Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 425, 2014 г.

Е. В. Мукосеева, А. И. Назаров

О СИММЕТРИИ ЭКСТРЕМАЛИ В НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ

Всеволоду Алексеевичу с глубоким уважением

Рассмотрим задачу о точной константе в теореме вложения

$$\lambda(r,k,p,q) = \min \frac{\|f^{(r)}\|_{L_p[-1,1]}}{\|f^{(k)}\|_{L_q[-1,1]}}, \tag{1}$$

где $r,k \in \mathbb{Z}_+$, $r > k$, $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, и минимум берется по $f \in \overset{\circ}{W}{}^r_p(-1,1)$, т.е. по множеству[1]

$$\left\{ f \in \mathcal{AC}^{r-1}[-1,1] \,\middle|\, f^{(r)} \in L_p(-1,1); \quad f^{(j)}(\pm 1) = 0,\ j = 0,1,\dots,r-1. \right\}$$

При $r = 1$, $k = 0$ задача (1) хорошо известна. Для $p = q = 2$ она была решена В.А. Стекловым [13], для произвольных $p = q$ – В.И. Левиным [9] (при $p = q = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, см. также [5, Sect. 7.6]), наконец, для всех p и q – Е. Шмидтом [14]:

$$\lambda(1,0,p,q) = \frac{\mathfrak{F}\left(\frac{1}{q}\right)\mathfrak{F}\left(\frac{1}{p'}\right)}{2^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}}\,\mathfrak{F}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}\right)},$$

где $\mathfrak{F}(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s^s}$ и $p' = \frac{p}{p-1}$. Заметим, что экстремаль в этой задаче является четной функцией.

При $r = 2$, $k = 1$ задача (1) сводится к нахождению точной константы в неравенстве Пуанкаре, которая при $p = q = 2$ была найдена также Стекловым [12]. Исследование общего случая, однако, затянулось до начала нашего века и потребовало усилий многих авторов ([1–4,8]; окончательный результат был получен в [10]). Именно, оказалось, что

Ключевые слова: точные константы, теоремы вложения, симметрия и асимметрия экстремалей.

Работа первого автора поддержана Лабораторией имени П. Л. Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026) и ОАО “Газпром нефть”. Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 14-01-00534 и грантом СПбГУ 6.38.670.2013.

[1]Случай $p = 1$ – особый. Минимум при этом следует рассматривать на классе функций f, $(r-1)$-я производная которых имеет ограниченную вариацию на $[-1,1]$.

при $q \leqslant 3p$ имеет место равенство $\lambda(2,1,p,q) = 2\lambda(1,0,p,q)$, и экстремаль является четной функцией. Если же $q > 3p$, то $\lambda(2,1,p,q) < 2\lambda(1,0,p,q)$, и экстремаль симметрией не обладает.

Этот результат, а также некоторые численные эксперименты позволили выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза: *Если $k \vdots 2$, то экстремаль в задаче (1) – четная функция при всех допустимых r, p, q. Если же $k \not\vdots 2$, то для всех допустимых r и p существует такое $\widehat{q}(r,k,p) > p$, что экстремаль четна при $q \leqslant \widehat{q}$ и не обладает симметрией при $q > \widehat{q}$.*

На данный момент, по нашим сведениям, симметрия или асимметрия экстремали доказана для следующих значений параметров:

Статья	Симметрия				Асимметрия			
	r	k	p	q	r	k	p	q
[14]	1	0	$\forall$	$\forall$				
[2]					2	1	$\forall$	$> 3p$
[10]	2	1	$\forall$	$\leqslant 3p$				
[11][2]	$k+1$	$\forall$	2	2				
[15]	$2,3$	0	$\forall$	∞				
[16]	$\forall$	0	2	∞				
[7]	$\forall$	$0,2$	2	∞	$\forall$	1	2	∞

В настоящей статье рассматривается случай $p = 2$, $q = \infty$. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $p = 2$, $q = \infty$.*

1. *Если $k \not\vdots 2$, то при всех $r > k$ экстремаль в задаче* (1) *симметрией не обладает.*

2. *Если $k \vdots 2$, то при всех $r > k$ четная функция дает функционалу* (1) *локальный минимум.*

В случае четных k полного решения задачи получить пока не удалось. Следующая теорема развивает результаты [7].

