x)$ – единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, I_3 – линейная комбинация интегралов вида

$$\int\limits_{\Omega} \partial_i s_{jk} \partial_l s_{mn} u_p \overline{u}_q dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Omega} s_{ij} \partial_k s_{lm} u_n \partial_p \overline{u}_q dx. \tag{4.4}$$

Замечание 4.4. В этом доказательстве мы будем одной и той же буквой I_3 обозначать разные линейные комбинации интегралов вида (4.4).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \left(|\nabla(su)|^2 - |\operatorname{rot}(su)|^2\right) dx &= \int\limits_{\Omega} \partial_k(s_{jm}u_m)\partial_j(s_{kn}\overline{u}_n)dx \\
&= \int\limits_{\Omega} s_{jm}\partial_k u_m s_{kn}\partial_j \overline{u}_n dx + I_3 \\
&= -\int\limits_{\Omega} s_{jm}\partial_j\partial_k u_m s_{kn}\overline{u}_n dx + \int\limits_{\partial\Omega} s_{jm}\partial_k u_m s_{kn}\nu_j\overline{u}_n dS + I_3 \\
&= \int\limits_{\Omega} s_{jm}\partial_j u_m \partial_k(s_{kn}\overline{u}_n)dx + \int\limits_{\partial\Omega} s_{jm}\partial_k u_m s_{kn}\nu_j\overline{u}_n dS \\
&\qquad - \int\limits_{\partial\Omega} s_{jm}\nu_k\partial_j u_m s_{kn}\overline{u}_n dS + I_3 \\
&= \int\limits_{\Omega} |\operatorname{div}(su)|^2 dx - \int\limits_{\partial\Omega} K(x, u(x))\, dS + I_3.
\end{aligned}$$

□

Лемма 4.5. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $0 \in \partial\Omega$, в окрестности нуля область Ω описывается формулой $x_3 > \psi(x_1, x_2)$, причем*

$$\psi(0) = 0, \quad \nabla\psi(0) = 0, \quad D^2\psi(0) \geqslant 0.$$

Пусть s – фиксированная вещественная матрица, $s > 0$. Пусть $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, $u_\tau|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда

$$K(0, u(0)) = s_{jm}s_{kn}(\nu_k(0)\partial_j u_m(0) - \nu_j(0)\partial_k u_m(0))\overline{u}_n(0) \geqslant 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\psi(x)|^2}} \begin{pmatrix} \partial_1\psi(x) \\ \partial_2\psi(x) \\ -1 \end{pmatrix},$$

в частности,

$$\nu(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Введем касательные вектора

$$\tau_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1\psi(x) \end{pmatrix}, \qquad \tau_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2\psi(x) \end{pmatrix}.$$

Условие $u_\tau|_{\partial\Omega} = 0$ переписывается в виде

$$\langle u(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)), \tau_j(x_1, x_2)\rangle = 0, \quad j = 1, 2; \tag{4.6}$$

в начале координат

$$u_1(0) = u_2(0) = 0. \tag{4.7}$$

Продифференцировав (4.6) по x_i, $i = 1, 2$, в точке 0, с учетом $\nabla\psi(0) = 0$, получим

$$\partial_i u_j(0) = -u_3(0)\partial_i\partial_j\psi(0), \quad i, j = 1, 2. \tag{4.8}$$

Согласно (4.5) и (4.7)

$$K(0, u(0)) = -s_{jm}s_{33}\partial_j u_m(0)\overline{u}_3(0) + s_{3m}s_{k3}\partial_k u_m(0)\overline{u}_3(0).$$

Слагаемые с $m = 3$ сокращаются. Кроме того, первое слагаемое с $j = 3$ сокращается со вторым слагаемым с $k = 3$. Поэтому

$$K(0, u(0)) = \sum_{j,m=1,2} (s_{jm}s_{33} - s_{3m}s_{j3})\,\partial_j\partial_m\psi(0)|u(0)|^2,$$

где мы воспользовались (4.8). Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $(\partial_j\partial_m\psi(0))$ диагональна,

$$(D^2\psi(0)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$K(0, u(0)) = \sum_{j=1,2} (s_{jj}s_{33} - s_{3j}s_{j3})\,\lambda_j|u(0)|^2 \geqslant 0,$$

