Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

Д. В. Руцкий

ВЕСОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ КАЛЬДЕРОНА–ЗИГМУНДА И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ИНТЕРПОЛЯЦИИ

§0. Введение

Для простоты мы ограничиваемся лишь случаем пространств однородного типа $S = \mathbb{R}^n$ или $S = \mathbb{T}^n$, однако для сохранения естественной общности имеет смысл рассматривать решётки измеримых функций на пространстве $S \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ – некоторое σ-конечное измеримое пространство; при этом основные интересующие нас операторы вроде максимального оператора Харди-Литтлвуда M действуют лишь по первой переменной. Подробнее о решётках измеримых функций см., например, [10]. Пусть Q – некоторый проектор, являющийся оператором Кальдерона–Зигмунда, и для решётки X пространство X^Q состоит из функций f, в некотором смысле удовлетворяющих условию $Qf = f$. Как будет видно из дальнейшего, сам по себе вопрос определения пространства X^Q в общей ситуации приводит к различным сложностям технического характера, которые мы будем обсуждать по ходу работы. Многие интересные пространства гармонического анализа, такие, как вещественные пространства Харди и Соболева, можно определить в виде L_p^Q для подходящего проектора Q (действующего в пространстве векторнозначных функций); подробнее см., например, [11]. В настоящей заметке мы рассмотрим следующий вопрос: при каких условиях пара $\left(\mathrm{L}_1^Q, X^Q\right)$ K-замкнута в паре (L_1, X), т. е. найдётся такая константа C, что для всякой функции $h \in \mathrm{L}_1^Q + X^Q$ и произвольного разложения $h = f + g$, $f \in \mathrm{L}_1$, $g \in X$, найдётся некоторое разложение $h = F + G$, $F \in \mathrm{L}_1^Q$, $G \in X^Q$, такое, что $\|F\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}_1}$ и $\|G\|_X \leqslant C\|g\|_X$? Это свойство было ранее установлено в [11] для случая $X = \mathrm{L}_p$ при всех $1 < p \leqslant \infty$ с помощью так называемого метода Бургейна, и впоследствии оказалось полезным в

Ключевые слова: A_1-регулярность, K-замкнутость, пространства типа Харди, вещественная интерполяция, разложение Кальдерона–Зигмунда, проекторы Кальдерона–Зигмунда.

ряде вопросов; см. также [3]. В работе [9] было, среди прочего, исследовано весовое разложение Кальдерона–Зигмунда, с помощью которого в диссертации [6, глава 4], помимо прочего, удалось распространить этот результат на случай A_1-регулярных решёток X (определение см. ниже).

Теорема 1. *Предположим, что* X *–* A_1*-регулярная решётка измеримых функций, обладающая свойством Фату, а* Q *– оператор Кальдерона–Зигмунда, являющийся проектором. Тогда пара* $\left(\mathrm{L}_1^Q, X^Q\right)$ K*-замкнута в паре* (L_1, X) *с константой, зависящей лишь от константы* A_1*-регулярности решётки* X *и свойств проектора* Q.

Типичный пример, из которого и получается этот результат – случай решётки $X = \mathrm{L}_\infty(w) = \{g \mid |g| \leqslant Cw \text{ п. в.}\}$; эта решётка A_1-регулярна тогда и только тогда, когда $w \in \mathrm{A}_1$. В настоящей работе мы приведём несколько упрощённое изложение доказательства теоремы 1, а также обсудим некоторые связанные вещи. По поводу классов A_p весов, удовлетворяющих условию Макенхаупта, см., например, [8, глава 5]. Решётка X называется A_p-регулярной (соответственно, BMO-регулярной) с константами (C, m), если для всякой функции $f \in X$ найдётся некоторая мажоранта $w \geqslant |f|$, такая, что $\|w\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $w \in \mathrm{A}_p$ (соответственно, $\log w \in \mathrm{BMO}$) с константой C. Как выяснилось, подобные условия, и, в особенности, условие A_1-регулярности, нередко характеризуют в том или ином смысле интересные (с точки зрения поведения операторов гармонического анализа) решётки измеримых функций в достаточно общей ситуации; см., например, [7,12]. В частности, известно, что условие A_1-регулярности решётки X равносильно ограниченности максимального оператора M в решётке X, а для широкого класса решёток X и операторов Кальдерона–Зигмунда Q ограниченность оператора Q в решётке X эквивалентна A_1-регулярности решёток X и X'. Может показаться, что в целом более “тонкие” и загадочные интерполяционные свойства пространств X^Q вряд ли можно охарактеризовать таким простым способом. Тем не менее, постепенно выяснилось, что в важном случае пространств типа Харди X_A (соответствующем проектору Рисса $Q = \mathbb{P}$) имеется довольно тесная связь подобных условий с интерполяционными свойствами: например, по крайней мере при $p \in \{1, 2, \infty\}$, для того, чтобы пара (H_p, X_A) была K-замкнута в паре (L_p, X), необходимо и достаточно, чтобы рёшетка X была BMO-регулярной; см. [3]

