Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

Д. В. Руцкий

ИСПРАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ "О СВЯЗИ МЕЖДУ АК-УСТОЙЧИВОСТЬЮ И BMO-РЕГУЛЯРНОСТЬЮ"*

В доказательстве предложения 15 в статье [4] была допущена неточность, а именно, была использована равномерность соотношения (3) из указанной работы, которая, по-видимому, не имеет места. Чтобы исправить это досадное недоразумение, мы докажем следующий более сильный[1] вариант предложения 17 в [4]; при этом предложение 16 в [4] становится ненужным для основного результата.

За всеми необходимыми определениями, отсутствующими в настоящей заметке, мы отсылаем читателя к [4]. Индексы K и J в обозначениях $(\cdot,\cdot)_{\theta,p,K}$ и $(\cdot,\cdot)_{\theta,p,J}$ указывают на K- и J-методы вещественной интерполяции.

Предложение 1. *Пусть Z – банахова решётка измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$, обладающая свойством Фату и такая, что решётки Z и Z' обладают порядково непрерывной нормой. Предположим, что решётка $\left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\theta,2}$ BMO-регулярна при некотором $0<\theta<1$. Тогда решётка Z также BMO-регулярна.*[2]

Сначала нужно сделать некоторые приготовления.

Предложение 2. *Пусть X и Y – решётки измеримых функций на некотором σ-конечном измеримом пространстве Ω, а Ξ – решётка измеримых функций на σ-конечном измеримом пространстве Ω_1. Предположим также, что все решётки X, Y и Ξ банаховы, обладают свойством Фату, и их порядково сопряжённые пространства X', Y' и Ξ' обладают порядково непрерывной нормой. Тогда формула*

$$(X,Y)_{\theta,p}(\Xi)=\left(X(\Xi),Y(\Xi)\right)_{\theta,p} \tag{1}$$

Ключевые слова: BMO-регулярность, вещественная интерполяция.

*См. [4].

[1] За исключением несущественного дополнительного предположения о порядковой непрерывности нормы решёток Z и Z', которое так или иначе уже накладывалось в условиях предложения 11 в [4].

[2] Обратное утверждение также верно; оно легко вытекает из предложения 14 в [4] и предложения 4 настоящей работы.

справедлива при всех $0 < \theta < 1$ *и* $1 < p < \infty$.

Действительно, проверим включение

$$(X, Y)_{\theta,p}(\Xi) \subset (X(\Xi), Y(\Xi))_{\theta,p}. \tag{2}$$

Пусть $f \in (X, Y)_{\theta,p}(\Xi)$. Можно считать, что $f \geqslant 0$ почти всюду. Тогда функция $g(\omega) = \|f(\omega, \cdot)\|_{\Xi}$, $\omega \in \Omega$, принадлежит пространству $(X, Y)_{\theta,p}$, что означает, что найдутся некоторые разложения $g = a_j + b_j$, $j \in \mathbb{Z}$, с соответствующими оценками из определения пространства $(X, Y)_{\theta,p;K}$; можно также считать, что $a_j, b_j \geqslant 0$ почти всюду. Тогда соответствующие разложения $f(\omega, \omega_1) = \frac{f(\omega,\omega_1)}{g(\omega)} a_j(\omega) + \frac{f(\omega,\omega_1)}{g(\omega)} b_j(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $\omega_1 \in \Omega_1$ (для удобства считаем, что $\frac{0}{0} = 0$) показывают,[3] что $f \in (X(\Xi), Y(\Xi))_{\theta,p}$. Точно так же проверяется, что включение вида (2) имеет место и для порядково сопряжённых пространств, т. е.

$$(X', Y')_{\theta,p'}(\Xi') \subset (X'(\Xi'), Y'(\Xi'))_{\theta,p'}. \tag{3}$$

Заметим, что норма решётки $(X', Y')_{\theta,p}$ также порядково непрерывна. Переходя в соотношении (3) к двойственным пространствам и пользуясь хорошо известной формулой $[X(\Xi)]' = X'(\Xi')$ для порядково сопряжённых решёток со смешанной нормой, порядковой непрерывностью соответствующих решёток, и свойством Фату (из этих свойств следует, что, например, $(X')^* = X'' = X$), получаем требуемое обратное включение

$$(X(\Xi), Y(\Xi))_{\theta,p} \subset (X, Y)_{\theta,p}(\Xi).$$

Предложение 2 доказано.