так как матрица s положительно определена. □

Теорема 4.6. *Пусть* Ω *– специальная липшицева область,* $0 \in \partial\Omega$, *множество*

$$\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2\rho\}$$

выпукло, $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \phi_\alpha(x_1, x_2)\}$ *– построенные в теореме* 2.4 *области, исчерпывающие* Ω. *Пусть матрица-функция* ε *определена в* $\Omega \cap B_\rho(0)$ *и удовлетворяет* (0.1) *и* (0.3) *в* $\Omega \cap B_\rho(0)$. *Тогда*

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_\alpha)} \leqslant C(\rho, \varepsilon)\|u\|_{F(\Omega_\alpha, \varepsilon)} \quad \forall u \in W_2^1(\Omega_\alpha, \tau),\ \operatorname{supp} u \subset B_\rho,$$

постоянная $C(\rho,\varepsilon)$ не зависит от v и α.

Доказательство. По лемме 3.5 достаточно рассматривать гладкие функции u. По лемме 4.3

$$\int_{\Omega_\alpha} |\operatorname{div}(\varepsilon u)|^2 dx + \varepsilon_1^2 \int_{\Omega_\alpha} |\operatorname{rot} u|^2 dx$$
$$= \int_{\Omega_\alpha} \left(|\nabla(\varepsilon u)|^2 - |\operatorname{rot}(\varepsilon u)|^2 + \varepsilon_1^2 |\operatorname{rot} u|^2\right) dx + \int_{\partial\Omega_\alpha} K(x,u(x))\, dS + I_3,$$

где $K(x,u(x))$ определено в (4.3), I_3 – линейная комбинация интегралов вида (4.4). По лемме 3.4

$$\int_{\Omega_\alpha} \left(|\nabla(\varepsilon u)|^2 - |\operatorname{rot}(\varepsilon u)|^2 + \varepsilon_1^2 |\operatorname{rot} u|^2\right) dx$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon_0^2}{2} \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 dx - C(\rho,\varepsilon) \int_{\Omega_\alpha} |u|^2 dx.$$

По построению областей Ω_α, $(D^2\phi_\alpha)(x) \geqslant 0$ при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \rho$. Применяя лемму 4.5 и учитывая, что след на границе от положительно определенной матрицы снова положительно определен, имеем $K(x,u(x)) \geqslant 0$ при п.в. $x \in \partial\Omega_\alpha$. Поэтому

$$\int_{\partial\Omega_\alpha} K(x,u(x))\, dS \geqslant 0.$$

Наконец, по лемме 3.2

$$|I_3| \leqslant \frac{\varepsilon_0^2}{4} \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 dx + C(\rho,\varepsilon) \int_{\Omega_\alpha} |u|^2 dx,$$

откуда

$$\int_{\Omega_\alpha} \left(|\operatorname{div}(\varepsilon u)|^2 + \varepsilon_1^2 |\operatorname{rot} u|^2\right) dx \geqslant \frac{\varepsilon_0^2}{4} \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u|^2 dx - C(\rho,\varepsilon) \int_{\Omega_\alpha} |u|^2 dx. \quad \square$$

§5. Доказательство теоремы 1.1

5.1. Случай специальной липшицевой области.

Лемма 5.1. *Пусть* $\{\Omega_k\}$ *– возрастающая последовательность областей,* $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\cup_k \Omega_k = \Omega$. *Пусть даны функции* $f_k \in L_2(\Omega_k)$, $\|f_k\|_{L_2(\Omega_k)} \leqslant C_0$, *и* $f \in L_2(\Omega)$, *причем* $f_k|_{\Omega_m} \to f|_{\Omega_m}$ *слабо в* $L_2(\Omega_m)$ [2] *при всех* m. *Тогда*

$$(f_k, z)_{L_2(\Omega_k)} \to (f, z)_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, z \in L_2(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем m так, чтобы

$$(C_0 + \|f\|_{L_2(\Omega)})\, \|z\|_{L_2(\Omega \setminus \Omega_m)} \leqslant \varepsilon/2.$$