и [13]. В общем случае проекторов Кальдерона–Зигмунда Q, однако, подобная характеризация может и не иметь места, как показывает следующий тривиальный пример. Пространство постоянных функций на окружности $\mathbb{T}$ с нормированной мерой Лебега можно определить с помощью интегрального оператора Q с ядром $K(x, y) = 1$, который, разумеется, также является оператором Кальдерона–Зигмунда. Пусть w – какой-то суммируемый вес, причём $w > 0$ почти всюду. В этом случае пространство $\mathrm{L}_\infty(w)^Q$ невырождено тогда и только тогда, когда

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t \in \mathbb{T}} w(t) > 0. \tag{1}$$

Однако, поскольку множество $\mathrm{L}_\infty(w)$ плотно в L_1, легко видеть, что если пара $\left(\mathrm{L}_1^Q, \mathrm{L}_\infty(w)^Q\right)$ K-замкнута в паре $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty(w))$, то пространство $\mathrm{L}_\infty(w)^Q$ обязано быть невырожденым. Это означает, что при $p > 1$ для данного проектора Q заключение теоремы 1 не имеет места с A_p-регулярными решётками $\mathrm{L}_\infty(w)$ для всех весов $w \in \mathrm{A}_p$, поскольку среди последних есть много весов, не удовлетворяющих условию (1). Впрочем, можно надеяться, что приведённый пример является лишь досадным исключением; по существу, он имеет отношение скорее не к интерполяции пространств типа Харди, а (по двойственности) к довольно подробно изученному случаю интерполяции пространств коразмерности 1 (см., например, [1]). Отметим также, что рассматриваемый вопрос тесно связан с общими задачами устойчивости разложений функций под действием различных сингулярных операторов; см., например, недавнюю монографию [4].

§1. Весовое разложение Кальдерона–Зигмунда и метод Бургейна

Весом мы называем всякую почти всюду неотрицательную измеримую функцию w. Для решётки X весовое пространство $X(w)$ можно естественным образом определить как $X(w) = \{wf \mid f \in X\}$ с нормой $\|g\|_{X(w)} = \left\|gw^{-1}\right\|_X$. Это определение, однако, приводит к несколько непривычной записи $\mathrm{L}_p\left(w^{-1/p}\right)$ для "стандартных" весовых пространств с нормой

$$\|h\|_{\mathrm{L}_p\left(w^{-1/p}\right)} = \left(\int |h|^p w\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для измеримых множеств E и весов w мы обозначаем через $w(E)=\int\limits_E w$ соответствующую меру. Нам понадобится весовой вариант следующего хорошо известного понятия; мы формулируем его для общих линейных операторов, поскольку применяться оно будет к некоторым производным операторам от операторов Кальдерона–Зигмунда, и ещё мы задействуем дополнительную переменную.

Определение 2. *Пусть линейный оператор P задан на пространстве $\mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$, где a – некоторый вес. Оператор P допускает разложение типа Кальдерона–Зигмунда с весом a, если для каждого значения $\lambda > 0$ и каждой функции $f \in \mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$ найдётся такое разложение $f = g+b$ и измеримое множество $\Omega \subset S \times \mathcal{X}$, что с некоторой константой C, не зависящей от f, выполнены следующие условия.*

1. $\|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant C\lambda$.
2. $\|g\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})}$.
3. $\|b\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})}$.
4. $a(\Omega) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})}$.
5. $\int\limits_{(S\times\mathcal{X})\setminus\Omega} |Pb|a \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})}$.

Стандартным образом получается, что свойство, заданное в определении 2, в сочетании с ограниченностью оператора P в пространстве $\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)$ при некотором значении $t > 1$ влечёт весовой слабый тип оператора P, что само по себе имеет много интересных приложений; см. [9, §2]. Важно отметить, что, в частности, оператор P тогда корректно задан на всём пространстве $\mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$.