Напомним, что классы Макенхаупта A_p при $1 < p < \infty$ состоят из почти всюду неотрицательных функций w на $\mathbb{T} \times \Omega$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|M\|_{\mathrm{L}_p\left(w^{-\frac{1}{p}}(\cdot,\omega)\right) \to \mathrm{L}_p\left(w^{-\frac{1}{p}}(\cdot,\omega)\right)} < \infty.$$

Значение этого супремума будем называть A_p-константой для веса w; здесь M – это максимальный оператор Харди-Литлвуда, действующий по первой переменной. Подробнее см. [3].

[3] Отметим, что, вообще говоря, функции из решёток со смешанной нормой не измеримы на $\Omega \times \Omega_1$, однако легко видеть, что указанное разложение всё равно обладает всеми необходимыми свойствами. Так или иначе, в использующемся в настоящей работе случае $\Xi = l^2$ никаких проблем с измеримостью не возникает.

Предложение 3. *Пусть почти всюду положительные веса u и v принадлежат классу* A_2 *с константой* C. *Тогда вес* $u \wedge v$ *также принадлежит классу* A_2 *с константой* $2C$.

Действительно, по условию для всех функций

$$f \in \mathrm{L}_2\left(u^{-\frac{1}{2}}\right) \cap \mathrm{L}_2\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)$$

имеют место оценки

$$\int\limits_{\mathbb{T}} (Mf)^2 u \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}} |f|^2 u$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{T}} (Mf)^2 v \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}} |f|^2 v$$

при почти всех фиксированных значениях второй переменной. Из этих оценок следует, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{T}} (Mf)^2(u \wedge v) &\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} (M[f\chi_{\{u>v\}}] + M[f\chi_{\{u\leqslant v\}}])^2(u \wedge v) \\ &\leqslant 2\int\limits_{\mathbb{T}} (M[f\chi_{\{u>v\}}])^2 v + 2\int\limits_{\mathbb{T}} (M[f\chi_{\{u\leqslant v\}}])^2 u \\ &\leqslant 2C\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^2(\chi_{\{u>v\}} v + \chi_{\{u\leqslant v\}} u) = 2C\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^2(u \wedge v) \end{aligned} \tag{4}$$

при почти всех фиксированных значениях второй переменной. Поскольку множество $\mathrm{L}_2\left(u^{-\frac{1}{2}}\right) \cap \mathrm{L}_2\left(v^{-\frac{1}{2}}\right) \cap \mathrm{L}_2\left((u \wedge v)^{-\frac{1}{2}}\right)$ плотно в множестве $\mathrm{L}_2\left((u \wedge v)^{-\frac{1}{2}}\right)$, оценка (4) распространяется на все функции

$$f \in \mathrm{L}_2\left((u \wedge v)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

что означает, что $u \wedge v \in \mathrm{A}_2$ с константой $2C$.

Предложение 4. *Пусть* X *и* Y – A_2*-регулярные банаховы решётки на* $\mathbb{T} \times \Omega$. *Тогда решётка* $(X, Y)_{\theta,p}$ *также* A_2*-регулярна при всех* $0 < \theta < 1$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

В самом деле, пусть $f \in (X,Y)_{\theta,p}$, и пусть $f = \sum_j f_j$, $f_j \in X \cap Y$, $j \in \mathbb{Z}$ – некоторое разложение с соответствующими оценками из определения пространства $(X,Y)_{\theta,p;J}$. Из A_2-регулярности решёток X и Y легко получить A_2-регулярность решётки $X \cap_t Y = X \cap Y$, снабжённой нормой J-функционала $J(t,\varphi;X,Y) = \|\varphi\|_X \vee t\|\varphi\|_Y$ для $\varphi \in X \cap Y$, причём эта A_2-регулярность имеет место равномерно по $t > 0$ (действительно, если $\varphi \in X \cap_t Y$, $\varphi > 0$ почти всюду и $g \in X$, $h \in Y$ – соответствующие A_2-мажоранты для φ в решётках X и Y, то функция $g \wedge h$ будет подходящей A_2-мажорантой для φ в решётке $X \cap_t Y$ по предложению 3). Тогда функция $g = \sum_j g_j$, составленная из A_2-мажорант g_j для f_j в решётках $X \cap_{2^j} Y$, является подходящей A_2-мажорантой для f в решётке $(X,Y)_{\theta,p}$.