Тогда при $k > m$

$$\begin{aligned}
&|(f_k, z)_{L_2(\Omega_k)} - (f, z)_{L_2(\Omega)}| \\
&\leqslant |(f_k, z)_{L_2(\Omega_m)} - (f, z)_{L_2(\Omega_m)}| + (\|f_k\|_{L_2(\Omega_k)} + \|f\|_{L_2(\Omega)})\|z\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_m)} \\
&\qquad\qquad \leqslant |(f_k, z)_{L_2(\Omega_m)} - (f, z)_{L_2(\Omega_m)}| + \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Осталось выбрать k так, чтобы первое слагаемое было меньше $\varepsilon/2$. □

Напомним, что операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_s$ заданы формулой (0.7) на областях определения

$$\mathcal{D}(\Omega) := F(\Omega, \varepsilon, \tau) \oplus W_2^1(\Omega, \mathbb{C}) \oplus F(\Omega, \mu, \nu) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega, \mathbb{C}).$$

и

$$\mathcal{A}(\Omega) := W_2^1(\Omega, \tau) \oplus W_2^1(\Omega, \mathbb{C}) \oplus W_2^1(\Omega, \mu, \nu) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega, \mathbb{C}).$$

В пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ естественно ввести норму графика $\|X\|^2_{\mathcal{D}(\Omega)} = \|\mathcal{L}X\|^2_{L_2} + \|X\|^2_{L_2}$, в пространстве $\mathcal{A}(\Omega)$ – W_2^1-норму.

Теорема 5.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– специальная липшицева область, множество*

$$\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2\rho\}$$

---

[2] Здесь и в аналогичных ситуациях в дальнейшем подразумевается стремление по последовательности $k = m, m+1, \dots$

выпукло, $0 \in \partial\Omega$. *Пусть матрицы-функции* ε *и* μ *заданы в* $\Omega \cap B_{2\rho}(0)$ *и удовлетворяют там условиям* (0.1) *и* (0.3). *Пусть*

$$X = \begin{pmatrix} E \\ \varphi \\ H \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \operatorname{supp} X \subset \overline{\Omega} \cap B_{\rho/2}(0).$$

Тогда

$$X \in \mathcal{A}(\Omega), \quad \|X\|_{W_2^1} \leqslant C(\rho, \varepsilon, \mu)(\|\mathcal{L}X\|_{L_2} + \|X\|_{L_2}).$$

Замечание 5.3. Идея доказательства этой теоремы заимствована из [18].

Доказательство. Пусть Ω_α – области, построенные в теореме 2.4. Положим

$$f_\alpha = ((\mathcal{L} - iI)X)|_{\Omega_\alpha \cap B_{2\rho}}, \quad f_\alpha \in L_2(\Omega_\alpha \cap B_{2\rho}, \mathbb{C}^8; \varepsilon, \mu).$$

Пусть $\mathcal{L}_\alpha$ – самосопряженный оператор, заданный формулой (0.7) на области определения $\mathcal{D}(\Omega_\alpha \cap B_{2\rho})$. Определим $X_{1,\alpha} = (\mathcal{L}_\alpha - iI)^{-1} f_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega_\alpha \cap B_{2\rho})$. Имеем

$$\|X_{1,\alpha}\|_{\mathcal{D}(\Omega_\alpha \cap B_{2\rho})} = \|f_\alpha\|_{L_2(\Omega_\alpha \cap B_{2\rho})} \leqslant \|X\|_{\mathcal{D}(\Omega)} \quad \forall\, \alpha \in (0,1).$$

Рассмотрим поле

$$X_{2,\alpha} := X|_{\Omega_\alpha \cap B_{2\rho}} - X_{1,\alpha}, \quad \|X_{2,\alpha}\|_{\mathcal{D}(\Omega_\alpha \cap B_{2\rho})} \leqslant 2\|X\|_{\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $X_{2,\alpha_k} \underset{\alpha_k \to 0}{\to} X_3$ (см. сноску к лемме 5.1) слабо в пространстве

$$F(\Omega_\beta \cap B_{2\rho}, \varepsilon) \oplus W_2^1(\Omega_\beta \cap B_{2\rho}, \mathbb{C}) \oplus F(\Omega_\beta \cap B_{2\rho}, \mu) \oplus W_2^1(\Omega_\beta \cap B_{2\rho}, \mathbb{C}) \tag{5.1}$$