Рассмотрим теперь вкратце вопрос об определении пространств X^Q, к которому мы ещё будем возвращаться по мере надобности. Самый простой случай возникает, когда проектор Q ограниченно действует в пространстве X; тогда естественное определение

$$X^Q = \{f \in X \mid Qf = f\} \tag{2}$$

корректно задаёт замкнутое подпространство в X. Нас, однако, особо интересуют случаи, когда оператор Q не ограничен в X. Если оператор Q задан на пространстве $\mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$ (но не обязательно принимает значения в этом же пространстве) и является проектором (т. е. соотношение $Q^2 = Q$ выполнено на некотором плотном подмножестве пространства $\mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$), то для решётки X измеримых функций на S, такой, что множество $X \cap \mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$ плотно в X, можно естественным образом определить соответствующее пространство X^Q как замыкание множества

$$\left\{f \in X \cap \mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right) \mid Qf = f\right\} \tag{3}$$

в решётке X.

Основное для нас применение разложения типа Кальдерона–Зигмунда к интерполяции – известный метод Бургейна – выглядит следующим образом.

Предложение 3. *Пусть линейный оператор Q задан на пространстве $\mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$, является проектором, обладает разложением типа Кальдерона–Зигмунда с весом a, и ограничен в пространстве $\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)$ при некотором значении $t > 1$. Тогда пара*

$$\left(\mathrm{L}_1^Q\left(a^{-1}\right), \mathrm{L}_t^Q\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)\right)$$

K-*замкнута в паре* $\left(\mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right), \mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)\right)$.

Действительно, пусть некоторая функция $f \in \mathrm{L}_1^Q\left(a^{-1}\right) + \mathrm{L}_t^Q\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)$ имеет разложение $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in \mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$, $f_1 \in \mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)$. Найдём для функции f_0 и параметра

$$\lambda = \left(\|f_1\|^t_{\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)} \|f_0\|^{-1}_{\mathrm{L}_1(a^{-1})}\right)^{\frac{1}{t-1}}$$

разложение типа Кальдерона–Зигмунда $f_0 = g + b$ с весом a. Простые оценки показывают, что разложение $f = g_0 + g_1$, $g_0 = Qb$, $g_1 = Q(g + f_1)$ будет искомым разложением в заявленном свойстве K-замкнутости: по свойствам 1 и 2 определения 2 неравенства

$$\begin{aligned}\|g_1\|_{\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)} &\leqslant c\|g + f_1\|_{\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)} \\ &\leqslant c\|f_1\|_{\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)} + c\left(\|g\|^{t-1}_{\mathrm{L}_\infty}\|g\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})}\right)^{\frac{1}{t}} \leqslant c'\|f_1\|_{\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)}\end{aligned}$$

справедливы для некоторых констант c и c', не зависящих от f_0 и f_1, и, поскольку $f = b + g + f_1$ и $(I - Q)f = 0$, по свойствам 3–5 определения 2 получаем

$$\|Qb\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})} = \int\limits_{(S\times\mathcal{X})\setminus\Omega} |Qb|a + \int\limits_{\Omega} |b + (I-Q)(g+f_1)|a$$
$$\leqslant c\|f_0\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})} + ca(\Omega)^{\frac{t-1}{t}}\|g+f_1\|_{\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)} \leqslant c'\|f_0\|_{\mathrm{L}_1(a^{-1})}$$

с некоторыми константами c и c', не зависящими от f_0 и f_1.

Пусть Q – оператор Кальдерона–Зигмунда на S, т. е. Q является сингулярным интегральным оператором, таким, что Q ограничен в L_q при некотором $1 < q < \infty$, и его ядро $K(x,y)$ вместе с ядром $\tilde{K}(x,y) = K(y,x)$ сопряжённого оператора удовлетворяет оценкам

$$|K(x,s) - K(x,t)| \leqslant C_K \frac{|s-t|^{\gamma}}{|x-s|^{n+\gamma}} \text{ для } \quad |x-s| > 2|s-t|, \tag{4}$$

где x, s, t принадлежат пространству $S = \mathbb{R}^n$ или $S = \mathbb{T}^n$. Подробнее о таких операторах см., например, [8]. Для всякого оператора T и веса u можно определить соответствующий "окаймлённый" оператор T_u формулой $T_u f = \frac{1}{u}T(uf)$, который естественным образом возникает при замене веса. Нас в первую очередь интересует следующий вопрос: для каких весов u и a оператор Q_u допускает разложение Кальдерона–Зигмунда с весом a? В работе [9] был получен (без дополнительной переменной и несколько неявным образом) следующий результат.

