Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

Д. М. Столяров

БИЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $\mathbb{R}^2$

§1. Введение

Цель настоящей работы – предложить обобщения знаменитого неравенства Гальярдо–Ниренберга в его простейшей форме:

$$\big|\langle f, g\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)}\big| \lesssim \|\partial_1 f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\|\partial_2 g\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем мы пишем "$a \lesssim b$" вместо "$a \leqslant Cb$ для некоторой равномерной константы C" для краткости; мы также будем писать $a \asymp b$, когда $a \lesssim b$ и $b \lesssim a$. Символ ∂_j, $j = 1, 2$, обозначает дифференцирование по j-й координате.

Более точно, мы изучаем оценки скалярного произведения двух функций в некотором гильбертовом пространстве (в данной работе, в некотором потенциальном пространстве Соболева дробного порядка) в терминах произведения L_1-норм результатов применения некоторых дифференциальных полиномов к этим функциям. Интерес автора к неравенствам такого типа происходит из работы над задачами неизоморфизма для банаховых пространств и теоремами вложения, которые там используются, см. краткое сообщение [2] и препринт [9].

Введем удобный формализм для сокращения формулировок утверждений. Пусть k и l – натуральные числа, α и β – вещественные неотрицательные числа, а σ и τ – комплексные ненулевые числа. Символом $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ мы обозначаем утверждение о том, что неравенство

$$\Big|\langle f, g\rangle_{W_2^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^2)}\Big| \lesssim \big\|(\partial_1^k - \tau\partial_2^l)f\big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\,\big\|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)g\big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \tag{1.2}$$

выполнено для всех функций f и g из класса Шварца. Скалярное произведение в левой части неравенства – это скалярное произведение в

Ключевые слова: теоремы вложения, билинейные операторы, оценки Стрихартца.

Работа поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ 11.G34.31.0026, ОАО "Газпром Нефть", грантом РФФИ 14-01-00198 и стипендией им. В. А. Рохлина.

пространстве Соболева дробного порядка,

$$\langle f, g\rangle_{W_2^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi,\eta)\overline{\widehat{g}(\xi,\eta)}|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}\, d\xi d\eta. \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем, символом $\widehat{\varphi}$ мы обозначаем преобразование Фурье функции φ. Когда α и β целые числа, $W_2^{\alpha,\beta}$ есть классическое анизотропно однородное пространство Соболева, заданное полунормой $\|\partial_1^\alpha\partial_2^\beta f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}$. Если p и q целые, то

$$\langle \partial_1^p\partial_2^q f, \partial_1^p\partial_2^q g\rangle_{W_2^{\alpha,\beta}} = (2\pi)^{2p+2q}\langle f, g\rangle_{W_2^{\alpha+p,\beta+q}}. \tag{1.4}$$

Неравенства типа (1.2) однородны не в обычном смысле, они *анизотропно* однородны. Преобразования, которые сохраняют правую часть неравенства (1.2) (и поэтому должны сохранять и левую часть) имеют вид не $(x,y)\mapsto(\lambda x,\lambda y)$, а $(x,y)\mapsto(\lambda^l x,\lambda^k y)$. Базовые сведения о теоремах вложения такого типа изложены, например, в книге [1] (см. также работы [4] и [5], где рассмотрен случай предельного показателя суммируемости). Используя указанное растяжение, мы видим, что утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ может быть выполнено лишь при условии

$$\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{k} + \frac{\beta+\frac{1}{2}}{l} = 1. \tag{1.5}$$

Может показаться, что истинность утверждения BE не должна сильно зависеть от параметров σ и τ. Тем не менее, один момент необходимо отметить с самого начала: *эллиптический* случай стоит рассматривать отдельно от неэллиптического.

Определение 1.1. *Назовем набор чисел (k,l,σ,τ) эллиптическим, если оба многочлена*

$$\xi^k - \sigma_1\eta^l \quad \textit{и} \quad \xi^k - \tau_1\eta^l,\ \tau_1 = (2\pi i)^{l-k}\tau,\ \sigma_1 = (-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$$

не имеют вещественных корней за исключением 0.

Здесь и далее τ_1 всегда обозначает $(2\pi i)^{l-k}\tau$, σ_1 всегда обозначает $(-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$. В случае нечетности одного из чисел k и l эллиптичность означает, что числа τ_1 и σ_1 не являются вещественными. Если оба числа k и l четны, числа σ_1 и τ_1 могут быть вещественными отрицательными. Формулировать результаты начнем с эллиптического случая.

Теорема 1.1. *Предположим, что числа k и l натуральны, а набор (k, l, σ, τ) – эллиптический. Утверждение* $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ *выполнено в том и только том случае, если одно из чисел k и l нечетно, $\alpha = \frac{k-1}{2}$, $\beta = \frac{l-1}{2}$, а числа σ_1 и τ_1 имеют отличные от нуля мнимые части одного знака.*

Импликация "тогда" теоремы была доказана в препринте [9]. Тем не менее, здесь мы приведем ее доказательство для полноты изложения. Кроме того, это доказательство служит хорошим введением к доказательству аналогичной теоремы в неэллиптическом случае. В теореме 1.1 стоит выделить особый случай $\sigma = \tau$.

Следствие 1.1. *Утверждение* $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \sigma)$ *не выполнено, если набор (k, l, σ, σ) является эллиптическим.*

Более того, из доказательства следует, что неравенство

$$\|f\|_{W_2^{\alpha,\beta}} \lesssim \left\|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f\right\|_{L_1}$$

не выполнено, если набор (k, l, σ, σ) является эллиптическим. Теорема 1.1 в некотором смысле удивительна. Обычно, если существует вложение в пространство $W_2^{\frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}}$, то естественно ожидать, что вложение существует для всех пар (α, β), удовлетворяющих уравнению (1.5) (например, это так для всех теорем вложения из работ [4] и [5]). Тем не менее, в рассматриваемом случае этот принцип не работает, в основном из-за того, что мы имеем дело с билинейными оценками.

Предельный случай $\sigma = \infty, \tau = 0$ был рассмотрен в работе [10], в которой было доказано неравенство

$$\left|\langle f, g\rangle_{W_2^{\frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}}(\mathbb{R}^2)}\right| \lesssim \left\|\partial_1^k f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \left\|\partial_2^l g\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Это неравенство влечет за собой неравенство

$$\|f\|^2_{W_2^{\frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}}} \lesssim \|\partial_1^k f\|_{L_1} \|\partial_2^l f\|_{L_1},$$

которое является очень частным случаем теоремы вложения Солонникова [5] (см. также работу [4], в которой приведены более сильные результаты, и работу [3], в которой приведено детальное описание того, почему это неравенство следует из гораздо более общих теорем из работы [5]). Используя однородность, последнее неравенство можно переписать так:

$$\|f\|_{W_2^{\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2}}} \lesssim \|\partial_1^k f\|_{L_1}+\|\partial_2^l f\|_{L_1} \asymp \big\|(\partial_1^k-\tau\partial_2^l)f\big\|_{L_1}+\big\|(\partial_1^k-\sigma\partial_2^l)f\big\|_{L_1},$$

где $\sigma \neq \tau$. Отметим, что утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2},\sigma,\tau)$ отсюда не следует (так как по теореме 1.1 может не выполняться), здесь мультипликативная и аддитивная формы не эквивалентны.

Когда мы рассматриваем неэллиптический случай и $k \neq l$ (случай $k = l$ – особый), мы работаем с подобием оценок Стрихартца (см., например, книгу [12]). Это подсказывает нам, что рассмотрение неэллиптического случая приведет нас к некоторым осцилляторным интегралам (к счастью, одномерным), которых не избежать при рассмотрении оценок Стрихартца. Однако основную трудность по-прежнему представляет пространство L_1 в правой части неравенства (1.2).

Теорема 1.2. *Пусть числа k и l натуральны, одно из них нечетно и $k \neq l$. Предположим, что σ и τ – комплексные числа, такие что оба числа $\tau_1 = (2\pi i)^{l-k}\tau$ и $\sigma_1 = (-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$ вещественны. Тогда утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2},\sigma,\tau)$ верно.*

Простой алгебраический прием влечет положительные результаты для случая четных чисел k и l.