для любого заданного $\beta > 0$, и

$$X_3 \in F(\Omega \cap B_{2\rho}, \varepsilon) \oplus W_2^1(\Omega \cap B_{2\rho}, \mathbb{C}) \oplus F(\Omega \cap B_{2\rho}, \mu) \oplus W_2^1(\Omega \cap B_{2\rho}, \mathbb{C}).$$

Покажем, что компоненты поля

$$X_3 = \begin{pmatrix} E_3 \\ \varphi_3 \\ H_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют нужным граничным условиям, то есть $X_3 \in \mathcal{D}(\Omega\cap B_{2\rho})$. Действительно, пусть $h \in L_2(\Omega \cap B_{2\rho}, \mathbb{C}^3)$, $\operatorname{rot} h \in L_2(\Omega \cap B_{2\rho}, \mathbb{C}^3)$. По лемме 5.1 имеем

$$\begin{aligned}
&(E_3, \operatorname{rot} h)_{L_2(\Omega\cap B_{2\rho})} - (\operatorname{rot} E_3, h)_{L_2(\Omega\cap B_{2\rho})} \\
&= \lim_{\alpha_k\to 0} \Big((E_{2,\alpha_k}, \operatorname{rot} h)_{L_2(\Omega_{\alpha_k}\cap B_{2\rho})} - (\operatorname{rot} E_{2,\alpha_k}, h)_{L_2(\Omega_{\alpha_k}\cap B_{2\rho})} \Big) \\
&= \lim_{\alpha_k\to 0} \Big((E, \operatorname{rot} h)_{L_2(\Omega_{\alpha_k}\cap B_{2\rho})} - (\operatorname{rot} E, h)_{L_2(\Omega_{\alpha_k}\cap B_{2\rho})} \Big) \\
&= (E, \operatorname{rot} h)_{L_2(\Omega)} - (\operatorname{rot} E, h)_{L_2(\Omega)} = 0,
\end{aligned}$$

так как поля $X_{1,\alpha}$ и X удовлетворяют условиям $(E_{1,\alpha})_\tau\big|_{\partial(\Omega_\alpha\cap B_{2\rho})} = 0$ и $E_\tau|_{\partial\Omega} = 0$ соответственно. Тем самым, $(E_3)_\tau|_{\partial(\Omega\cap B_{2\rho})} = 0$. Аналогично устанавливается, что $(\mu H_3)_\nu|_{\partial(\Omega\cap B_{2\rho})} = 0$ и $\eta_3|_{\partial(\Omega\cap B_{2\rho})} = 0$. Наконец, $((\mathcal{L}_{\alpha_k} - i)X_{1,\alpha_k})|_{\Omega_\beta\cap B_{2\rho}} = f_\beta$ при $\alpha_k \leqslant \beta$, откуда

$$((\mathcal{L} - i)X_{2,\alpha_k})|_{\Omega_\beta\cap B_{2\rho}} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_k \leqslant \beta,$$

где $\mathcal{L}$ понимается как дифференциальное выражение (0.7). Следовательно, $(\mathcal{L} - i)X_3 = 0$ в Ω. Поскольку $X_3 \in \mathcal{D}(\Omega)$, отсюда вытекает $X_3 = 0$. Таким образом, $X_{1,\alpha}$ сходится к X слабо в пространстве (5.1) при всех $\beta > 0$.

Далее, введем вектор $X_\alpha = \chi_\rho X_{1,\alpha} \in \mathcal{D}(\Omega_\alpha \cap B_{2\rho})$. Здесь $\chi_\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\chi_\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_{\rho/2} \\ 0, & x \notin B_\rho \end{cases}.$$

На границе области $\Omega_\alpha \cap B_{2\rho}$ функция X_α отлична от нуля только на $\partial\Omega_\alpha$. По теореме 1.6 $X_\alpha \in \mathcal{A}(\Omega_\alpha)$. Согласно теоремам 4.2 и 4.6

$$\|X_\alpha\|_{W_2^1(\Omega_\alpha)} \leqslant C(\rho, \varepsilon, \mu)\|X_\alpha\|_{\mathcal{D}(\Omega_\alpha)} \leqslant C(\rho, \varepsilon, \mu)\|X\|_{\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Следовательно, существуют последовательность $\alpha_k \to 0$ и поле $X_0 \in W_2^1(\Omega, \mathbb{C}^8)$, такие что $X_{\alpha_k} \to X_0$ слабо в $W_2^1(\Omega_\beta, \mathbb{C}^8)$ (см. сноску к лемме 5.1) при всех $\beta > 0$; $\|X_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(\rho, \varepsilon, \mu)\|X\|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Следовательно, $X = X_0 \in \mathcal{A}(\Omega)$. □

5.2. $(W_3^2 \cap W_\infty^1)$-диффеоморфизмы.