[2]см. также [6].

Теорема 2. *Пусть $p = 2$, $q = \infty$. При $k = 4, 6$ и всех $r > k$ экстремаль в задаче* (1) *– четная функция. Кроме того,*

$$\lambda(r, 4, 2, \infty) = 2^{r-2}(r-3)!\sqrt{\frac{2(2r-9)}{3(4r^2-24r+39)}};$$

$$\lambda(r, 6, 2, \infty) = 2^{r-2}(r-4)!\sqrt{\frac{2(2r-13)}{192r^4-3456r^3+23372r^2-70240r+79065}}.$$

Доказательство теоремы 1. Введем, следуя [7], функцию

$$A_{r,k}(x) = \max\{|f^{(k)}(x)| : f \in \overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1), \|f^{(r)}\|_{L_2(-1,1)} \leqslant 1\}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\max\limits_{[-1,1]} A_{r,k}(x) = \lambda^{-1}(r, k, 2, \infty)$.

Воспользуемся явной формулой, полученной в [7]:

$$\begin{aligned} A_{r,k}^2(x) = \big(Q_{r-k-1}(x)\big)^2 \cdot \frac{1-x^2}{2(2r-2k-1)} \\ - \sum_{n=r-k}^{r-1} \big(Q_n^{(n+k-r)}(x)\big)^2 \big(n+\frac{1}{2}\big), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$Q_n = \frac{1}{2^n n!} \cdot (1-x^2)^n.$$

При этом функция f, для которой достигается максимум в (2), дается формулой

$$f(t) = \sum_{n \geqslant r} \big(n+\frac{1}{2}\big) \cdot Q_n^{(n+k-r)}(x) Q_n^{(n-r)}(t).$$

Легко видеть, что эта функция обладает симметрией (четна при четном k и нечетна при нечетном) тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Таким образом, утверждение теоремы 1 вытекает из следующей леммы. □

Лемма. *При нечётных k точка* 0 *является локальным минимумом функции $A_{r,k}(x)$, а при чётных – локальным максимумом.*

Заметим, что

$$Q_n^{(s)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{при нечётном } s \\ \frac{(-1)^k s!}{2^n n!} C_n^k & \text{при } s = 2k. \end{cases} \tag{4}$$

В силу четности функции $A_{r,k}$ имеем $A'_{r,k}(0)=0$. Далее, с учетом (4) имеем

$$\begin{aligned}(A^2_{r,k})''(0) &= -\frac{2}{(r-k-1)!^2 2^{2r-2k-1}}\\ &\quad -\sum_{s=0}^{k-1} 2\big(r-k+s+\frac{1}{2}\big)\Big(\big(Q^{(s+1)}_{r-k+s}(0)\big)^2+Q^{(s)}_{r-k+s}(0)Q^{(s+2)}_{r-k+s}(0)\Big)\\ &= -\frac{2}{(r-k-1)!^2 2^{2r-2k-1}} \qquad (5)\\ &\quad -2\sum_{t=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\Big(\frac{(2t+2)!C^{t+1}_{r-k+2t+1}}{2^{r-k+2t+1}(r-k+2t+1)!}\Big)^2\big(r-k+2t+\frac{3}{2}\big)\\ &\quad +2\sum_{t=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\frac{(2t)!(2t+2)!C^{t}_{r-k+2t}C^{t+1}_{r-k+2t}}{2^{2(r-k+2t)}(r-k+2t)!^2}\big(r-k+2t+\frac{1}{2}\big).\end{aligned}$$