Следствие 1.2. *Предположим, что оба числа k и l четны, но в одно из них множитель 2 входит лишь в первой степени. Тогда утверждения*

$$\mathrm{BE}\Big(k,l,\frac{3}{4}k-\frac{1}{2},\frac{1}{4}l-\frac{1}{2},\sigma,\tau\Big) \quad \text{и} \quad \mathrm{BE}\Big(k,l,\frac{1}{4}k-\frac{1}{2},\frac{3}{4}l-\frac{1}{2},\sigma,\tau\Big)$$

верны, если числа σ_1 и τ_1 вещественны, различны и положительны.

Имеются у нас и отрицательные результаты для случая неэллиптических операторов.

Лемма 1.3. *Утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ неверно в случае $\sigma = \tau$ и $k \neq l$.*

Эта лемма есть простое следствие довольно хорошо известной конструкции, которая называется примером Knapp'а (см. [12]). Автор не смог найти ссылку, точно подходящую к нашему случаю, так что мы повторим это стандартное рассуждение. Отметим, что эффект, благодаря которому утверждение BE неверно в этом случае, совсем не такой, как в теореме 1.1. В лемме 1.3 все дело в некоем осцилляторном интеграле, в то время как в упомянутой теореме "расходится" сингулярный интеграл. Мы ограничиваемся случаем $k \neq l$, потому что он более сложный и интересный. Безусловно, заключения теоремы 1.2, следствия 1.2 и леммы 1.3 верны (с немного другими, но более простыми доказательствами) и в случае $k = l$. Мы пропускаем эти случаи.

Текст организован следующим образом: в §2 мы разбираемся с эллиптическим случаем (доказываем теорему 1.1); в §3 мы работаем над неэллиптическими случаями; наконец, §4 посвящен объяснениям, почему наши результаты для неэллиптического случая неполны, мы также приводим несколько связанных с рассматриваемыми вопросами результатов и гипотез, касающихся линейных и квадратичных неравенств. В этом последнем параграфе мы избегаем подробных доказательств, но даем наброски (описываемые там результаты неполны и нуждаются в дальнейшей разработке; кроме того, это близкая, но другая история).

Работа имеет скорее технический характер: скорее всего, не только доказательства, но и сами утверждения не обладают достаточной общностью (наибольший недостаток – двумерность наших теорем вложения). Тем не менее, явление как таковое (особенно неэллиптические случаи) кажется автору принципиально новым. Оба этих обстоятельства заставляют нас уделять повышенное внимание деталям в §§2 и 3.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за постановку задачи и внимание к работе, а также А. И. Назарову за ценные замечания.

§2. Эллиптический случай

Мы будем доказывать теорему 1.1 в следующем порядке: сначала мы докажем, что утверждение BE выполнено, если параметры удовлетворяют условиям теоремы; после чего мы сконструируем контрпримеры, которые опровергнут утверждение BE во всех остальных случаях. К сожалению, нам не удалось достаточно хорошо формализовать вторую часть: хотя идеология контрпримеров ясна, техника варьируется при разных параметрах.

2.1. Доказательство утверждения ВЕ **в случае нечетного числа** k**.** Пусть хотя бы одно из чисел k и l нечетно; пользуясь симметрией, можем считать, что число k нечетно. В дальнейшем мы предполагаем, что числа σ_1 и τ_1 различны (случай, когда они равны, немного отличается и будет рассмотрен впоследствии). Функции f и g лежат в классе Шварца, следовательно, их преобразования Фурье бесконечно дифференцируемы и быстро убывают на бесконечности. Таким образом, мы можем представить скалярное произведение в левой части неравенства (1.2) как предел,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi,\eta)\overline{\widehat{g}(\xi,\eta)}\xi^{k-1}|\eta|^{l-1}\,d\xi d\eta = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \widehat{f}(\xi,\eta)\overline{\widehat{g}(\xi,\eta)}\xi^{k-1}|\eta|^{l-1}\,d\xi d\eta,$$

здесь $\Omega_{\varepsilon,R} = \{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leqslant |\eta| \leqslant R\}$. Далее, мы заменяем преобразования Фурье под интегралом выражениями в терминах функций f_1 и g_1, которые берутся из формул

$$\big((2\pi i\xi)^k - \tau(2\pi i\eta)^l\big)\widehat{f}(\xi,\eta) = \widehat{f_1}(\xi,\eta);\ \big((2\pi i\xi)^k - \sigma(2\pi i\eta)^l\big)\widehat{g}(\xi,\eta) = \widehat{g}_1(\xi,\eta),$$

то есть, выражение $\|f_1\|_{L_1}\|g_1\|_{L_1}$ совпадает с правой частью неравенства (1.2). Мы должны оценить следующий интеграл:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{|\eta|^{l-1}\xi^{k-1}\widehat{f_1}(\xi,\eta)\overline{\widehat{g_1}(\xi,\eta)}\,d\xi d\eta}{\big((2\pi i\xi)^k - \tau(2\pi i\eta)^l\big)\big((-2\pi i\xi)^k - \overline{\sigma}(-2\pi i\eta)^l\big)}.$$

Знаменатель подынтегрального выражения не зануляется на $\mathbb{R}^2$, кроме как в точке 0, благодаря условию эллиптичности. В таком случае (при фиксированных ε и R), мы заменяем $\widehat{f_1}$ и $\widehat{g}_1$ в последней формуле на их определения в терминах f_1 и g_1 и меняем порядок интегрирования:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \iint F(\varepsilon,R,x_1,x_2,y_1,y_2) f_1(x_1,x_2)\overline{g_1(y_1,y_2)}\,dy_1dy_2dx_1dx_2, \qquad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} &F(\varepsilon,R,x_1,x_2,y_1,y_2) &(2.2)\\ &\quad= \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{|\eta|^{l-1}\xi^{k-1}e^{2\pi i((x_1-y_1)\xi+(x_2-y_2)\eta)}}{((2\pi i\xi)^k - \tau(2\pi i\eta)^l)((-2\pi i\xi)^k - \overline{\sigma}(-2\pi i\eta)^l)}d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Чтобы доказать неравенство (1.2), достаточно показать, что модуль выражения (2.1) не превосходит выражения $C\|f_1\|_1\|g_1\|_1$. Для этого мы докажем, что функция (2.2) равномерно ограничена при всех ε и R, $0 < \varepsilon \leqslant R < \infty$, и почти всех четверках вещественных чисел x_1, x_2, y_1, y_2. Все становится немного проще, если в выражении (2.2) сначала проинтегрировать по ξ, а потом – по η, и во внутреннем интеграле ввести новую переменную ρ согласно правилу $\xi = \rho|\eta|^{l/k}$. Это влечет формулу

$$F(\varepsilon, R, x_1, x_2, y_1, y_2)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \int\limits_{\varepsilon\leqslant|\eta|\leqslant R} |\eta|^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^{k-1}e^{2\pi i(a\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{\big(\rho^k - \tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)\big(\rho^k - \sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)}\, d\rho d\eta,$$

мы ввели обозначения $a = x_1 - y_1$, $b = x_2 - y_2$, а τ_1 и σ_1 были введены в определении 1.1.