Лемма 5.4. *Пусть Ω, $\widetilde{\Omega}$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^3$, $\psi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ – биекция, причем*

$$\psi \in W_3^2 \cap W_\infty^1(\Omega), \quad \psi^{-1} \in W_3^2 \cap W_\infty^1(\widetilde{\Omega}).$$

Пусть функции u *и* v *связаны соотношением*

$$u_j(x) = \partial_j \psi_k(x) v_k(\psi(x)), \tag{5.2}$$

s *– матрица-функция. Обозначим* $J_{jk}(x) = \partial_j \psi_k(x), y = \psi(x)$. *Тогда при п.в.* $x \in \Omega$

$$(\operatorname{rot}_x u)(x) = (|\det J|(J^{-1})^t \operatorname{rot}_y v)(y),$$

$$(\operatorname{div}_x(su))(x) = \left(|\det J| \operatorname{div}_y \left(\frac{J^t sJv}{|\det J|}\right)\right)(y).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}_x u)_i &= [\nabla_x, u]_i = \langle e_i, [J\nabla_y, Jv]\rangle \\ &= |\det J|\langle J^{-1}e_i, [\nabla_y, v]\rangle = |\det J|((J^{-1})^t \operatorname{rot}_y v)_i.\end{aligned}$$

Здесь в третьем равенстве производные от J сокращаются, поскольку

$$\partial_{x_j} J_{km} v_m - \partial_{x_k} J_{jm} v_m = (\partial_j \partial_k \psi_m - \partial_j \partial_k \psi_m) v_m = 0.$$

Используя определение дивергенции в терминах обобщенных функций, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}_x(su)\eta dx = -\int\limits_{\Omega} \langle su, \nabla_x \eta\rangle dx = -\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \langle sJv, J\nabla_y \eta\rangle |\det J|^{-1} dy$$

$$= \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \operatorname{div}_y \left(\frac{J^t sJv}{|\det J|}\right) \eta dy = \int\limits_{\Omega} |\det J| \operatorname{div}_y \left(\frac{J^t sJv}{|\det J|}\right) \eta dx, \ \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}). \ \square$$

Теорема 5.5. *Пусть* Ω, $\widetilde{\Omega}$ *– ограниченные области в* $\mathbb{R}^3$, $\psi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ *– биекция, причем*

$$\psi \in W_3^2 \cap W_\infty^1(\Omega), \quad \psi^{-1} \in W_3^2 \cap W_\infty^1(\widetilde{\Omega}).$$

При преобразовании (5.2) *пространство* $F(\Omega, \varepsilon, \tau)$ *переходит в пространство* $F(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\varepsilon}, \tau)$, $F(\Omega, \mu, \nu)$ *– в* $F(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mu}, \nu)$, $W_2^1(\Omega, \tau)$ *– в* $W_2^1(\widetilde{\Omega}, \tau)$, $W_2^1(\Omega, \mu, \nu)$ *– в* $W_2^1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mu}, \nu)$, *где матрицы-функции*

$$\widetilde{\varepsilon}(y) = \frac{J^t \varepsilon(x) J}{|\det J|}, \quad \widetilde{\mu}(y) = \frac{J^t \mu(x) J}{|\det J|}$$

удовлетворяют (0.1) *и* (0.3) *одновременно с* ε *и* μ, $y = \psi(x)$, $J_{jk}(x) = \partial_j \psi_k(x)$. *При этом выполнены оценки норм*

$$c_1 \|u\|_{F(\Omega, s)} \leqslant \|v\|_{F(\widetilde{\Omega}, \widetilde{s})} \leqslant c_2 \|u\|_{F(\Omega, s)}, \quad s = \varepsilon \text{ или } \mu,$$

$$c_1\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \|v\|_{W_2^1(\widetilde{\Omega})} \leqslant c_2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Здесь c_1 и c_2 зависят только от норм ψ и ψ^{-1} в W_3^2 и W_∞^1 .