Теорема 4 ([9, §2])**.** *Пусть Q – оператор Кальдерона–Зигмунда, $a \in \mathrm{A}_\infty$, $w \in \mathrm{A}_1$ и $u = \frac{a}{w}$. Тогда оператор Q_u допускает разложение типа Кальдерона–Зигмунда с весом a; при этом оператор Q_u также ограничен в соответствующем пространстве $\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)$ при всех достаточно малых значениях $t > 1$. В частности, Q_u – оператор слабого типа $(1,1)$ с весом a.*

Построение соответствующего разложения основано на применении стандартной конструкции Кальдерона–Зигмунда с весовым максимальным оператором

$$M_{[a]}f(t) = \sup_{Q\ni t} \frac{1}{a(Q)} \int\limits_{Q} |f|a,$$

где супремум берётся по диадическим кубам. Разумеется, этот результат сохраняется и при введении дополнительной переменной; более того, его нетрудно получить из результата без дополнительной переменной, проинтегрировав соответствующие оценки в определении 2. Утверждение об ограниченности оператора Q_u в пространстве $\mathrm{L}_t\left(a^{-\frac{1}{t}}\right)$ вытекает из свойств весов Макенхаупта (см. [9, лемма 2]). Отметим, что точные условия на пары весов a и u, при которых верно заключение теоремы 4 о слабом типе оператора Q_u, пока неясны; можно, однако, показать, что во многих интересных ситуациях условие $w = \frac{a}{u} \in \mathrm{A}_1$ является необходимым. Хорошо известно, что оно необходимо в стандартном "неокаймлённом" частном случае $u = 1$, $a = w$ (см., например, [8, глава 5, §4.6]), поэтому трудно ожидать каких-то интересных непосредственных обобщений.

§2. Случай пары $\left(\mathrm{L}_1^Q\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty^Q\left(w_1\right)\right)$

Пусть задан оператор Кальдерона–Зигмунда Q, являющийся проектором. В этом разделе мы рассмотрим следующий вопрос: для каких весов w_0 и w_1 (подходящим образом определённая) пара

$$\left(\mathrm{L}_1^Q\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty^Q\left(w_1\right)\right)$$

K-замкнута в паре $\left(\mathrm{L}_1\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty\left(w_1\right)\right)$? Безвесовой случай был установлен в работе [11]; см. также [3, §4]. Идея заключается в том, чтобы получить K-замкнутость на всём интервале $(1,\infty)$ склейкой K-замкнутости на трёх пересекающихся интервалах. Мы применим ту же самую схему с использованием весового разложения Кальдерона–Зигмунда, и посмотрим, что из этого выйдет.

Итак, пусть имеются веса $a_0 \in \mathrm{A}_\infty$, $w_0 \in \mathrm{A}_1$ и $u_0 = \frac{a_0}{w_0}$. Окаймлённый оператор Q_{u_0} и вес a_0 тогда по теореме 4 удовлетворяют условиям предложения 3, и поэтому пара $\left(\mathrm{L}_1^{Q_{u_0}}\left(a_0^{-1}\right), \mathrm{L}_t^{Q_{u_0}}\left(a_0^{-\frac{1}{t}}\right)\right)$ K-замкнута в паре $\left(\mathrm{L}_1\left(a_0^{-1}\right), \mathrm{L}_t\left(a_0^{-\frac{1}{t}}\right)\right)$ при всех достаточно малых значениях $t > 1$ с надлежащими оценками на t и константу K-замкнутости через константы весов a_0 и w_0 и свойства оператора Q. Легко видеть, что для всякой решётки X и веса u выполнено соотношение $[X(u)]^Q = uX^{Q_u}$ в смысле равенства множеств и норм. Отсюда сразу следует (напомним, что $a_0 = u_0 w_0$), что пара

$$\left(\mathrm{L}_1^Q\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_t^Q\left(a_0^{1-\frac{1}{t}} w_0^{-1}\right)\right) \tag{5}$$

K-замкнута в паре $\left(\mathrm{L}_1\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_t\left(a_0^{1-\frac{1}{t}} w_0^{-1}\right)\right)$, причём оператор Q ограничен во втором пространстве.

Чтобы получить K-замкнутость на интервале, охватывающем правый конец шкалы $(1, \infty)$, а также чтобы даже просто определить соответствующее пространство, нам придётся воспользоваться двойственностью. Напомним, что для банахова пространства X и его подпространства $Y \subset X$ аннулятором $Y^{\perp}$ называется множество

$$Y^{\perp} = \{f \in X^* \mid f(y) = 0 \text{ для всех } y \in Y\}.$$

Лемма 5 ([3, лемма 1.2]). *Пусть (X_0, X_1) – совместимая пара банаховых пространств, и (Y_0, Y_1) – некоторая её подпара. Если пространство $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1, то следующие условия эквивалентны.*

1. *Пара (Y_0, Y_1) K-замкнута в паре (X_0, X_1).*
2. *Пара $\left(Y_0^{\perp}, Y_1^{\perp}\right)$ K-замкнута в паре (X_0^*, X_1^*).*