Интегрирование по η ведется по объединению $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$, и мы докажем индивидуальную ограниченность интеграла по каждому из этих двух интервалов. Благодаря симметрии, мы можем рассматривать лишь интервал $[\varepsilon, R]$ (поэтому $\operatorname{sign}\eta$ в знаменателе уйдет). Для определенности мы предполагаем, что $a > 0$ (противоположный случай сводится к этому, если заменить ρ на $-\rho$; отметим, что мы можем не рассматривать случай $a = 0$, так как он соответствует множеству меры 0). После этого, в качестве переменной во внешнем интеграле выберем $(2\pi a)^{k/l}\eta$; эта замена приведет к изменению параметров b, ε и R, но позволит считать, что $2\pi a = 1$. Мы должны показать, что следующий интеграл равномерно ограничен по ε, R, $0 \leqslant \varepsilon < R$, и b:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} \eta^{-1} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}e^{i(\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{(\rho^k - \tau_1)(\rho^k - \sigma_1)}\, d\rho \right) d\eta. \tag{2.3}$$

Вычислим интеграл по ρ с использованием формулы вычетов, считая ρ комплексной переменной. Подинтегральное выражение быстро убывает на бесконечности в верхней полуплоскости. Проинтегрировав по контуру, который состоит из интервала $[-r, r]$ и верхней полукружности радиуса r с центром в нуле, а затем перейдя к пределу при $r \to \infty$, видим, что рассматриваемый интеграл есть $2\pi i$ умножить на сумму вычетов в полюсах подынтегральной функции в верхней полуплоскости. Все полюса являются простыми и суть корни k-ой степени из чисел τ_1 и σ_1 (мы предполагали, что $\sigma_1 \neq \tau_1$). Пусть $u^k = \tau_1$ (и $\operatorname{Re} u > 0$). Представляя подынтегральное выражение в виде $\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}$

с $\psi(\rho) = \rho^k - \tau_1$ и пользуясь тем, что функция φ регулярна в точке u, видим, что вычет в точке u таков:

$$\frac{\varphi(u)}{\psi'(u)} = \frac{u^{k-1}e^{i(u|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{ku^{k-1}(\tau_1-\sigma_1)} = \frac{e^{i(u|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{k(\tau_1-\sigma_1)}.$$

Аналогично, если $v^k = \sigma_1$ (и $\operatorname{Re} v > 0$), то вычет в точке v равен

$$\frac{e^{i(v|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{k(\sigma_1-\tau_1)}.$$

В наших предположениях о числах σ_1 и τ_1, уравнения $\rho^k = \tau_1$ и $\rho^k = \sigma_1$ имеют одно и то же число корней в верхней полуплоскости. Это показывает, что с точностью до константы, интеграл (2.3) равен сумме $(k \pm 1)/2$ выражений вида

$$\frac{1}{k(\tau_1-\sigma_1)}\int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{ib\eta}\frac{e^{iu|\eta|^{l/k}} - e^{iv|\eta|^{l/k}}}{\eta}d\eta, \tag{2.4}$$

где u и v – некоторые корни k-ой степени в верхней полуплоскости, соответственно, из τ_1 и σ_1 (отметим, что, к счастью, знаменатели в двух упомянутых формулах для вычетов противоположны друг другу).

Вспомним, что число b вещественно, так что мы оцениваем абсолютную величину подынтегральной функции через $C|u-v|\eta^{\frac{l}{k}-1}$ при $\eta \leqslant 1$ и через $e^{-\operatorname{Im} u|\eta|^{l/k}} + e^{-\operatorname{Im} v|\eta|^{l/k}}$ при $\eta > 1$. Оба интеграла $\int_0^1 \eta^{\frac{l}{k}-1}\,d\eta$ и $\int_1^\infty (e^{-\operatorname{Im} u|\eta|^{l/k}} + e^{-\operatorname{Im} v|\eta|^{l/k}})\,d\eta$ сходятся. Это завершает доказательство утверждения $\mathrm{BE}(k, l, \frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}, \sigma, \tau)$, где k нечетно и σ_1 и τ_1 являются различными числами с мнимыми частями одного знака.

Случай $\sigma_1 = \tau_1$ может быть рассмотрен аналогично. Теперь все полюса функции $\rho \mapsto \frac{\rho^{k-1}e^{i(\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{(\rho^k-\tau_1)(\rho^k-\sigma_1)}$ имеют порядок 2. После вычислений, двумерный интеграл (2.3) представляется в виде линейной комбинации одномерных интегралов вида

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{ib\eta}|\eta|^{\frac{l}{k}-1}e^{iu|\eta|^{l/k}}d\eta.$$

То же самое можно получить и предельным переходом при $\tau_1 \to \sigma_1$ в формуле (2.4). Этот интеграл равномерно ограничен, снова в силу условия $\operatorname{Im} u > 0$.

Замечание 2.1. *На самом деле, мы доказали, что обобщенная функция $M_{k,l,\sigma,\tau}$, которая определяется формулой*

$$\langle M_{k,l,\sigma,\tau},\phi\rangle = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{|\eta|^{l-1}\xi^{k-1}\phi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\big((2\pi i\xi)^k-\tau(2\pi i\eta)^l\big)\big((-2\pi i\xi)^k-\overline{\sigma}(-2\pi i\eta)^l\big)}, \quad \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \tag{2.5}$$

имеет ограниченное преобразование Фурье. Мы не выделяем это в качестве утверждения, так как a priori неясно, почему формула (2.5) определяет обобщенную функцию. Согласно классической теореме Мальгранжа–Эренпрейса,

$$\frac{1}{\big((2\pi i\xi)^k-\tau(2\pi i\eta)^l\big)\big((-2\pi i\xi)^k-\overline{\sigma}(-2\pi i\eta)^l\big)}$$

является обобщенной функцией из класса $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$ (и даже из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, см. [8]), тем не менее, неясно, может ли она быть умножена на негладкую функцию $|\eta|^{l-1}$.

2.2. Контрпримеры. Предположим, что утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ выполнено. В таком случае, α и β должны удовлетворять уравнению (1.5). В этом параграфе будет построена пара функций f и g (зависящих от параметров), которые дадут дальнейшие ограничения на числа $k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau$. Мы также предполагаем, что если по крайней мере одно из чисел k и l четно, то четно l.

Пусть φ, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, – бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}$, равная 1 около нуля. Положим $\psi(\xi,\eta)=\varphi\big(\sqrt{\xi^{2k}+\eta^{2l}}\big)$ и $\psi_t(\xi,\eta)=\psi(\frac{\xi}{t^l},\frac{\eta}{t^k})$, где $t>0$ – достаточно большое число. Далее, пусть $V=\psi_t-\psi$ и $h=\check{V}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Тогда $L_1(\mathbb{R}^2)$-норма функции h оценивается константой, не зависящей от t. В то же самое время, ее преобразование Фурье $\widehat{h}=V$ равно 0 около начала координат и равно 1 на большом множестве, если t велико. Отметим также, что $V(\xi,\eta)=v(\sqrt{\xi^{2k}+\eta^{2l}})$ для некоторой функции $v\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$.

Определим функции $F,G\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ уравнениями

$$(\partial_1^k-\tau\partial_2^l)F=(\partial_1^k-\sigma\partial_2^l)G=h.$$

Эти уравнения достаточно легко разрешимы после перехода к преобразованию Фурье:

$$\widehat{F}(\xi,\eta)=\frac{V(\xi,\eta)}{(2\pi i\xi)^k-\tau(2\pi i\eta)^l},\quad \widehat{G}(\xi,\eta)=\frac{V(\xi,\eta)}{(2\pi i\xi)^k-\sigma(2\pi i\eta)^l},$$

и ясно, что решения лежат в классе Шварца (напомним, что полиномы в знаменателях не обращаются в ноль за исключением точки 0).