Пусть сначала k нечетно. В этом случае во второй сумме на одно слагаемое больше, чем в первой. Отделяя от второй суммы член с $t=0$, получим

$$\begin{aligned}(A^2_{r,k})''(0) &= \frac{4(r-k)}{2^{2(r-k)}(r-k)!^2}\big(r-k+\frac{1}{2}\big)-\frac{2}{(r-k-1)!^2 2^{2r-2k-1}}\\ &\quad +2\sum_{t=1}^{\frac{k-1}{2}}\Bigg(\frac{(2t)!(2t+2)!C^{t}_{r-k+2t}C^{t+1}_{r-k+2t}}{2^{2(r-k+2t)}(r-k+2t)!^2}\big(r-k+2t+\frac{1}{2}\big)\\ &\qquad -\Big(\frac{(2t)!C^{t}_{r-k+2t-1}}{2^{r-k+2t-1}(r-k+2t-1)!}\Big)^2\big(r-k+2t-\frac{1}{2}\big)\Bigg).\end{aligned}$$

Выражение в первой строке равно $\frac{1}{2^{2r-2k-1}(r-k-1)!^2(r-k)}>0$. Обозначим его M и вынесем его множителем из всего выражения:

$$\begin{aligned}&\frac{(A^2_{r,k})''(0)}{M}\\ &= 1-2\sum_{t=1}^{\frac{k-1}{2}}\frac{(2t)!^2(r-k-1)!^2(r-k)\big[(r-k)^2+(r-k)(2t-1)-2t-\frac{1}{4}\big]}{2^{4t-1}t!^2(r-k+t-1)!^2(r-k+t)}.\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках представим как

$$(r-k+t-1)(r-k+t)-(t+\frac{1}{2})^2.$$

Получим

$$\frac{(A^2_{r,k})''(0)}{M} = 1 - 2\sum_{t=1}^{\frac{k-1}{2}} \Big(\frac{(2t)!^2(r-k-1)!^2(r-k)(r-k+t-1)}{2^{4t-1}t!^2(r-k+t-1)!^2} - \frac{(2t)!^2(r-k-1)!^2(r-k)(t+\frac{1}{2})^2}{2^{4t-1}t!^2(r-k+t-1)!^2(r-k+t)}\Big)$$
$$= 1 - 2\sum_{t=1}^{\frac{k-1}{2}} \big(F(t) - F(t+1)\big) = 1 - 2F(1) + 2F\big(\frac{k+1}{2}\big),$$

где $F(t) = \frac{(2t)!^2(r-k-1)!^2(r-k)(r-k+t-1)}{2^{4t-1}t!^2(r-k+t-1)!^2}$. Очевидно, что $2F(1) = 1$, и потому

$$(A^2_{r,k})''(0) = 2MF\big(\frac{k+1}{2}\big) = \frac{\big(k+1\big)!^2\big(r-\frac{k+1}{2}\big)}{2^{2r-1}\big(\frac{k+1}{2}\big)!^2\big(r-\frac{k+1}{2}\big)!^2} > 0,$$

что доказывает первую часть леммы.

Пусть теперь $k = 2\ell$ четно. В этом случае количество слагаемых в обеих суммах в (5) равно $\ell - 1$. Отделим от второй суммы член с $t = 0$ и прибавим к ней член с $t = \ell$, который вычтем в конце. Далее, действуя, как в предыдущем случае, имеем

$$(A^2_{r,k})''(0) = M \cdot \Big(1 - 2\sum_{t=1}^{\ell} \big(F(t) - F(t+1)\big)\Big) - R = 2MF\big(\ell+1\big) - R,$$

где $R = \frac{k!(k+2)!}{2^{2r-1}r!^2} C_r^{\ell} C_r^{\ell+1}\big(r+\frac{1}{2}\big)$.

Упрощая, получим

$$(A^2_{r,k})''(0) = \frac{(2\ell+2)!^2(r-\ell)}{2^{2r+1}(\ell+1)!^2(r-\ell)!^2} - \frac{(2\ell)!(2\ell+2)!\big(r+\frac{1}{2}\big)}{2^{2r-1}\ell!(\ell+1)!(r-\ell)!(r-\ell-1)!}$$
$$= -\frac{(2\ell)!(2\ell+2)!(r-\ell)}{2^{2r-1}\ell!(\ell+1)!(r-\ell)!(r-\ell-1)!} < 0,$$

что доказывает вторую часть леммы, а с ней и теорему 1. □

Доказательство. Доказательство теоремы 2 проводится численно-аналитическим методом. В принципе эта схема проходит для любого фиксированного k, но с увеличением k требует все бóльших ресурсов.