Предложение 5. *Предположим, что X, Y и Z – банаховы решётки измеримых функций. Тогда справедлива формула*

$$((X,Y)_{\alpha,p}, Z)_{\beta,p} = (X, (Y,Z)_{\gamma,p})_{\delta,p} \tag{5}$$

при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$, таких, что $\alpha(1-\beta) = \delta(1-\gamma)$ и $\beta = \gamma\delta$.

Смысл соотношений между парами параметров (α,β) и (γ,δ) становится понятен, если представить, что решётки X, Y и Z сопоставлены вершинам $[X]$, $[Y]$ и $[Z]$ некоторого треугольника на плоскости (т. е. точкам двумерного симплекса), а интерполяционные пространства $(A,B)_\nu$ соответствуют точкам $(1-\nu)[A] + \nu[B]$. Формула (5) получается из основных результатов работ [2] и [1]. В силу довольно нетривиального результата [1, теорема 1], интерполяционные пространства, полученные методами Спарра K и J (введёнными в [2]), совпадают для произвольных наборов банаховых решёток измеримых функций. Применяя теорему 9.3 из работы [2] о связи интерполяционных методов различных порядков и [2, предложение 6.3], получаем формулу

$$\begin{aligned}
((X,Y)_{\alpha,p}, Z)_{\beta,p} &= ((X,Y)_{\alpha,p}, (Z,Z)_{\frac{1}{2},p})_{\beta,p} \\
&= (X,Y,Z,Z)_{\left((1-\alpha)(1-\beta),\alpha(1-\beta),\frac{1}{2}\beta,\frac{1}{2}\beta\right),p} \\
&= (X,Y,Z)_{((1-\alpha)(1-\beta),\alpha(1-\beta),\beta),p},
\end{aligned}$$

и, точно таким же образом, $(X,(Y,Z)_{\gamma,p})_{\delta,p} = (X,Y,Z)_{(1-\delta,\delta(1-\gamma),\gamma\delta),p}$, откуда (с учётом соотношения $(1-\alpha)(1-\beta) = 1-\delta$, вытекающего из условий теоремы) следует (5).

Пусть задано некоторое число $\lambda > 0$. Для удобства мы обозначаем через l^q_λ весовые пространства последовательностей $l^q(w_\lambda)$ со степенным весом $w_\lambda(j) = \lambda^j$, $j \in \mathbb{Z}$. Следующее утверждение является ключевым моментом в доказательстве предложения 1.

Предложение 6. *Пусть $\lambda > 1$ и X – банахова решётка на $\mathbb{T}\times\Omega$, обладающая свойством Фату. Предположим, что решётка*

$$Y = \left(X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right), \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)\right)_{\frac{1}{2},\infty}$$

A_p-регулярна с константами (C,m). Тогда решётка $X^{\frac{1}{2}}$ также A_p-регулярна с константами (C,m_1) при некотором $m_1 > 0$.

Идея доказательства предложения 6 заключается в том, что решётка $X^{\frac{1}{2}}$ естественным образом изоморфна подпространству решётки Y, состоящему из всех функций, которые не зависят от последней переменной. Итак, пусть $f \in X^{\frac{1}{2}}$ и $\|f\|_{X^{\frac{1}{2}}} = c_0$ для некоторого числа c_0, которое мы определим позднее. Для удобства можно считать, что $f > 0$ почти всюду. Образуем последовательность $F = \{f\}_{j\in\mathbb{Z}} \in X^{\frac{1}{2}}(l^\infty)$. Поскольку

$$F \in X^{\frac{1}{2}}(l^\infty) = \left[X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