Теперь неравенство (1.2) с этими F и G влечет оценку

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|V(\xi,\eta)|^2|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}\,d\xi d\eta}{\big((2\pi i\xi)^k-\tau(2\pi i\eta)^l\big)\big((-2\pi i\xi)^k-\overline{\sigma}(-2\pi i\eta)^l\big)}\Big|\lesssim 1$$

независимо от t. Преобразуя интеграл так, как мы делали это раньше, включая замену переменных $\xi=\rho|\eta|^{\frac{l}{k}}$, придем к соотношению

$$\Big|\int\limits_{0}^{+\infty}|\eta|^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{V\big(\rho|\eta|^{\frac{l}{k}},\eta\big)^2|\rho|^{2\alpha}}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)}\,d\rho d\eta\Big|\lesssim 1.$$

Степень $|\eta|^{-1}$ во внешнем интеграле возникает после небольших вычислений, использующих уравнение (1.5). Как и в п. 2.1, в знаменателе по пути возникнут величины $\operatorname{sign}\eta$, которые исчезают, если число l четно. Если же оба числа k и l нечетны, тот же результат получится после взятия интеграла по η отдельно по лучам $(-\infty,0]$ и $[0,\infty)$ и замены переменной $\rho\to-\rho$ в первом из двух образовавшихся слагаемых. Меняя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[\frac{|\rho|^{2\alpha}}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{v^2\big(\sqrt{\rho^{2k}\eta^{2l}+\eta^{2l}}\big)}{\eta}\,d\eta\Bigg]d\rho.$$

Очевидная замена переменных показывает, что интеграл по η равен $\int_0^\infty\frac{v^2(u^l)}{u}\,du$, так что он не зависит от ρ и может быть сколь угодно большим, если t велико. Таким образом, утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ может быть выполнено, только если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\rho|^{2\alpha}\,d\rho}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)}=0. \tag{2.6}$$

2.2.1. Случай четного числа k (оба числа k и l четны). В этом случае интеграл (2.6) может быть переписан в виде

$$2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\rho|^{2\alpha}\,d\rho}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)}=\frac{2}{k}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\big(\rho-\tau_1\big)\big(\rho-\sigma_1\big)}.$$

Оба числа k и l четны, поэтому в силу симметрии мы можем предположить, что $\alpha \leqslant \frac{k-1}{2}$. Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$ немного отличается от остальных.

Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$ и $\sigma_1 \neq \tau_1$. В этом случае рассматриваемый интеграл может быть вычислен напрямую:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\rho}{(\rho-\tau_1)(\rho-\sigma_1)} = \frac{\log(-\sigma_1)-\log(-\tau_1)}{\sigma_1-\tau_1} \neq 0,$$

где $\sigma_1 \neq \tau_1$. Здесь log есть ветвь логарифма, определенная при $\arg z \in [0, 2\pi)$ и вещественная при $\arg z = 0$.

Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$ и $\sigma_1 = \tau_1$. Если $\sigma_1 = \tau_1$, то интеграл (2.6) равен τ_1^{-1}, что также отлично от нуля.

Случай $\alpha < \frac{k-1}{2}$, $\sigma_1 \neq \tau_1$. В этом случае интеграл может быть переписан так:

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{(\rho-\tau_1)(\rho-\sigma_1)} = \frac{1}{\sigma_1-\tau_1}\Bigg(\int\limits_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\rho-\sigma_1} - \int\limits_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\rho-\tau_1}\Bigg).$$

Эти интегралы абсолютно сходятся в силу сделанного предположения $\frac{2\alpha-k+1}{k} < 0$. Таким образом, необходимо доказать, что функция Φ, задаваемая формулой

$$\Phi(\zeta) = \int\limits_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\rho-\zeta},$$

является инъективной функцией на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$. Перечислим свойства функции Φ.

(1) Функция Φ голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.
(2) Функция Φ не есть тождественный ноль, к примеру, она положительна на $\mathbb{R}_-$.
(3) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ имеем $\Phi(\lambda\zeta) = \lambda^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\Phi(\zeta)$.

Третье свойство можно получить, если сделать замену переменных в интеграле, определяющем функцию Φ. Пусть $\Delta(z)$ есть ветвь функции $z \mapsto z^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}$, определенная на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и положительная на отрицательной вещественной полуоси. Согласно третьему свойству функции Φ, $\Phi(\zeta) = \Phi(-1)\Delta(\zeta)$, когда ζ принимает отрицательные вещественные значения. По теореме единственности для аналитических функций, $\Phi(\zeta) = \Phi(-1)\Delta(\zeta)$ для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Но функция Δ инъективна, так как $\frac{2\alpha-k+1}{k} > -1$ (поскольку число α неотрицательно).

Случай $\alpha < \frac{k-1}{2}$, $\sigma_1 = \tau_1$. Заметим, что рассматриваемый интеграл (2.6) в этом случае равен $\Phi'(\sigma_1)$ (где Φ есть голоморфная функция, введенная выше). Его значение отлично от нуля, так как производная голоморфной инъективной функции не может иметь нулей.

2.2.2. Случай нечетного числа k. В этом случае имеем $|\rho|^{k-1} = \rho^{k-1}$, и интеграл (2.6) может быть переписан так ($s = \rho^k$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\rho|^{2\alpha}}{\left(\rho^k - \tau_1\right)\left(\rho^k - \sigma_1\right)}\, d\rho = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{(s-\tau_1)(s-\sigma_1)}\, ds.$$

Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$, числа σ_1 и τ_1 имеют мнимые части разных знаков. В этом случае в числителе в последнем интеграле стоит единица, мы интегрируем аналитическую функцию. Интегрируя по тому же контуру, как и в п. 2.1, видим, что интеграл равен нулю, если σ_1 и τ_1 имеют мнимые части одного знака, и не равен нулю, если разных знаков.

Случай $\alpha \neq \frac{k-1}{2}$, $\sigma_1 \neq \tau_1$. Как и раньше, перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{\tau_1 - \sigma_1} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \Big(\frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s-\tau_1} - \frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s-\sigma_1} \Big)\, ds$$

и введем функцию Φ согласно правилу

$$\Phi(\zeta) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s-\zeta}\, ds.$$

Ниже перечислены свойства функции Φ (отметим, что нам нужно проверить, что существует предел по R).

(1) Функция Φ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (в частности, предел по R существует).
(2) Функция Φ отлична от нуля, например, отлична от нуля на мнимой оси (чисто мнимая).
(3) Для всех допустимых ζ верно равенство $\Phi(-\zeta) = -\Phi(\zeta)$.
(4) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ выполнено соотношение $\Phi(\lambda\zeta)=\lambda^{\frac{2\alpha-k+1}{\alpha}}\Phi(\zeta)$.

Только первое свойство требует доказательства (включая доказательство того, что функция Φ корректно определена). Записывая

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s-\zeta}\,ds=\int\limits_{0}^{R}s^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\Big(\frac{1}{s-\zeta}-\frac{1}{s+\zeta}\Big)\,ds=\int\limits_{0}^{R}\frac{2\zeta s^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{(s-\zeta)(s+\zeta)}\,ds,$$

мы снова получим абсолютно сходящийся интеграл, так как $\frac{2\alpha-k+1}{k}<1$ согласно равенству (1.5).

Мы должны доказать, что функция Φ инъективна на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Обозначим символом Δ ветвь экспоненты $z^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}$, которая соответствует изменению аргумента в интервале $(-\pi,\pi]$ и отображает полуось $\mathbb{R}_+$ саму на себя. Благодаря неравенству $|\frac{2\alpha-k+1}{k}|<1$, функция Δ инъективна. Более того, так как Δ переводит верхнюю полуплоскость либо в верхнюю, либо в нижнюю полуплоскость (в зависимости от знака числа $(2\alpha-k+1)$), видим, что

$$\Delta(\zeta_1)+\Delta(\zeta_2)\neq 0 \tag{2.7}$$

всегда, когда $\zeta_1,\zeta_2\in\mathbb{C}_+$.

Теперь рассмотрим точку ζ_0, лежащую внутри первого квадранта. Если $|\arg\lambda|<\delta$, где δ достаточно мало, то $\lambda\zeta_0\in\mathbb{C}_+$, и функция $\lambda\mapsto\Phi(\lambda\zeta_0)$ аналитична. Но для $\lambda>0$ имеем

$$\Phi(\lambda\zeta_0)=\Delta(\lambda)\Phi(\zeta_0)$$

по четвертому свойству функции Φ, так что $\Phi(\lambda\zeta_0)=C\Delta(\lambda\zeta_0)$ при $|\arg\lambda|<\delta$. По теореме единственности, $\Phi(\zeta)=C\Delta(\zeta)$ для всех $\zeta\in\mathbb{C}_+$. Очевидно, $C\neq 0$, так как функция Φ отлична от нуля на мнимой полуоси.