Доказательство. Пусть u и v связаны (5.2), $u \in F(\Omega, s)$, $s = \varepsilon$ или μ. Из леммы 5.4 вытекает, что $v \in F(\widetilde{\Omega}, \widetilde{s})$, и выполнены двусторонние оценки норм.

Далее, пусть

$$u \in F(\Omega, \varepsilon, \tau), \quad h \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \operatorname{rot} h \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \widetilde{h}(y) = J(x)^{-1}h(x).$$

Тогда

$$(\operatorname{rot}_y v, \widetilde{h})_{L_2(\widetilde{\Omega})} = (\operatorname{rot}_x u, h)_{L_2(\Omega)} = (u, \operatorname{rot}_x h)_{L_2(\Omega)} = (v, \operatorname{rot}_y \widetilde{h})_{L_2(\widetilde{\Omega})},$$

Следовательно, $v_\tau|_{\partial\widetilde{\Omega}} = 0$. Аналогично, если $u \in F(\Omega, \mu, \nu)$, $\varphi \in W_2^1(\Omega, \mathbb{C})$, то

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}_y(\widetilde{\mu}v), \varphi)_{L_2(\widetilde{\Omega})} = (\operatorname{div}_x(\mu u), \varphi)_{L_2(\Omega)} &= -(\mu u, \nabla_x \varphi)_{L_2(\Omega)} \\ &= -(\widetilde{\mu}v, \nabla_y \varphi)_{L_2(\widetilde{\Omega})},\end{aligned}$$

откуда $(\widetilde{\mu}v)_\nu|_{\partial\widetilde{\Omega}} = 0$. Наконец, умножение на $J \in W_3^1 \cap L_\infty$ является ограниченным оператором в пространстве Соболева W_2^1. □

5.3. Локализация. Легко видеть, что умножение на срезку не выводит из класса $\mathcal{D}(\Omega)$ (см., например, [2]).

Лемма 5.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $X \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда*

$$\zeta X \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \|\zeta X\|_{\mathcal{D}(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla\zeta\|_{L_\infty} + \|\zeta\|_{L_\infty}\right)\|X\|_{\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть ограниченная область Ω принадлежит классу $\mathcal{C}(W_3^2 \cap W_\infty^1)$. Из определения 0.6 следует, что $\partial\Omega$ можно покрыть конечным числом областей D_j, для каждой из которых будет существовать соответствующий диффеоморфизм ψ_j. Этот набор областей можно дополнить до покрытия всей области Ω. Обозначим новое покрытие $\mathcal{W}_j$ и подчиненное ему разбиение единицы ζ_j:

$$\begin{gathered}\zeta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ \ 0 \leqslant \zeta_j(x) \leqslant 1, \ \ \operatorname{supp}\zeta_j \subset \mathcal{W}_j, \\ \sum_j \zeta_j(x) = 1 \text{ при } x \in \overline{\Omega}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} E \\ \varphi \\ H \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{и} \quad X_j = \zeta_j X = \begin{pmatrix} E_j \\ \varphi_j \\ H_j \\ \eta_j \end{pmatrix}.$$

По лемме 5.6

$$X_j \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|X_j\|_{\mathcal{D}(\Omega)} \leqslant C\|X\|_{\mathcal{D}(\Omega)} \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} X_j \subset \mathcal{W}_j.$$

Положим

$$Y_j(y) = \begin{pmatrix} J_j(x)^{-1} E_j(x) \\ \varphi_j(x) \\ J_j(x)^{-1} H_j(x) \\ \eta_j(x) \end{pmatrix},$$

где переменные x и y связаны формулой $y = \psi_j(x)$, J_j – матрица Якоби отображения ψ_j.