Из формулы (3) очевидно, что $A^2_{r,k}(x) = P_{r,k}(x^2)\cdot(1-x^2)^{2r-2k-1}$, где $P_{r,k}$ – полином степени k. Поэтому

$$\frac{d\big[A^2_{r,k}(\sqrt{x})\big]}{dx} = P^{(1)}_{r,k}(x)\cdot(1-x)^{2r-2k-2},$$

где $P^{(1)}_{r,k}$ – также полином степени k. Легко видеть, что $P^{(1)}_{r,k} < 0$ в левой полуокрестности единицы, а из утверждения 2 теоремы 1 следует, что $P^{(1)}_{r,k} < 0$ в правой полуокрестности нуля.

Мы построим многочлен $\widetilde{P}_k$, такой, что все коэффициенты многочлена $\widetilde{P}_k(r\cdot)$ не превосходят соответствующих коэффициентов $-P^{(1)}_{r,k}$. Таким образом, $-P^{(1)}_{r,k}(x) \geqslant \widetilde{P}_k(rx)$ при $x \geqslant 0$. Далее, мы покажем, что многочлен $\widetilde{P}_k$ положителен вне промежутка $[c_1(k), c_2(k)]$, откуда следует, что все корни $P^{(1)}_{r,k}$ лежат в промежутке $[\frac{c_1(k)}{r}, \frac{c_2(k)}{r}]$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что

$$\frac{P_{r,k}(x)}{P_{r,k}(0)}\cdot(1-x)^{2r-2k-1} < 1, \qquad x \in \Big[\frac{c_1(k)}{r}, \frac{c_2(k)}{r}\Big]. \tag{6}$$

Сначала мы докажем (6) для достаточно больших r. Для этого запишем

$$\frac{P_{r,k}(x)}{P_{r,k}(0)} = Q^+_{r,k}(x) - Q^-_{r,k}(x),$$

где $Q^+_{r,k}$ – четный, а $Q^-_{r,k}$ – нечетный многочлен.

Построим многочлены $\widetilde{Q}^{\pm}_k$ с неотрицательными коэффициентами, такие, что при $r > r_0(k)$ все коэффициенты многочлена $\widetilde{Q}^+_k(r\cdot)$ не меньше соответствующих коэффициентов $Q^+_{r,k}$, а все коэффициенты $\widetilde{Q}^-_k(r\cdot)$ не больше соответствующих коэффициентов $Q^-_{r,k}$. Тогда при $r > r_0(k)$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{P_{r,k}(x)}{P_{r,k}(0)}\cdot(1-x)^{2r-2k-1} &\leqslant (\widetilde{Q}^+_k(rx) - \widetilde{Q}^-_k(rx))\cdot(1-x)^{2(r-k)-1}\\ &\leqslant (\widetilde{Q}^+_k(rx) - \widetilde{Q}^-_k(rx))\cdot\exp(-\alpha(k)rx),\end{aligned}$$

где $\alpha(k) \leqslant 2 - \frac{2k+1}{r_0(k)}$.

Таким образом, доказательство (6) для $r > r_0(k)$ сводится к доказательству неравенства

$$(\widetilde{Q}^+_k(y) - \widetilde{Q}^-_k(y))\cdot\exp(-\alpha(k)y) < 1, \qquad y \in \big[c_1(k), c_2(k)\big].$$

Это неравенство мы докажем, построив подходящую кусочно постоянную функцию f_k, оценивающую левую часть неравенства сверху. Для этого заметим, что в силу неотрицательности коэффициентов многочленов $\widetilde{Q}_k^{\pm}$ при $c_1(k) \leqslant y_0 \leqslant y \leqslant y_1 \leqslant c_2(k)$ верна оценка

$$(\widetilde{Q}_k^+(y) - \widetilde{Q}_k^-(y)) \cdot \exp(-\alpha(k)y) \leqslant (\widetilde{Q}_k^+(y_1) - \widetilde{Q}_k^-(y_0)) \cdot \exp(-\alpha(k)y_0).$$

Полученная оценочная функция f_k вычисляется на достаточно мелкой сетке. Полученное неравенство $f_k < 1$ доказывает (6) для $r > r_0(k)$.