Легко проверить, что для весовых пространств $\mathrm{L}_p(\omega)$, в которых ограничен оператор Q, выполнено соотношение

$$\left[\mathrm{L}_{p'}^{I-Q^*}\left(\omega^{-1}\right)\right]^{\perp} = \mathrm{L}_p^Q(\omega)$$

при $1 < p < \infty$. Это соображение позволяет естественным образом распространить определение пространств $X = \mathrm{L}_p^Q(\omega)$ на случай $p = \infty$, когда уже нельзя утверждать, что оператор Q задан на некотором плотном множестве. Мы полагаем по определению

$$\mathrm{L}_{\infty}^Q(\omega) = \left[\mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(\omega^{-1}\right)\right]^{\perp}$$

для всех подходящих весов ω. В случае, когда пространство S обладает конечной мерой, это определение согласовано с предыдущим определением, и даже с определением (2) (см., например, [3, следствие 4.4]). Множества вида (3) уже, вообще говоря, не будут плотными в сильной топологии пространства $X = L_{\infty}(\omega)$ (см. [3, предложение 4.1]).

С помощью леммы 5 по двойственности получаем, что для всяких весов $a_1 \in \mathrm{A}_{\infty}$ и $w_1 \in \mathrm{A}_1$ пара

$$\left(\mathrm{L}_{t'}^Q\left(a_1^{-\frac{1}{t'}} w_1\right), \mathrm{L}_{\infty}^Q(w_1)\right) \tag{6}$$

К-замкнута в паре $\left(\mathrm{L}_{t'}\left(a_1^{-\frac{1}{t'}}w_1\right), \mathrm{L}_\infty\left(w_1\right)\right)$ при всех достаточно малых значениях $t > 1$ с надлежащими оценками на t и константу K-замкнутости через соответствующие константы весов a_1, w_1 и свойства оператора Q, причём оператор Q ограничен в первом пространстве.

Ограниченность оператора Q на соответствующих внутренних концах интервалов (5) и (6) означает, что K-замкнутость для серединного интервала, который будет их перекрывать при подходящем выборе весов, всегда имеет место в рассматриваемых предположениях. Наиболее общий из известных результатов о K-замкнутости типа Т. Вольфа про "склейку" интерполяционных шкал выглядит следующим образом. Пусть (X_0, X_1) – интерполяционная пара квазибанаховых пространств и задано число $0 < \theta < 1$. Пространство E, являющееся промежуточным для пары (X_0, X_1), принадлежит классу $\mathcal{C}(\theta; X_0, X_1)$, если имеет место непрерывное вложение $E \subset (X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ и $\|x\|_E \leqslant C_E \|x\|_{X_0}^{1-\theta} \|x\|_{X_1}^{\theta}$ для всякого $x \in E$ с некоторой константой C_E, не зависящей от x.

Предложение 6 ([5, предложение 5]). *Пусть (X_0, X_1) – интерполяционная пара квазибанаховых пространств, (Y_0, Y_1) – её замкнутая подпара и заданы числа $0 < \theta < \delta < 1$. Пусть также заданы пространства $E_0 \in \mathcal{C}(\theta; X_0, X_1)$, $E_1 \in \mathcal{C}(\delta; X_0, X_1)$, и некоторые их замкнутые подпространства F_0 и F_1 соответственно, причём пространства F_0 и F_1 оба содержат пространство $Y_0 \cap Y_1$ и справедливы включения $F_0 \subset Y_0 + F_1$ и $F_1 \subset Y_1 + F_0$. Если пара (Y_0, F_1) K-замкнута в паре (X_0, E_1), а пара (F_0, Y_1) K-замкнута в паре (E_0, X_1), то пара (Y_0, Y_1) K-замкнута в паре (X_0, X_1).*

Про весовые пространства Лебега хорошо известно (см., например, [2]), что если $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ и $\omega = \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}$, то

$$\mathrm{L}_p\left(\omega\right) \in \mathcal{C}\left(\theta; \mathrm{L}_{p_0}\left(\omega_0\right), \mathrm{L}_{p_1}\left(\omega_1\right)\right),$$

по крайней мере при $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$ или $1 \leqslant p_0 = p_1 < \infty$. Поскольку крайние пространства шкалы $\left(\mathrm{L}_1\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty\left(w_1\right)\right)$ уже заданы, для возможности склейки необходимо подобрать такие точки