Теперь видим, что сужения $\Phi\,|_{\mathbb{C}_+}$ and $\Phi\,|_{\mathbb{C}_-}$ инъективны. Если $\zeta_1\in\mathbb{C}_+$ и $\zeta_2\in\mathbb{C}_-$, то $\Phi(\zeta_1)\neq\Phi(\zeta_2)$ согласно формуле (2.7), поскольку функция Φ нечетна.

Случай $\alpha\neq\frac{k-1}{2}$, $\sigma_1=\tau_1$. Так же, как и в случае нечетных параметров, рассматриваемый интеграл равен $\Phi'(\sigma_1)$. Это значение отлично от нуля, так как является значением производной инъективного аналитичного отображения.

§3. Неэллиптический случай

3.1. Доказательство теоремы 1.2. Более удобно работать с функциями f и g, имеющими компактный носитель. Следующее утверждение является прямым следствие того, что множество $\mathfrak{D}$ плотно в $\mathcal{S}$.

Факт 1. *Предположим, что неравенство* (1.2) *выполнено для некоторых* $k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau$ *с любыми функциями* f *и* g, *лежащими в* $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда утверждение* $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ *также выполнено.*

Таким образом, при доказательстве теоремы 1.2 мы можем предположить, что f и g имеют компактный носитель. Более того, используя растяжения, мы можем перевести носитель внутрь единичного круга с центром в нуле.

В силу симметрии, мы можем предположить, что число k нечетно. Как и в доказательстве теоремы 1.1, утверждение $\mathrm{BE}(k, l, \frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}, \sigma, \tau)$ следует из равномерной ограниченности ядра, заданного формулой (2.2). Однако в случае вещественных чисел σ_1 и τ_1 ситуация становится более сложной и множество $\Omega_{\varepsilon,R}$ определяется так:

$$\Omega_{\varepsilon,R}=\Big\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, \varepsilon<|\eta| < R,\ |\xi^k-\sigma_1\eta^l|>\varepsilon e(|\eta|),\ |\xi^k-\tau_1\eta^l|>\varepsilon e(|\eta|)\Big\},$$

где e – некоторая положительная функция, быстро убывающая в нуле и на бесконечности. Отметим, что по нашему предположению о носителях функций f и g мы можем считать, что $|a| < 2$ и $|b| < 2$, где $a = x_1 - x_2$ и $b = y_1 - y_2$. Также мы можем предположить, что $a > 0$ и $\varepsilon < 1$.

Сделаем традиционную в этой работе замену переменных $\xi = \rho|\eta|^{\frac{l}{k}}$:

$$\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{|\eta|^{l-1}\xi^{k-1}e^{2\pi i(a\xi+b\eta)}\,d\xi}{(\xi^k-\tau_1\eta^l)(\xi^k-\sigma_1\eta^l)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \int\limits_{\varepsilon\leqslant|\eta|\leqslant R} |\eta|^{-1} \int\limits_{B_\varepsilon(\eta)} \frac{\rho^{k-1}e^{2\pi i(a\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{\big(\rho^k-\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)\big(\rho^k-\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)}\,d\rho d\eta.$$

Здесь множество $B_\varepsilon(\eta)$ задано формулой

$$B_\varepsilon(\eta) = \big\{\rho \in \mathbb{R} \,\big|\, \operatorname{dist}(\rho^k, \{\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l, \tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\}) > \varepsilon|\eta|^{-l}e(|\eta|)\big\}.$$

Возьмем $(2\pi a)^{\frac{k}{l}}\eta$ в качестве новой переменной, переопределим R и b (а ε и a переопределять не будем; нам удобно использовать ограничения $\varepsilon \leqslant 1$ и $a < 2$) и перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_{(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\varepsilon\leqslant|\eta|\leqslant R} |\eta|^{-1} \int\limits_{B_{\varepsilon,a}(\eta)} \frac{\rho^{k-1}e^{i(\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{\big(\rho^k - \tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)\big(\rho^k - \sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)}\,d\rho d\eta, \tag{3.1}$$

где множество $B_{\varepsilon,a}(\eta)$ задано формулой

$$B_{\varepsilon,a}(\eta) = \big\{\rho\in\mathbb{R}\,\big|\ \operatorname{dist}(\rho^k, \{\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l, \tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\}) \\ > \varepsilon|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|^{-l}e(|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|)\big\}.$$

Интеграл по ρ может быть представлен как контурный интеграл (после замены $\int_{\mathbb{R}} = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}$), см. Рис. 1. Обозначим единственный

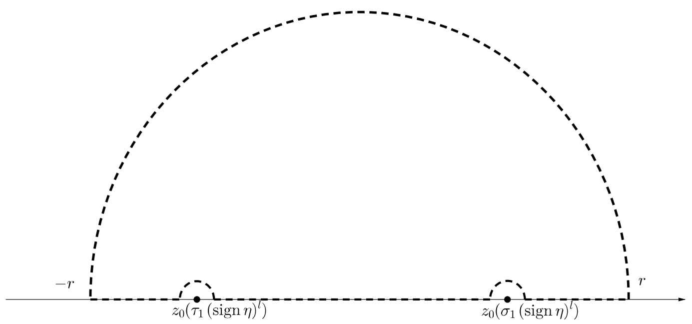

Рис. 1. Контур интегрирования.

вещественный корень уравнения $z^k = s$, $s\in\mathbb{R}$, символом $z_0(s)$. Несложно видеть, что это уравнение имеет ровно $\frac{k-1}{2}$ корней в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Следовательно, если r достаточно велико, то существует ровно $k-1$ полюсов подынтегрального выражения внутри контура ($\frac{k-1}{2}$ полюсов соответствуют выбору $s = \sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l$ и еще $\frac{k-1}{2}$ – выбору $s = \tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l$). Кроме того, выберем функцию $e(\eta)$ настолько маленькой, чтобы маленькие полукруги не пересекались ($e(\eta) \lesssim \eta^l$ подойдет, так как $\varepsilon < 1$). Нам требуется лемма, позволяющая оценивать разницу между интегралом по маленькому полукругу и “полувычетом”; эта лемма является количественной версией формулы Сохоцкого–Племеля.

Лемма 3.1. *Если мероморфная функция* ψ *имеет простой полюс в точке* x_0 *на вещественной прямой, то*

$$\left| \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \psi(z)\, dz + \pi i \mathrm{Res}_{x_0}\psi \right| \leqslant \pi r \max_{\substack{|z-x_0|\leqslant r,\\ \mathrm{Im}\, z>0}} |h'|,$$

где $h(z) = (z - x_0)\psi(z)$ *(полуокружность интегрирования ориентирована по часовой стрелке).*

Доказательство. Так как функция ψ имеет простой полюс в точке x_0, то ее можно переписать в виде $\psi(z) = \frac{c}{z-x_0} + \psi_1(z)$, где функция ψ_1 регулярна около точки x_0. Соответственно,

$$\int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \psi(z)\, dz = \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \frac{c\, dz}{z-x_0} + \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \psi_1(z)\, dz.$$

Так как $\psi_1(z) = \frac{h(z)-h(x_0)}{z-x_0}$, второй интеграл оценивается следующим образом:

$$\left| \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \psi_1(z)\, dz \right| \leqslant \pi r \max_{\substack{|z-x_0|\leqslant r,\\ \mathrm{Im}\, z>0}} |\psi_1| \leqslant \pi r \max_{\substack{|z-x_0|\leqslant r,\\ \mathrm{Im}\, z>0}} |h'|.$$

Первый интеграл можно легко вычислить:

$$\int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \frac{c\, dz}{z-x_0} = \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \frac{c\, dz}{z} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{c\, d(re^{2\pi i\theta})}{re^{2\pi i\theta}} = -\pi i c. \qquad \square$$

По лемме 3.1 сумма интегралов по полукругам есть

$$\begin{aligned} &-\pi i e^{ib\eta} \frac{e^{iz_0(\sigma_1(\mathrm{sign}\,\eta)^l)|\eta|^{\frac{l}{k}}} - e^{iz_0(\tau_1(\mathrm{sign}\,\eta)^l)|\eta|^{\frac{l}{k}}}}{k(\sigma_1-\tau_1)} \\ &+ \varepsilon O\Big(\max(1, |\eta|^{\frac{l}{k}}) |(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|^{-l} e(|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|) \Big). \end{aligned}$$