При $r \leqslant r_0(k)$ поступим аналогично. Для каждого фиксированного $r \leqslant r_0(k)$ запишем многочлен в левой части (6) в виде разности

$$\frac{P_{r,k}(x)}{P_{r,k}(0)} = R_{r,k}^+(x) - R_{r,k}^-(x),$$

где $R_{r,k}^{\pm}$ – многочлены с неотрицательными коэффициентами.

Построим кусочно постоянную функцию $g_{r,k}$, оценивающую левую часть (6) сверху. Именно, при $\frac{c_1(k)}{r} \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \leqslant \frac{c_2(k)}{r}$ верна оценка

$$(R_{r,k}^+(x) - R_{r,k}^-(x)) \cdot (1-x)^{2(r-k)-1} \leqslant (R_{r,k}^+(x_1) - R_{r,k}^-(x_0)) \cdot (1-x_0)^{2(r-k)-1}.$$

Полученные оценочные функции $g_{r,k}$ вычисляются на достаточно мелкой сетке. Полученные неравенства $g_{r,k} < 1$ доказывают (6) для $r \leqslant r_0(k)$, откуда следует первое утверждение теоремы.

Значения $\lambda(r,4,2,\infty) = \big(A_{r,4}(0)\big)^{-1}$ и $\lambda(r,6,2,\infty) = \big(A_{r,6}(0)\big)^{-1}$ вычисляются по формулам (3) и (4). $\square$

Приложение

Здесь приводятся результаты вычислений, схема которых описана в доказательстве Теоремы 2.

1. $k = 4$.

$$\begin{aligned} -P_{r,4}^{(1)}(x) &= (16r^4 - 96r^3 + 200r^2 - 168r + 45)x^4 \\ &\quad + (-128r^3 + 656r^2 - 1056r + 540)x^3 \\ &\quad + (312r^2 - 1224r + 1134)x^2 + (-240r + 540)x + 45; \end{aligned}$$

$$\widetilde{P}_4(rx) := (3r^4)x^4 + (-228r^3)x^3 + (112r^2)x^2 + (-350r)x + 45.$$

$$c_1(4) = 0.1; \qquad c_2(4) = 76.$$

Поясним, почему коэффициенты $-P_{r,4}^{(1)}$ не меньше коэффициентов $\widetilde{P}_4(r\cdot)$. Для этого достаточно проверить, что разность каждой

пары соответствующих коэффициентов – полином от r с положительным старшим коэффициентом, все корни которого меньше 5 (поскольку $k = 4$ влечет $r \geqslant 5$). Например,

$$(16r^4 - 96r^3 + 200r^2 - 168r + 45) - 3r^4 \\ = r^2(13r^2 - 96r + 160) + (40r^2 - 168r + 45).$$

Корни обоих квадратных трёхчленов в скобках меньше 5. Для остальных коэффициентов рассуждения аналогичны.

Таким же образом получается, что $\widetilde{P}_4$ положителен вне $[c_1(4), c_2(4)]$:

$$3x^4 - 228x^3 + 112x^2 - 350x + 45 = (3x^2 - 228x + 56)x^2 + (56x^2 - 350x + 45).$$

Далее,

$$\begin{aligned} Q^+_{r,4}(x) &= \Big(\frac{16}{9}r^4 - \frac{128}{9}r^3 + \frac{104}{3}r^2 - 32r + 9\Big)x^4 \\ &\quad + \Big(\frac{56}{3}r^2 - 112r + 126\Big)x^2 + 1; \\ Q^-_{r,4}(x) &= \Big(\frac{32}{3}r^3 - \frac{688}{9}r^2 + \frac{440}{3}r - 84\Big)x^3 + (8r - 36)x; \\ \widetilde{Q}^+_4(rx) &:= \Big(\frac{17}{9}r^4\Big)x^4 + \Big(\frac{57}{3}r^2\Big)x^2 + 1; \\ \widetilde{Q}^-_4(rx) &:= \Big(\frac{26}{3}r^3\Big)x^3 + (7r)x. \end{aligned}$$