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 1$$

интервала $(0,1)$, что соответствующая K-замкнутость имеет место для пар

$$\left(\mathrm{L}_1\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_{\frac{1}{1-\theta_2}}\left(w_0^{-(1-\theta_2)} w_1^{\theta_2}\right)\right),$$

$$\left(\mathrm{L}_{\frac{1}{1-\theta_1}}\left(w_0^{-(1-\theta_1)} w_1^{\theta_1}\right), \mathrm{L}_{\frac{1}{1-\theta_4}}\left(w_0^{-(1-\theta_4)} w_1^{\theta_4}\right)\right)$$

и

$$\left(\mathrm{L}_{\frac{1}{1-\theta_3}}\left(w_0^{-(1-\theta_3)} w_1^{\theta_3}\right), \mathrm{L}_\infty\left(w_1\right)\right).$$

Это означает, что для применения приведённых выше результатов для интервалов (5) и (6) нужно подобрать такие веса $a_0, a_1 \in \mathrm{A}_\infty$, что θ_2 достаточно мало, θ_3 достаточно близко к 1,

$$w_0^{-(1-\theta_j)} w_1^{\theta_j} = a_0^{\theta_j} w_0^{-1}$$

при $j \in \{1,2\}$, и

$$w_0^{-(1-\theta_j)} w_1^{\theta_j} = a_1^{\theta_j - 1} w_1^{-1}$$

при $j \in \{3,4\}$. Легко видеть, что эти условия выполнены тогда и только тогда, когда $a_0 = a_1 = w_0 w_1$. Напомним, что по дороге мы использовали теорему 4, что вынуждает нас наложить условия $a_0, a_1 \in \mathrm{A}_\infty$. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Предложение 7. *Пусть даны веса $w_0, w_1 \in \mathrm{A}_1$, такие, что выполнено условие $w_0 w_1 \in \mathrm{A}_\infty$. Тогда пара*

$$\left(\mathrm{L}_1^Q\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty^Q\left(w_1\right)\right)$$

K-замкнута в паре $\left(\mathrm{L}_1\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty\left(w_1\right)\right)$ с константой, зависящей лишь от A_1-констант весов w_0 и w_1 и A_∞-константы веса $w_0 w_1$.

Отметим, что неясно, является ли условие $w_0 w_1 \in \mathrm{A}_\infty$ существенным для заключения предложения 7.

§3. Случай пары $\left(\mathrm{L}_1^Q, X^Q\right)$

Из предложения 7 легко получить теорему 1, если пространство X A_1-регулярно, а пространство X^Q задано таким образом, что выполнено естественное условие

$$X^Q \cap \mathrm{L}_\infty(w) = \mathrm{L}_\infty^Q(w) \tag{7}$$

для всякого $w \in X \cap \mathrm{A}_1$. Действительно, пусть заданы функция $f \in \mathrm{L}_1^Q + X^Q$ и разложение $f = g_0 + h_0$ в сумму функций $g_0 \in \mathrm{L}_1$

и $h_0 \in X$. Для функции h_0 найдётся A_1-мажоранта $w_0 \in \mathrm{A}_1$ с константой C, $\|w_0\|_X \leqslant m\|h_0\|_X$, где константы C и m не зависят от h_0. Тогда $h_0 \in \mathrm{L}_\infty(w_0)$. Если $S = \mathbb{T}^n$, условие $f \in \mathrm{L}_1^Q \subset \mathrm{L}_1^Q + \mathrm{L}_\infty^Q(w_0)$ выполнено автоматически, и по предложению 7 найдётся такое разложение $f = g + h$, что $g \in \mathrm{L}_1^Q$ и $h \in \mathrm{L}_\infty^Q(w_0)$ с соответствующими оценками

$$\|g\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant C\|g_0\|_{\mathrm{L}_1}$$

и

$$\|h\|_X \leqslant \|h\|_{\mathrm{L}_\infty(w_0)}\|w_0\|_X \leqslant Cm\|h_0\|_X$$

с некоторой константой C, не зависящей от функций g_0 и h_0, что доказывает K-замкнутость в этом случае.

В случае $S = \mathbb{R}^n$ неясно, имеет ли место включение

$$f \in \mathrm{L}_1^Q + \mathrm{L}_\infty^Q(w_0).$$

Однако по условию $f = g_1 + h_1$ для некоторых функций $g_1 \in \mathrm{L}_1^Q$ и $h_1 \in X^Q$. Пусть w_1 – A_1-мажоранта для функции h_1, и $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Тогда для веса $w = w_0 + \varepsilon w_1$ включение

$$f \in \mathrm{L}_1^Q + \mathrm{L}_\infty^Q(w)$$

имеет место, и по предложению 7 найдётся такое разложение

$$f = g_\varepsilon + h_\varepsilon,$$

что $g_\varepsilon \in \mathrm{L}_1^Q$ и $h_\varepsilon \in \mathrm{L}_\infty^Q(w)$ с соответствующими оценками

$$\|g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant C\|g_0\|_{\mathrm{L}_1}$$