Сумма одномерных интегралов, приходящих из вычетов, есть сумма интегралов типа (2.4), которые, как мы видели ранее, равномерно ограничены. Тем не менее, интеграл, приходящий из “полувычетов”, требует более тонких вычислений. Начнем с оценки погрешности (т.е части интеграла (3.1), появляющейся из O):

$$\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}\max(1,|\eta|^{\frac{l}{k}})|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|^{-l}e\big(|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|\big)\,\frac{d\eta}{|\eta|}$$
$$=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}\max\big(1,2\pi a|\eta|^{\frac{l}{k}}\big)|\eta|^{-l}e(|\eta|)\,\frac{d\eta}{|\eta|}$$
$$\overset{a<2}{\leqslant}\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(1+|\eta|^{\frac{l}{k}}\big)|\eta|^{-l}e(|\eta|)\,\frac{d\eta}{|\eta|}\leqslant\varepsilon,$$

где $e(z)=|z|^{2l+1}e^{-|z|}$ (мы еще умножаем эту функцию на маленькую константу, чтобы удовлетворить неравенству $e(|\eta|)\lesssim\eta^l$; это не отражено в формулах). Таким образом, вклад ошибки в интеграл (3.1) является равномерно ограниченным (и даже небольшим, если ε невелико). Теперь интеграл, приходящий из “полувычетов”, выглядит следующим образом (мы переобозначили ε):

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R}e^{ib\eta}\frac{\big(e^{ic_1|\eta|^{\frac{l}{k}}}-e^{ic_2|\eta|^{\frac{l}{k}}}\big)\,d\eta}{\eta},$$

здесь c_1 и c_2 – некоторые вещественные константы (равные $z_0(\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l)$ и $z_0(\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l)$ соответственно). Часть интеграла по интервалу $[0,1]$ ограничена, так что мы можем отбросить ее. На луче $(1,\infty)$ используем неравенство треугольника

$$\Big|\int\limits_{1}^{R}e^{ib\eta}\frac{\big(e^{ic_1|\eta|^{\frac{l}{k}}}-e^{ic_2|\eta|^{\frac{l}{k}}}\big)\,d\eta}{\eta}\Big|\leqslant\Big|\int\limits_{1}^{R}e^{i(b\eta+c_1|\eta|^{\frac{l}{k}})}\,\frac{d\eta}{\eta}\Big|+\Big|\int\limits_{1}^{R}e^{i(b\eta+c_2|\eta|^{\frac{l}{k}})}\,\frac{d\eta}{\eta}\Big|$$

и, сделав замену переменных $|c_{1,2}|^{\frac{k}{l}}\eta=e^x$ и переопределяя b, приходим к тому, что надо проверить ограниченность интеграла

$$\Big|\int\limits_{0}^{\log R}e^{i(be^x\pm e^{\alpha x})}\,dx\Big|,$$

где $\alpha = \frac{l}{k} \neq 1$. Остается доказать несложную лемму об осцилляторных интегралах.

Лемма 3.2. *Пусть α, $\alpha \neq 1$, есть положительный фиксированный параметр. Тогда*

$$\Big| \int\limits_0^R e^{i(be^x \pm e^{\alpha x})}\, dx \Big| \lesssim 1$$

равномерно по вещественному параметру b (но оценка зависит от α).

Эта лемма может быть получена из второй леммы ван-дер-Корпута (к примеру, см. [7], §2.5.2), приведенной ниже.

Лемма 3.3. *Предположим, что функция F дважды дифференцируема на (a, b) и F'' не имеет корней на этом интервале. Тогда*

$$\Big| \int\limits_a^b e^{iF(x)}\, dx \Big| \leqslant \frac{8\sqrt{\pi}}{\sqrt{\min\limits_{\xi \in (a,b)} |F''(\xi)|}}.$$

Доказательство леммы 3.2. Рассмотрим случай, когда $\pm$ есть $-$, оставшийся случай рассматривается аналогично. Для краткости, введем функции h_b, задаваемые формулами $h_b(x) = be^x - e^{\alpha x}$. Конечно, $h_b''(x) = be^x - \alpha^2 e^{\alpha x}$, и это выражение может обращаться в ноль (таким образом, мы не можем напрямую применить лемму 3.3). Тем не менее, функция h_b'' может быть небольшой только на множестве небольшой меры. Достаточно проверить, что

$$\Big| \int\limits_C^R e^{i(be^x - e^{\alpha x})}\, dx \Big| \lesssim 1,$$

где C есть некоторая численная константа, не зависящая от b (но зависящая от α), которая будет указана ниже. Функция h_b'' изменяет монотонность на интервале $[C, \infty)$ не более одного раза. Для монотонной функции множество значений, где её модуль не превосходит единицы, есть интервал (или луч). Следовательно, множество $\{x \in [C, \infty) \mid |h_b''(x)| < 1\}$ является объединением не более двух интервалов (это множество ограничено, так как $|h_b''|(x) \to \infty$ при $x \to \infty$). Докажем, что если $|h_b''(z)| < 1$, то $|h_b''(z \pm 1)| > 1$ для $z \in [C, \infty)$. Если это утверждение доказано, то несложно видеть, что интервалы, составляющие множество $\{x \in [C, \infty) \mid |h_b''(x)| < 1\}$, имеют общую длину не более 2. Дополнение этого множества в $[C,\infty)$ есть объединение не более трех интервалов (один из которых есть луч). На каждом из них интеграл может быть оценен числом 20 по лемме 3.3, на дополнении этот интеграл может быть оценен числом 2 и лемма доказана.

Чтобы проверить утверждение, обозначим число be^z символом p, а число $\alpha^2e^{\alpha z}$ – символом q. Если и $|h_b''(z)| < 1$, и $|h_b''(z+1)| < 1$ (мы рассматриваем этот случай, случай $|h_b''(z-1)| < 1$ аналогичен), то

$$q-1 < p < q+1 \quad \text{и} \quad e^{\alpha}q - 1 < ep < e^{\alpha}q+1.$$

В этом случае, $e^{\alpha}q - 1 < e(q+1)$ и $e(q-1) < e^{\alpha}q+1$, что влечет $q < \frac{e+1}{|e^{\alpha}-e|}$. Выбирая $C > 10 + \alpha^{-1}\ln\frac{e+1}{\alpha^2|e^{\alpha}-e|}$, получим противоречие. Утверждение доказано. $\square$

3.2. Доказательство следствия 1.2. Следствие 1.2 может быть доказано при помощи простого алгебраического приема.

Лемма 3.4. *Следующая импликация выполнена при условии* $\sigma\tau \ne 0$:

$\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ & $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,-\sigma,-\tau)$ & $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,-\tau)$ &
$\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,-\sigma,\tau) \Rightarrow \mathrm{BE}(2k,2l,\alpha+k,\beta,\sigma^2,\tau^2)$ &
$\mathrm{BE}(2k,2l,\alpha,\beta+l,\sigma^2,\tau^2)$.

Доказательство. Применяя утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\pm\sigma,\pm\tau)$ к паре функций $(\partial_1^k \pm \sigma\partial_2^l)f$ и $(\partial_1^k \pm \tau\partial_2^l)g$, получим оценки для четырех скалярных произведений:

$$\left|\langle(\partial_1^k \pm \tau\partial_2^l)f, (\partial_1^k \pm \sigma\partial_2^l)g\rangle_{W_2^{\alpha,\beta}}\right| \lesssim \left\|(\partial_1^{2k}-\tau^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1}\left\|(\partial_1^{2k}-\sigma^2\partial_2^{2l})g\right\|_{L_1}.$$

Несложно видеть, что и $\langle\partial_1^k f, \partial_1^k g\rangle_{W_2^{\alpha,\beta}}$, и $\langle\partial_2^l f, \partial_2^l g\rangle_{W_2^{\alpha,\beta}}$ могут быть выражены как линейные комбинации четырех скалярных произведений, записаных в левой части неравенства, и, таким образом, оценены через выражения, стоящие справа. Нам остается только использовать тождество (1.4), чтобы получить утверждения $\mathrm{BE}(2k,2l,\alpha+k,\beta,\sigma^2,\tau^2)$ и $\mathrm{BE}(2k,2l,\alpha,\beta+l,\sigma^2,\tau^2)$. $\square$

Доказательство следствия 1.2. По теореме 1.2, утверждения $\mathrm{BE}(\frac{k}{2},\frac{l}{2},\frac{k}{4}-\frac{1}{2},\frac{l}{4}-\frac{1}{2},\pm\sigma',\pm\tau')$, где $\sigma_1' = \sqrt{\sigma_1}$ и $\tau_1' = \sqrt{\tau_1}$, верны (так как одно из чисел $\frac{k}{2}$ и $\frac{l}{2}$ нечетно и числа $\pm\sigma_1'$ и $\pm\tau_1'$ вещественные различные). Лемма 3.4 завершает доказательство.