с нормой c_0, найдётся некоторое разложение $F = F_0^{\frac{1}{2}}F_1^{\frac{1}{2}}$ функции F, в котором функции $F_0 \in X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)$ и $F_1 \in \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)$ почти всюду положительны и удовлетворяют оценкам

$$\|F_0\|_{X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)} \leqslant 2c_0$$

и $\|F_1\|_{\mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)} \leqslant 2c_0$. По неравенству Юнга имеем

$$F = F_0^{\frac{1}{2}}F_1^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(tF_0 + t^{-1}F_1\right)$$

при всех $t > 0$. Отсюда следует, что разложения $F = \varphi_t + \psi_t$ вида $\varphi_t = \frac{tF_0}{tF_0+t^{-1}F_1}F$, $\psi_t = \frac{t^{-1}F_1}{tF_0+t^{-1}F_1}F$, удовлетворяют оценкам

$$\|\varphi_t\|_{X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)} \leqslant t\|F_0\|_{X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)} \leqslant 2c_0t$$

и $\|\psi_t\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda)} \leqslant t^{-1}\|F_0\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda)} \leqslant 2c_0t^{-1}$, что означает, что $F \in Y$ с нормой не более $2c_0$. Пусть B_Y – единичный шар решётки Y. Мы также введём множество

$$B = \left\{W \mid W = V_k + U_k, \lambda^{-k}\|V_k\|_{X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)} \vee \lambda^k\|U_k\|_{\mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)} \leqslant 1, k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{6}$$

Используя эквивалентное определение интерполяционного пространства $\left(X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right), \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)\right)_{\frac{1}{2},\infty}$ через последовательности (с константой λ^2 вместо “стандартной” константы 2), легко видеть, что

$$\frac{1}{c}B \subset B_Y \subset cB$$

для некоторой константы c, не зависящей от f; также очевидно, что множество B ограничено в Y, выпукло и замкнуто относительно сходимости по мере. Важным для нас свойством множества B является его инвариантность относительно сдвигов по последней переменной. Действительно, пусть $W \in B$ и пусть $\sigma_l\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} = \{a_{j+l}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – оператор сдвига влево на l позиций, $l \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что

$$\|\sigma_l V\|_{X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)} = \lambda^{-l}\|V\|_{X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)}$$

и

$$\|\sigma_l U\|_{\mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)} = \lambda^{l}\|U\|_{\mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)}$$

для любых $V \in X\left(l^\infty_{1/\lambda}\right)$ и $U \in \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)$. Поэтому всякое разложение $W = V_k + U_k$ из (6) при индексе $k \in \mathbb{Z}$ даёт соответствующее разложение $\tilde{W} = \sigma_l W = \sigma_l V_k + \sigma_l U_k = \tilde{V}_{k+l} + \tilde{U}_{k+l}$ при индексе $k + l$, и, таким образом, $\sigma_l W \in B$.

Введём в рассмотрение множество

$$B\mathrm{A}_p(C) = \left\{w \mid \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|M\|_{\mathrm{L}_p\left(w^{-\frac{1}{p}}(\cdot,\omega)\right)\to\mathrm{L}_p\left(w^{-\frac{1}{p}}(\cdot,\omega)\right)} \leqslant C\right\}$$