и $\|h_\varepsilon\|_{\mathrm{L}_\infty(w)} \leqslant C$ с некоторой константой C, не зависящей от ε, g_0 и h_0. Выберем число ε настолько малым, чтобы было выполнено соотношение $\|w\|_X \leqslant 2\|w_0\|_X$. Тогда для функций g_ε и h_ε будут выполнены оценки $\|g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant C\|g_0\|_{\mathrm{L}_1}$ и $\|h_\varepsilon\|_X \leqslant \|h_\varepsilon\|_{\mathrm{L}_\infty(w)}\|w\|_X \leqslant 2Cm\|h_0\|_X$, что означает K-замкнутость в общем случае. Теорема 1 доказана в предположении, что выполнено условие (7).

Займёмся теперь вопросом определения пространства X^Q, а именно, построим *наименьшее* подпространство X^Q пространства X, обладающее свойством (7). Пусть задан проектор Q, являющийся оператором Кальдерона–Зигмунда, и X – A_1-регулярная решётка с константами (C, m), обладающая свойством Фату. Для всякого ненулевого веса $w \in X \cap \mathrm{A}_1$ положим, по аналогии с использованным определением пространства L_∞^Q,

$$X_w^Q = \left(\mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w^{-1}\right)\right)^\perp \subset \mathrm{L}_\infty(w)$$

с топологией решётки X. Это определение корректно, поскольку по теореме 4 проектор $I - Q^*$ задан на пространстве $\mathrm{L}_1\left(w^{-1}\right)$. Шары пространства X_w^Q замкнуты в пространстве X, поскольку, как легко проверить, эти шары замкнуты по мере. Пространства X_w^Q монотонны по весу w: если $w_1 \leqslant w_2$ почти всюду, то

$$\mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w_2^{-1}\right) \subset \mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w_1^{-1}\right)$$

и $X_{w_1}^Q \subset X_{w_2}^Q$. Теперь положим

$$X^Q = \bigcup_{\substack{w\in X,\, w\neq 0,\\ w\in \mathrm{A}_1 \text{ с константой } C}} X_w^Q \tag{8}$$

с топологией пространства X. Легко видеть, что X^Q – линейное пространство, поскольку для любых двух весов $w_0, w_1 \in X \cap \mathrm{A}_1$ и веса $w = w_0 + w_1$ выполнены соотношения $\mathrm{L}_1\left(w_0^{-1}\right) \cap \mathrm{L}_1\left(w_1^{-1}\right) \supset \mathrm{L}_1\left(w^{-1}\right)$, $\mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w_0^{-1}\right) \cap \mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w_1^{-1}\right) \supset \mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w^{-1}\right)$, т. е.

$$\left[X_{w_0}^Q\right]^\perp \cap \left[X_{w_1}^Q\right]^\perp \supset \left[X_w^Q\right]^\perp,$$

откуда получаем, переходя к аннуляторам, что $X_{w_0}^Q + X_{w_1}^Q \subset X_w^Q$. Далее, проверим, что X^Q является замкнутым подпространством решётки X. Действительно, пусть последовательность $f_n \in X^Q$, $n \in \mathbb{N}$, такова, что ряд $\sum\limits_n f_n$ сходится в X; достаточно проверить, что $g = \sum\limits_n f_n \in X^Q$. Группируя члены этого ряда, можно считать, что он обладает быстрой сходимостью, т. е. $\|f_n\|_X \leqslant 2^{-n}$ для $n \geqslant 2$. По A_1-регулярности решётки X найдутся соответствующие A_1-мажоранты w_n для функций $2^n f_n$. По монотонности (или воспользовавшись более общим результатом [12, предложение 3.4]) легко проверить, что вес $w = \sum\limits_n 2^{-n} w_n$ принадлежит классу A_1 с константой C, и поэтому он является подходящей A_1-мажорантой для функции g, причём

$$|f_n| \leqslant 2^{-n} w_n \leqslant w$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $f_n \in X_w^Q$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и поэтому $g \in X_w^Q \subset X^Q$ в силу замкнутости шаров пространства X_w^Q.