3.3. Доказательство леммы 1.3. Опровергнем более слабое утверждение, а именно, опровергнем неравенство

$$\|f\|_{W_2^{\alpha,\beta}} \lesssim \|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f\|_{L_1}. \tag{3.2}$$

Случай, в котором набор (k, l, σ, σ) является эллиптическим, уже был рассмотрен. Предположим, что набор (k, l, σ, σ) не является эллиптическим.

Пусть $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ есть некоторая отличная от нуля точка в $\mathbb{R}^2$, такая что $\zeta_1^k - \sigma_1\zeta_2^l = 0$ и $|\zeta_1| > 2$, $|\zeta_2| > 2$, где $\sigma_1 = (2\pi i)^{l-k}\sigma$. Будем рассматривать только такие функции f, спектры которых лежат в $\frac{1}{2}$-окрестности точки ζ; для таких функций f

$$\|f\|_{W_2^{\alpha,\beta}} \asymp \|f\|_{L_2},$$

так как веса $|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}$ в формуле (1.3) ограничены снизу и сверху на носителе $\widehat{f}$. Пусть $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ есть вещественнозначная функция с носителем $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Символом ϕ_λ обозначим функцию $x \to \phi(\lambda x)$. Последовательность $\{f_n\}_n$, опровергающая неравенство (3.2), задается так:

$$\widehat{f_n}(\xi,\eta) = \phi_n(\eta - \zeta_2)\phi_{n^2}(\xi - (\sigma_1\eta^l)^{\frac{1}{k}}), \quad |\xi - \zeta_1| \leqslant 1, |\eta - \zeta_2| \leqslant 1$$

и $\widehat{f_n}(\xi,\eta) = 0$ при всех остальных ξ и η. Видим, что функция $\widehat{f_n}$ имеет носитель на маленьком $n^{-1} \times n^{-2}$-прямоугольничке R_n, покрывающем n^{-2}-окрестность кривой $\gamma = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^k = \sigma_1\eta^l\}$ возле точки ζ (а именно, большая сторона прямоугольника R_n параллельна касательной к кривой γ в точке ζ). Ясно, что L_2-норма функции f_n может быть легко вычислена,

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{L_2}^2 = \|\widehat{f_n}\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n^2(\eta - \zeta_2) \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_{n^2}^2(\xi - (\sigma_1\eta^l)^{\frac{1}{k}})\, d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{n^2}\|\phi\|_{L_2}^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n^2(\eta - \zeta_2)\, d\eta = \frac{1}{n^3}\|\phi\|_{L_2}^4.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Если n достаточно велико, то

$$\big|(\xi^k - \sigma_1\eta^l)\widehat{f_n}(\xi,\eta)\big| \lesssim n^{-2},$$

так как на R_n, где лежит носитель функции $\widehat{f_n}$, многочлен $(\xi^k - \sigma_1\eta^l)$ не превосходит n^{-2}. Следовательно,

$$\big\|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\big\|_{L_\infty} \lesssim \big\|(\xi^k - \sigma_1\eta^l)\widehat{f_n}\big\|_{L_1} \lesssim n^{-5},$$

так как последняя функция не превосходит n^{-2} и имеет носитель на прямоугольничке R_n, мера которого есть n^{-3}. Рассмотрим поляру R_n° множества R_n. Она является прямоугольником $n \times n^2$, у которого "главная ось" перпендикулярна "главной оси" R_n (и параллельна нормали в точке ζ к кривой $\{\xi^k = \sigma_1\eta^l\}$).

Факт 2. *Для всякого числа* $\varepsilon > 0$ *и всякого фиксированного числа* $r > 0$ *имеем оценку*

$$\big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n(x,y)\big| \lesssim n^{-3}(x^2+y^2)^{-r}, \ \operatorname{dist}\big((x,y), R_n^\circ\big) \geqslant n^\varepsilon.$$

Доказательство этого факта является достаточно стандартным, однако весьма длинным, если расписывать все детали. Оно аналогично доказательству факта "преобразование Фурье r раз непрерывно дифференцируемой функции с компактным носителем убывает на бесконечности как $|\xi|^{-r}$" (необходимо просто много раз выполнять интегрирование по частям). Вооруженные этим фактом, напишем оценку ($B_r(z)$ обозначает шар радиуса r с центром в z):

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\big| &= \int\limits_{R_n^\circ + B_{n^\varepsilon}(0)} \big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\big| + \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus(R_n^\circ + B_{n^\varepsilon}(0))} \big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\big| \\ &\lesssim n^{-5}n^{3+2\varepsilon} + \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus(R_n^\circ + B_{n^\varepsilon}(0))} n^{-3}(x^2+y^2)^{-r}\,dx\,dy \lesssim n^{-2+2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Это неравенство вместе с тождеством (3.3) противоречит неравенству (3.2) при достаточно больших n (имеем $n^{-\frac{3}{2}}$ слева и $n^{-2+2\varepsilon}$ справа).

§4. Дальнейшее развитие

Хотя мы исследуем билинейные неравенства, параллельно мы получаем дополнительную информацию о квадратичных неравенствах вида

$$\|f\|^2_{W_2^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\|(\partial_1^k - \tau\partial_2^l)f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}. \qquad (4.1)$$

Обозначим утверждение, что неравенство (4.1) выполнено, символом QE$(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$. Конечно, BE влечет QE с теми же параметрами. Таким образом, наши положительные результаты для BE обобщаются на QE. Более того, применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим к формуле (1.3), видим, что

$$\|f\|_{W_2^{\alpha,\beta}} \lesssim \|f\|_{W_2^{\alpha_-,\beta_-}} + \|f\|_{W_2^{\alpha_+,\beta_+}},$$

(α_-, β_-) и (α_+, β_+) удовлетворяют (1.5) и $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$.

Это неравенство совместно со следствием 1.2 показывает, что утверждение QE выполнено, когда числа k и l четны, но одно из чисел $\frac{k}{2}$ и $\frac{l}{2}$ является нечетным, числа σ_1 и τ_1 положительные вещественные, а пара (α, β) удовлетворяет уравнению (1.5) и лежит между $(\frac{3}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}l - \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}l - \frac{1}{2})$.

Отрицательные результаты для QE более скудны. Мы определенно знаем, что QE не выполнено при $\sigma = \tau$ (это следует из соответствующей части доказательства теоремы 1.1 и леммы 1.3). По-видимому, квадратичные неравенства больше напоминают стандартные теоремы вложения, чем билинейные.

Гипотеза 1. *Утверждение* QE *выполнено всегда, когда* $\sigma \neq \tau$, *а числа* α *и* β *удовлетворяют уравнению* (1.5).

Наши положительные результаты для утверждения BE схожи в эллиптическом и неэллиптическом случаях. Ситуация для отрицательных результатов далека от подобной. Основная сложность в построении контрпримеров в стиле параграфа 2.2 для неэллиптического случая объясняется следующим фактом.