весов A_p с константой не более C. Можно считать, что

$$\|f\|_{X^{\frac{1}{2}}} = c_0 = [2c^2m]^{-1},$$

а тогда $mF \in B$; при этом множество

$$A = \{G \in B \cap B\mathrm{A}_p(C) \mid G \geqslant |F|\}$$

соответствующих A_p-мажорант непусто по условию. Множество A выпукло и замкнуто относительно сходимости по мере, поскольку множество $B\mathrm{A}_p(C)$ обладает этими свойствами (см., например, [3, предложение 3.4]). Множество A также инвариантно относительно действия операторов сдвига σ_l. Возьмём какую-нибудь мажоранту $H \in A$ и образуем последовательности средних $H_n = \mu_n H$, где μ_n – оператор усреднения $\mu_n S = \frac{1}{n}\sum\limits_{l=0}^{n-1} \sigma_l S$, $n \in \mathbb{N}$. Из выпуклости множества A следует, что $H_n \in A$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Используя свойство Фату решётки Y, которое вытекает из свойства Фату решётки X, видим, что в силу [3, предложение 3.3] найдётся некоторая последовательность $W_n = \sum\limits_{k\geqslant n} \alpha_k^{(n)} H_k$, $\alpha_k^{(n)} \geqslant 0$, $\sum\limits_{k\geqslant n} \alpha_k = 1$ конечных выпуклых комбинаций функций H_n, такая, что $W_n \to W$ почти всюду для некоторого $W \in A$. Опять используя выпуклость множества A и его замкнутость относительно сходимости по мере, получаем, что $W \in A$. Проверим теперь, что $\sigma_1 W = W$. Действительно, поскольку $\sigma_1\mu_k S - \mu_k S = \frac{1}{k}(\sigma_k - \sigma_0)S$ для любой последовательности S, легко видеть, что $\sigma_1 W_n - W_n \in \frac{2}{n}B$, откуда по свойству Фату следует, что $\|\sigma_1 W - W\|_Y \leqslant \frac{2c}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а значит, $\sigma_1 W = W$ почти всюду. Таким образом, W является не зависящей от последней переменной A_p-мажорантой для функции F, т. е. $W = \{w\}_{j\in\mathbb{Z}}$ почти всюду для некоторой функции $w \geqslant f$. Пусть $W = V_0 + U_0$, $V_0 = \{h_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $U_0 = \{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — соответствующее разложение из (6), т. е. $\|u\|_X \leqslant 1$ для $u = \bigvee_k \lambda^k |h_j|$, $|g_j| \leqslant \lambda^j$ и $w = h_j + g_j$ при $j \in \mathbb{Z}$. Пользуясь тем, что $W \geqslant F > 0$ почти всюду, без потери общности можно считать, что $h_j, g_j \geqslant 0$ почти всюду. Возьмём такое число $l \in \mathbb{N}$, зависящее лишь от величины λ, что $\lambda^l > 2$. Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbb{T} \times \Omega$. Легко видеть, что если $\lambda^s \leqslant w(x) < \lambda^{s+1}$ при некотором $s \in \mathbb{Z}$, то $h_{s-l}(x) \geqslant \frac{1}{2}\lambda^s$ (так как $g_{s-l}(x) \leqslant \lambda^{s-l} \leqslant \frac{1}{2}\lambda^s$), и поэтому $u(x) \geqslant \lambda^{s-l} h_{s-l}(x) \geqslant \frac{1}{2}\lambda^{2s-l} \geqslant \frac{1}{2}\lambda^{-l-2}[w(x)]^2$, откуда следует, что $w \in X^{\frac{1}{2}}$ с некоторой оценкой для нормы, зависящей лишь от величины λ. Таким образом, w является подходящей A_p-мажорантой для функции f в решётке $X^{\frac{1}{2}}$. Предложение 6 доказано.

Теперь всё готово для доказательства предложения 1. Пусть в его условиях решётка $\left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\theta,2}$ BMO-регулярна при некотором $0<\theta<1$.

По теореме о реитерации имеем

$$\left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\theta,2} = \left(\mathrm{L}_2, \left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\beta}\right)_{\zeta,2} = \left(\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_2^{1-\beta} Z^{\frac{\beta}{2}}\right)_{\theta,2}$$

при всех $\theta = \beta\zeta$ и $\theta < \zeta < 1$, откуда следует, что решётка

$$\left(\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_2^{1-\beta} Z^{\frac{\beta}{2}}\right)_{\zeta,2}$$

BMO-регулярна при всех достаточно близких к 1 значениях ζ (разумеется, величина β зависит от ζ). Тогда также BMO-регулярна и решётка $\left(\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_2^{1-\beta} Z^{\frac{\beta}{2}}\right)_{\zeta,2}\left(l^2\right)$ (см., например, [3, предложение 1.11]), которая по предложению 2 совпадает с решёткой $\left(\mathrm{L}_2\left(l^2\right), \mathrm{L}_2^{1-\beta} Z^{\frac{\beta}{2}}\left(l^2\right)\right)_{\zeta,2}$. Следовательно, BMO-регулярна и решётка

$$\left(\left(Z^{\beta}\right)'\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l^{\infty}\right)\right)_{1-\zeta,\infty} = \left[\left(\mathrm{L}_1\left(l^1\right), \mathrm{L}_1^{1-\beta} Z^{\frac{\beta}{2}}\left(l^1\right)\right)_{\zeta,1}\right]' = \left[\left(\mathrm{L}_2\left(l^2\right), \mathrm{L}_2^{1-\beta} Z^{\frac{\beta}{2}}\left(l^2\right)\right)_{\zeta,2}^{2}\right]'$$