По теореме 5.5 $Y_j \in \mathcal{D}(\psi_j(\mathcal{W}_j) \cap V_j)$, где V_j – соответствующая специальная липшицева область. Поскольку $\operatorname{supp} Y_j \subset \psi_j(\mathcal{W}_j)$, имеет место включение $Y_j \in \mathcal{D}(V_j)$. Далее по теореме 5.2 $Y_j \in \mathcal{A}(V_j)$. Снова применяя теорему 5.5, получим $X_j \in \mathcal{A}(\mathcal{W}_j \cap \Omega)$, при этом

$$\|X_j\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\|Y_j\|_{W_2^1(V_j)} \leqslant C_2\|Y_j\|_{\mathcal{D}(V_j)} \leqslant C_3\|X_j\|_{\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$X = \sum_j X_j \in \mathcal{A}(\Omega)$$

и

$$\|X\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \sum_j \|X_j\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_4 \sum_j \|X_j\|_{\mathcal{D}(\Omega)} \leqslant C_5\|X\|_{\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Литература

1. G. S. Alberti, Y. Capdeboscq, *Elliptic regularity theory applied to time harmonic anisotropic Maxwell's equations with less than Lipschitz complex coefficients.* — SIAM J. Math. Anal., **46**, no. 1 (2014), 998–1016.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Оператор Максвелла в областях с негладкой границей.* — Сиб. мат. журнал, **28**, no. 1 (1987), 23–36.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Построение в кусочно гладкой области функции класса H^2 по значению конормальной производной.* — Зап. науч. сем. ЛОМИ, **163** (1987), 17–28.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях*, Алгебра и Анализ, **1**, no. 1 (1989), 96–110.

5. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Главные особенности электрической составляющей электромагнитного поля в областях с экранами.* — Алгебра и Анализ, **5**, no. 1 (1993), 143–159.
6. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию*, СПб, Наука, 1994.
7. M. N. Demchenko, N. D. Filonov, *Spectral Asymptotics of the Maxwell Operator on Lipschitz Manifolds with Boundary.* — Amer. Math. Soc. Transl., **225**, no. 2 (2008), 73–90.
8. Н. Филонов, *Главные особенности магнитной составляющей электромагнитного поля в областях с экранами.* — Алгебра и Анализ, **8**, no. 3 (1996), 212–236.
9. Н. Филонов, *Главные особенности магнитной составляющей поля в резонаторах с границей заданного класса гладкости.* — Алгебра и Анализ, **9**, no. 2 (1997), 241–255.
10. K. O. Friedrichs, *Differential forms on Riemannian manifolds.* — Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), 551–590.
11. M. P. Gaffney, *Hilbert Space Methods in the Theory of Harmonic Integrals.* — Transactions Amer. Math. Soc., **78**, no. 2 (1955), 426–444.
12. J. Gobert, *Sur une inégalité de coercivité.* — J. Math. Anal. Appl., **36**, no. 3 (1971), 518–528.
13. P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Advanced Publ. Progr., Boston/ London/ Melbourne, 1985.
14. S. Kaizu, F. Kikuchi, *An Imbedding Theorem for a Hilbert Space Appearing in Electromagnetics.* — Scientific Papers of the College of Arts and Sciences, University of Tokyo, **36** (1986), 81–89.
15. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М., Наука, 1973.
16. R. Leis, *Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien.* — Math. Z., **106**, no. 3 (1968), 213–224.
17. В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, ЛГУ, Л., 1986.
18. M. Mitrea, *Dirichlet integrals and Gaffney-Friedrichs inequalities in convex domain.* — Forum Math., **13**, no. 4 (2001), 531–567.
19. R. Picard, *An Elementary Proof for a Compact Imbedding Result in Generalized Electromagnetic Theory.* — Math. Z., **187** (1984), 151–164.
20. J. Saranen, *On an inequality of Friedriechs.* — Math. Scand., **51** (1982), 310–322.
21. И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М., Мир, 1973.
22. C. Weber, *Regularity Theorems for Maxwell's Equations.* — Math. Meth. Appl. Sci., **3** (1981), 523–536.
23. N. Weck, *Maxwell's Boundary Value Problem on Riemannian Manifolds with Nonsmooth Boundaries.* — J. Math. Anal. and Appl., **46** (1974), 410–437.

Prohorov A., Filonov N. Regularity of electromagnetic fields in convex domains.

The “strong” Maxwell operator defined on the fields from the Sobolev space W_2^1, and the “weak” Maxwell operator defined on the natural domain are considered. It is shown, that in the convex domains, and more generally, in the domains which are locally $(W_3^2 \cap W_\infty^1)$-diffeomorphic to convex ones, the “strong” and the “weak” Maxwell operators coincide.

С.-Петербургский
государственный университет
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: andruprokhorov@mail.ru

Поступило 28 августа 2014 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
государственный университет
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: filonov@pdmi.ras.ru