$$r_0(4) = 50; \qquad \alpha(4) = 1.8.$$

Поясним, почему коэффициенты $Q^-_{r,4}$ не меньше коэффициентов $\widetilde{Q}^-_4(r\cdot)$ при $r > r_0(4)$. Разность каждой пары соответствующих коэффициентов – многочлен от r, равный сумме двучленов, каждый из которых положителен при больших r. Например,

$$\Big(\frac{32}{3}r^3 - \frac{688}{9}r^2 + \frac{440}{3}r - 84\Big) - \frac{26}{3}r^3 = \Big(2r^3 - \frac{688}{9}r^2\Big) + \Big(\frac{440}{3}r - 84\Big).$$

Величина r_0 подбирается так, чтобы положительными были все двучлены. Аналогично показывается, что коэффициенты $\widetilde{Q}^+_4(r\cdot)$ не меньше коэффициентов $Q^+_{r,4}$.

Далее функции f_4 и $g_{r,4}$, $5 \leqslant r \leqslant 50$, были вычислены на следующей сетке:

Функция	Кол-во узлов
f_4	2^{11}
$g_{r,4}$, $5 \leqslant r \leqslant 9$	2^7
$g_{r,4}$, $10 \leqslant r \leqslant 21$	2^8
$g_{r,4}$, $22 \leqslant r \leqslant 44$	2^9
$g_{r,4}$, $45 \leqslant r \leqslant 50$	2^{10}

Расчет проводился с 17 значащими цифрами и дал оценку $1-f_4 \geqslant 10^{-5}$, $1-g_{r,4} \geqslant 10^{-5}$.

2. $k=6$.

$$
\begin{aligned}
&- P^{(1)}_{r,6}(x) = (64r^6-768r^5+3664r^4-8832r^3+11212r^2-6960r+1575)x^6\\
&\quad + (-1152r^5+12768r^4-54528r^3+111792r^2-109560r+40950)x^5\\
&\quad + (7440r^4-72960r^3+260760r^2-402240r+225225)x^4\\
&\quad + (-21120r^3+170640r^2-449040r+386100)x^3\\
&\quad + (26460r^2-156240r+225225)x^2+(-12600r+40950)x+1575;\\
&\widetilde{P}(rx) := (4r^6)x^6+(-1200r^5)x^5+(1000r^4)x^4\\
&\quad + (-22000r^3)x^3+(8000r^2)x^2+(-13000r)x+1575.\\
&c_1(6)=0.1; \qquad c_2(6)=300.
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
&Q^+_{r,6}(x) = \Big(\frac{64}{225}r^6-\frac{64}{15}r^5+\frac{5296}{225}r^4-\frac{1568}{25}r^3+\frac{19228}{225}r^2-\frac{836}{15}r+13\Big)x^6\\
&\quad + \Big(\frac{112}{5}r^4-288r^3+\frac{6104}{5}r^2-\frac{10584}{5}r+1287\Big)x^4\\
&\quad + (44r^2-396r+715)x^2+1;\\
&Q^-_{r,6}(x) = \Big(\frac{64}{15}r^5-\frac{1504}{25}r^4+\frac{22496}{45}r^3-\frac{17104}{25}r^2+\frac{10852}{15}r-286\Big)x^5\\
&\quad + \Big(\frac{736}{15}r^3-\frac{2736}{5}r^2+\frac{26216}{15}r-1716\Big)x^3+(12r-78)x.\\
&\widetilde{Q}^+(r\cdot) := \Big(\frac{74}{225}r^6\Big)x^6+\Big(\frac{202}{9}r^4\Big)x^4+\Big(\frac{1982}{45}r^2\Big)x^2+1;\\
&\widetilde{Q}^-(r\cdot) := \Big(\frac{172}{45}r^5\Big)x^5+\Big(\frac{716}{15}r^3\Big)x^3+\Big(\frac{104}{9}r\Big)x.\\
&r_0(6)=410; \qquad \alpha(6)=1.95.
\end{aligned}
$$

Все рассуждения для $k = 4$ повторяются дословно.