Легко убедиться, что это определение совпадает с введённым ранее в случае, когда проектор Q является сингулярным интегральным оператором Кальдерона–Зигмунда, заданным на множестве $X \cap \mathrm{L}_1$, если предположить, что это множество плотно в решётке X. Действительно, если $f \in X^Q \cap \mathrm{L}_1$ и оператор Q задан на функции f, то $f \in X_w^Q = \left[\mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w^{-1}\right)\right]^{\perp}$ для некоторого веса $w \in \mathrm{A}_1$. Это означает, что для любой ограниченной функции g с носителем конечной меры (напомним, что мы предполагаем, что оператор Q задан на пространстве L_q при некотором $1 < q < \infty$) выполнено соотношение

$$0 = \int f[(I - Q^*)g] = \int [(I - Q)f]g, \tag{9}$$

откуда следует, что $Qf = f$, и, таким образом,

$$X^Q \subset \operatorname*{clos}_X \{f \in X \cap \mathrm{L}_1 \mid Qf = f\}.$$

С другой стороны, если $f \in X \cap \mathrm{L}_1$ и $Qf = f$, то по соотношению (9) имеем $f \in X_w^Q$ для любой A_1-мажоранты w функции f, что доказывает обратное включение

$$X^Q \supset \operatorname*{clos}_X \{f \in X \cap \mathrm{L}_1 \mid Qf = f\}.$$

Таким образом, в этом случае оба определения дают одно и то же пространство X^Q.

Напоследок заметим, что определение (8) можно переписать в виде $X^Q = X \cap N_Q$, где $N_Q = \bigcup_{w \in \mathrm{A}_1} \left(\mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(w^{-1}\right)\right)^{\perp}$ – некоторый аналог класса Смирнова N_+, используемого для определения пространств типа Харди. Это определение, однако, явным образом работает лишь для A_1-регулярных решёток, и множество N_Q, в отличие от N_+, может быть незамкнуто относительно сходимости по мере, поскольку множество A_1 само по себе плотно относительно сходимости по мере в множестве почти всюду неотрицательных измеримых функций. Возникает вопрос: можно ли каким-то естественным образом расширить множество N_Q, чтобы охватить большинство интересных случаев? Желательно, чтобы по крайней мере оно охватывало все пространства X^Q, появлявшиеся в результатах настоящей работы, а также их аннуляторы. Просто замыкание множества N_Q относительно сходимости по мере, вообще говоря, не годится: например, в случае пространств коразмерности 1 на окружности $S = \mathbb{T}$, соответствующих проектору $Qf = f - \int f$ (этот случай двойственен примеру, рассмотренному во введении), замыкание относительно сходимости по мере полностью разрушает условие $Qf = f$.

Литература

1. S. V. Astashkin, P. Sunehag, *Real method of interpolation on subcouples of codimension one.* — Studia Mathematica **186**, No. 2 (2008), 151–168.
2. J. Bergh, J. Löfström, *Interplation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, 1976.
3. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
4. S. Kisliakov, N. Kruglyak, *Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney–Besicovitch Coverings and Singular Integrals.* Birkhäuser/Springer Basel AG, 2012.
5. S. V. Kisliakov, *On* BMO*-regular couples of lattices of measurable functions.* — Stud. Math. **159**, No. 2 (2003), 277–289.
6. D. V. Rutsky, *Thesis* (*C. Sc.*) [in Russian]. St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 2011.
7. D. V. Rutsky, *A_1-regularity and boundedness of Calderon–Zygmund operators.* — Studia Mathematica, 2014. to appear; `http://arxiv.org/abs/1304.3264`.
8. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integral.* Princeton University Press, 1993.
9. Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, *Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление.* — Алгебра и Анализ **16**, No. 5 (2004), 1–33.
10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* БХВ, Петербург, 2004.
11. С. В. Кисляков, Куанхуа Шу, *Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы.* — Алгебра и Анализ **8**, No. 4 (1996), 75–109.
12. Д. В. Руцкий, BMO*-регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 2 (2001), 248–295.
13. Д. В. Руцкий, *О связи между* AK*-устойчивостью и* BMO*-регулярностью.* – Зап. научн. семин. ПОМИ **416** (2013), 175–187; Исправление к работе *О связи между* AK*-устойчивостью и* BMO*-регулярностью* (настоящий сборник).

Rutsky D. V. Weighted Calderón–Zygmund decomposition with some applications to interpolation.

Let X be an A_1-regular lattice of measurable functions and let Q be a projection which is also a Calderón–Zygmund operator. Then it is possible to define a space X^Q consisting of the functions $f \in X$ that satisfy $Qf = f$ in a certain sense. By using the Bourgain approach to interpolation, we establish that the couple $\left(\mathrm{L}_1^Q, X^Q\right)$ is K-closed in (L_1, X). This result is

sharp in the sense that, in general, A_1-regularity cannot be replaced by weaker conditions such as A_p-regularity for $p > 1$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 3 июня 2014 г.