Факт 3. *Рассмотрим замыкание в* $L_p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$, *множества*

$$\Big\{(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f \;\Big|\; \widehat{f} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)\Big\}$$

и обозначим это линейное пространство символом $G_p^{k,l,\sigma}$. *Предположим, что* $k \neq l$. *Если многочлен* $\xi^k - \sigma_1\eta^l$ *является эллиптическим, это пространство совпадает с пространством* $L_p(\mathbb{R}^2)$, *где* $p > 1$, *и пространством* $L_1^0(\mathbb{R}^2)$, *состоящим из функций, у которых интеграл обращается в ноль, при* $p = 1$. *Когда полином* $\xi^k - \sigma_1\eta^l$ *не является эллиптическим, пространство* $G_p^{k,l,\sigma}$ *не дополняемо в* L_p.

Опустим доказательство этого факта. Первая часть доказательства стандартна. Представим объяснение природы эффекта, скрытого во второй части. Рассмотрим множество $\gamma = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^k = \sigma_1\eta^l\} \subset \mathbb{R}^2$. Вне нуля оно представляет собой C^∞-гладкую кривую (подмногообразие в $\mathbb{R}^2$), более того, это кривая выпукла. Если $p < \frac{4}{3}$

и K есть некоторое компактное подмножество множества γ (предполагаем, что $0 \notin K$), то оператор, определяемый формулой

$$R_K[f] = \widehat{f}\big|_K, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

является непрерывным из $L_p(\mathbb{R}^2)$ в $L_1(K)$ (снабжаем K мерой Лебега на γ), см., например, [12]. Следовательно, ядро этого оператора замкнуто в L_p, обозначим его символом L_p^K. Пересечение всех подобных пространств снова замкнуто в L_p, обозначим его символом L_p^γ. Конечно, $G_p^{k,l,\sigma} \subset L_p^\gamma$. На первый взгляд удивительно, но $G_p^{k,l,\sigma} = L_p^\gamma$. Это является следствием того, что если $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ и $\varphi \equiv 0$ на γ, то $(\xi^k - \sigma_1\eta^l)^{-1}\varphi$ также лежит в $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$, по крайней мере когда $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$ (возникают некоторые трудности в нуле, но они пренебрежимы с точки зрения пространств функций). То, что L_p^γ не дополняемо, следует из известного принципа (см., например, [11], лемма 3.1 для $p > 1$ и теорема 1.4 в случае $p = 1$), который гласит, что если инвариантное подпространство в L_p дополняемо, то существует и инвариантный проектор на это подпространство (т.е. мультипликатор).

Утверждаем, снова без доказательства, что когда $\frac{4}{3} \leqslant p < \infty$, пространства L_p и $L_p^\gamma = G_p^{k,l,\sigma}$ совпадают.

Хотя факт 3 не допускает построения контрпримеров в стиле подраздела 2.2, он может дать некоторые дополнительные надежды на выполнение теорем вложения. Завершаем изложение обсуждением еще одной гипотезы.

Гипотеза 2. *Пусть набор (k, l, σ, σ) не является эллиптическим. Неравенство*

$$\|f\|_{W_q^{\alpha,\beta}} \lesssim \|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f\|_{L_p}$$

выполнено всегда, когда $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$, $1 < p < \frac{4}{3}$, $q < \infty$ и

$$\frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{l} = 1 - \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)\Big(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\Big). \tag{4.2}$$

Пространство в левой части неравенства определяется как замыкание множества $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ по норме

$$\|f\|_{W_q^{\alpha,\beta}} = \Big\|\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f](\xi,\eta)|\xi|^\alpha|\eta|^\beta\big]\Big\|_{L_q},$$

где $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье. Когда набор (k, l, σ, σ) является эллиптическим, утверждение выполнено всегда, когда $p > 1$, и следует из классических теорем вложения и того, что чистые производные выражаются в терминах $(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)$ с помощью сингулярных интегральных операторов.

Мы можем доказать гипотезу при дополнительном предположении $q > 4$. Доказательство является комбинацией известных фактов. Во-первых, задача может быть локализована в спектре, т.е. сведена к случаю, когда $\widehat{f}$ имеет носитель около некоторой точки кривой γ. Это может быть сделано при помощи разложения $f = \sum P_j f$, где P_j есть сглаженный спектральный проектор Литтлвуда–Пэли, применения неравенства Литтлвуда–Пэли $\|f\|_{L_p} \asymp \|(\sum |P_j f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L_p}$, неравенства Гёльдера (для этого шага, неравенства $p \leqslant 2$ и $q \geqslant 2$ являются критически важными) и инвариантности задачи относительно анизотропных растяжений, задаваемой равенством (4.2). После локализации задачи, пространство в левой части становится стандартным пространством Лебега L_q. Таким образом, мы изучаем непрерывность оператора с символом $\frac{1}{\xi^k - \sigma_1 \eta^l}$ как оператора из локализованного пространства L_p^γ в L_q. Это, по модулю сверток с функциями из класса Шварца, есть то же самое, что изучение оператора с символом $\mathrm{v.\,p.}(\mathrm{dist}(\cdot,\gamma))^{-1}$. Непрерывность аналогичного оператора, но действующего между стандартными пространствами Лебега, была полностью описана в работе [6]. А именно, в той статье были описаны отрицательные степени оператора Бохнера–Рисса (т.е. операторы такого же вида, но у которых вместо показателя степени -1 может фигурировать любое число от $-\frac{3}{2}$ до 0, и даже допустимы комплексные значения показателя, но при этом γ есть единичная окружность). Тем не менее, метод может быть применен к случаю произвольных гладких выпуклых кривых вместо окружности. Это завершает доказательство гипотезы для случая $q > 4$.

Тем не менее, нетрудно видеть, что когда $q < 4$, соответствующий оператор не является непрерывным между пространствами Лебега. Таким образом, интересные случаи в гипотезе возникают, когда $q < 4$. Мы полагаем, что здесь пространство L_p^γ может играть определенную роль.

Литература

1. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, 1975.

2. С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, Д. М. Столяров, *Пространства гладких функций, порожденные неоднородными дифференциальными выражениями.* — Функц. анализ и его прил., **47**, No. 2 (2013), 89–92.
3. С. В. Кисляков, Н. Г. Сидоренко, *Отсутствие безусловной локальной структуры в анизотропных пространствах гладких функций.* — Сиб. мат. ж., **29**, no. 3 (1988), 64–77.
4. В. И. Коляда, *О вложении пространств Соболева.* — Мат. заметки, **54**, № 3 (1993), 48–71.
5. В. А. Солонников, *О некоторых неравенствах для функций из классов* $\vec{W}_p(R^n)$. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **27** (1972), 194–210.
6. J.-G. Bak, *Sharp estimates for the Bochner–Riesz operator of negative order in* $\mathbb{R}^2$, Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), no. 7, 1977–1986.
7. V. Havin, B. Jöricke, *The uncertainty principle in harmonic analysis*, Springer, 1994.
8. L. Hörmander, *On the division of distributions by polynomials*, Ark. fur Mat., **3**, No. 6 (1958), 555–568.
9. S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, D. M. Stolyarov, *Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate*, `http://arxiv.org/abs/1209.2078`.
10. A. Pełczyński, K. Senator, *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical Banach spaces" and a Sobolev type embedding theorem*, Studia Math., **84** (1986), 169–215.
11. H. P. Rosenthal, *Projections onto translation-invariant subspaces of* $L^p(G)$, Memoirs of the American Mathematical Society **63**, 1966.
12. T. Tao, *Recent progress on the Restriction conjecture*, `http://arxiv.org/abs/math/0311181`.

Stolyarov D. M. Bilinear embedding theorems for differential operators in $\mathbb{R}^2$.

We prove bilinear inequalities for differential operators in $\mathbb{R}^2$. Such inequalities turned out to be useful for anisotropic embedding theorems for overdetermined systems and the limiting order summation exponent. However, here we study the phenomenon in itself. We consider the elliptic case, where our analysis is complete, and the nonelliptic case, where it is not. The latter case is related to Strichartz estimates in a very easy setting of two dimensions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
Исследовательская лаборатория П. Л. Чебышева,
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: `dms@pdmi.ras.ru`

Поступило 18 июня 2014 г.