(последнее равенство вытекает из [4, предложение 14]). Поэтому решётка

$$\left(\left(Z^{\beta}\right)'^{\delta}\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l^{\infty}\right)\right)_{1-\zeta,\infty} = \left(\left(Z^{\beta}\right)'\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l^{\infty}\right)\right)_{1-\zeta,\infty}^{\delta}$$

A_2-регулярна при достаточно малых значениях $\delta > 0$ (см., например, замечания после [3, определение 1.1]; здесь мы также воспользовались формулой [4, предложение 14]). Обозначим для удобства $Y = \left(Z^{\beta}\right)'^{\delta}$ и зафиксируем некоторое число $\mu > 1$. Используя A_2-регулярность решёток $\mathrm{L}_{\infty}\left(l_{\lambda}^{\infty}\right)$, предложение 4 и формулу (5), получаем, что решётка

$$\begin{aligned}\left(Y\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l_{\mu}^{\infty}\right)\right)_{\alpha,\infty} &= \left(Y\left(l^{\infty}\right), \left(\mathrm{L}_{\infty}\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l_{\mu^2}^{\infty}\right)\right)_{\frac{1}{2},\infty}\right)_{\alpha,\infty} \\ &= \left(\left(Y\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l^{\infty}\right)\right)_{1-\zeta,\infty}, \mathrm{L}_{\infty}\left(l_{\mu^2}^{\infty}\right)\right)_{\frac{1-\zeta}{2-\zeta},\infty}\end{aligned}$$

также A_2-регулярна при всех достаточно малых значениях $\alpha = \frac{2(1-\zeta)}{2-\zeta}$, и в частности, для некоторого значения $\alpha < \frac{1}{2}$. Снова применяя предложение 4 и теорему о реитерации, получаем, что A_2-регулярна решётка

$$\left(Y\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l_{\mu}^{\infty}\right)\right)_{\frac{1}{2},\infty} = \left(\left(Y\left(l^{\infty}\right), \mathrm{L}_{\infty}\left(l_{\mu}^{\infty}\right)\right)_{\alpha,\infty}, \mathrm{L}_{\infty}\left(l_{\mu}^{\infty}\right)\right)_{\frac{\frac{1}{2}-\alpha}{1-\alpha}}.$$

Непосредственно умножая её на степенной вес $w_{\mu^{-1/2}}$, получаем, что A_2-регулярна решётка $\left(Y\left(l^\infty_{1/\lambda}\right), \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)\right)_{\frac{1}{2},\infty}$, где $\lambda = \mu^{\frac{1}{2}} > 1$. Предложение 6 теперь даёт A_2-регулярность решётки $Y = (Z^\beta)'^\delta$, откуда по [3, теорема 1.5] вытекает требуемая BMO-регулярность решётки Z. Предложение 1 доказано.

Благодарности. Автор признателен С. В. Кислякову за замечания к настоящей работе в процессе её подготовки.

Литература

1. I. Asekritova and N. Krugliak, *On equivalence of K- and J-methods for* $(n+1)$*-tuples of Banach spaces.* — Studia Math., **122**, No. 2 (1997), 99–116.
2. G. Sparr, *Interpolation of several Banach spaces.* — Ann. Mat. Pura Appl., **99** (1974), 247–316.
3. Д. В. Руцкий, BMO-*регулярность в решётках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и Анализ, **23**, No. 2 (2011), 248–295.
4. Д. В. Руцкий, *О связи между AK-устойчивостью и BMO-регулярностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **416** (2013), 175–187.

Rutsky D. V. Correction to the paper “On the relationship between AK-stability and BMO-regularity.”

This is a rather substantial correction to the original paper in Russian that was already applied to its English translation.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: `rutsky@pdmi.ras.ru`

Поступило 26 мая 2014 г.