Далее функции f_6 и $g_{r,6}$, $7 \leqslant r \leqslant 410$, были вычислены на следующей сетке:

Функция	Кол-во узлов
f_6	2^{15}
$g_{r,6}$, $7 \leqslant r \leqslant 42$	2^{11}
$g_{r,6}$, $43 \leqslant r \leqslant 86$	2^{12}
$g_{r,6}$, $87 \leqslant r \leqslant 173$	2^{13}
$g_{r,6}$, $174 \leqslant r \leqslant 348$	2^{14}
$g_{r,6}$, $349 \leqslant r \leqslant 410$	2^{15}

Расчет проводился с 17 значащими цифрами и дал оценку $1-f_6 \geqslant 10^{-5}$, $1 - g_{r,6} \geqslant 10^{-5}$.

Литература

1. M. Belloni, B. Kawohl, *A symmetry problem related to Wirtinger's and Poincare's inequality.* — J. Diff. Eq. **156** (1999), 211–218.
2. А. П. Буслаев, В. А. Кондратьев, А. И. Назаров, *Об одном семействе экстремальных задач и связанных с ним свойствах одного интеграла.* — Мат. заметки. **64** (1998), No. 6, 830–838.
3. B. Dacorogna, W. Gangbo, N. Subia, *Sur une généralisation de lTinégalité de Wirtinger.* — Ann. Inst. H. Poincaré. Analyse Non Linéaire. **9** (1992), 29–50.
4. Y. V. Egorov, *On a Kondratiev problem.* — C.R.A.S. Paris. Ser. I, **324** (1997), 503–507.
5. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* Москва. Гос. издательство иностранной литературы, 1948.
6. M. Janet, *Sur une suite de fonctions considérée par Hermite et son application à un problème du calcul des variations.* — C.R.A.S. Paris, **190** (1930), 32.
7. Г. А. Калябин, *Точные оценки для функций класса* $\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1)$. — Труды МИАН, **269** (2010), 143–149.
8. B. Kawohl, *Symmetry results for functions yelding best constants in Sobolev-type inequalities.* — Discr. Contin. Dyn. Syst., **6** (2000), N3, 683–690.
9. В. И. Левин, *О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств.* — Мат. Сборник, Н.С., **4** (1938), 309–324.
10. А. И. Назаров, *О точной константе в обобщенном неравенстве Пуанкаре.* — Теор. функ. и прилож. (Пробл. мат. ан. Вып.24), Нов., Т.Рожковская, 2002, 155–180.
11. А. И. Назаров, А. Н. Петрова, *О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка.* — Вестник СПб. унив. (2008), Сер. 1, вып. 4, 16–20.

12. В. А. Стеклов, *Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня.* — Сообщ. Харьковского мат. общества, Сер. 2, **5** (1896), 136–181.
13. W. Stekloff, *Problème de refroidissement d'une barre hétérogène.* — Ann. fac. sci. Toulouse, Sér. 2, **3** (1901), 281–313.
14. E. Schmidt, *Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet.* — Math. Ann., **117** (1940), 301–326.
15. K. Watanabe, Y. Kametaka, A. Nagai, H. Yamagishi, K. Takemura, *Symmetrization of functions and the best constant of 1-dim L^p Sobolev inequality.* — J. Inequal. Appl. **2009** (2009), Article ID 874631, 12pp.
16. K. Watanabe, Y. Kametaka, H. Yamagishi, A. Nagai, K. Takemura, *The best constant of Sobolev inequality corresponding to clamped boundary value problem.* — Bound. Value Probl., **2011** (2011), Article ID 875057, 17 pp.

Mukoseeva E. V., Nazarov A. I. On symmetry of the extremal in some embedding theorems.

We study the symmetry/asymmetry of functions providing sharp constants in the embedding theorems $\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}_\infty^k(-1,1)$ for various r and k. The sharp constants for all $r > k$ in the cases $k = 4$ and $k = 6$ are calculated explicitly as well.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ,
С.-Петербург, Россия

Поступило 5 августа 2014 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия

E-mail: al.il.nazarov@gmail.com