Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

С. В. Кисляков, Н. Я. Кругляк, Дж. Нийобухунджиро

ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. II

§1. Введение

Интерполяционные пространства вещественного метода для совместимой пары (X_0, X_1) банаховых пространств вводятся в терминах неких стандартных функционалов, заданных (иногда не всюду) на сумме $X_0 + X_1$. Определения этих функционалов будут приведены в следующем параграфе. Вычисление каждого такого функционала представляет собой довольно трудную эктремальную задачу. Ее оптимальное решение, разумеется, не обязано существовать. Однако в работе [1] было показано, что в случае, когда такое решение существует, оно удовлетворяет любопытным и неочевидным экстремальным соотношениям в терминах линейной двойственности. См. следствия 1 и 2 и замечания 2 и 3 в [1]. Доказательство было непростым и опосредованным – оно существенно опиралось на довольно тонкие результатвы абстрактного выпуклого анализа из работы [2].

В настоящей заметке мы выведем те же экстремальные соотношения более коротким способом. При этом мы полностью избежим ссылок на нетривиальные результаты теории выпуклых функций на линейных пространствах, а рассуждение будет пригодно и для комплексных скаляров (для доказательства из [1] последнее, по меньшей мере, неочевидно). На наш взгляд, метод, используемый здесь, проясняет природу явления: он опирается исключительно на теорему Хана–Банаха, но решающее наблюдение состоит в том, что после ее применения возникает касательная к *строго выпуклой гладкой* кривой *на плоскости.* Соображения гладкости, разумеется, использовались и в [1], но относились к бесконечномерным пространствам.

Функционалы, о которых идет речь, важны не только в теории интерполяции. Некоторые указания по этому поводу можно найти в [1].

Ключевые слова: оптимальные разложения, вещественная интерполяция, двойственность.

Поддержано РФФИ, грант no. 14-01-00198 (С. В. Кисляков).

§2. Определения, формулировки и простые утверждения

Функционалов, с помощью которых вводятся (одни и те же) интерполяционные пространства, довольно много, и их выбор обычно определяется удобством. См. чуть подробнее об этом в [1]. Дадим необходимые определения. Всюду мы молчаливо предполагаем, что пересечение $X_0 \cap X_1$ плотно по норме как в X_0, так и в X_1.

Пусть $1 \leqslant p_0, p_1 < \infty$. Так называемый L_{p_0,p_1}-функционал (или просто L-функционал) задается для $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ формулой

$$L_{p_0,p_1}(t,x;X_0,X_1) \\ = \inf\left\{\frac{1}{p_0}\|x_0\|_{X_0}^{p_0} + \frac{t}{p_1}\|x_1\|_{X_1}^{p_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\right\}. \tag{1}$$

При $p_0 = p_1 = 1$ эта формула дает широко известный K-функционал Петре, который обычно обозначают иначе, а именно, символом $K(t,x;X_0,X_1)$. Далее, так называемый E-функционал задается формулой

$$E(t,x;X_0,X_1) = \inf_{\|x_1\|_{X_1} \leqslant t} \|x - x_1\|_{X_0}. \tag{2}$$

В случае L-функционала (тем самым, и K-функционала) нас интересует оптимальная пара $(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$, на которой достигается нижняя грань в формуле (1). В случае E-функционала нас интересует оптимальный элемент $\bar{x}_1$, доставляющий нижнюю грань в формуле (2). Легко понять, что такие оптимальные объекты всегда существуют, если разрешить векторам $\bar{x}_0, \bar{x}_1$ лежать во вторых сопряженных пространствах X_0^{**} и X_1^{**}. Так мы и будем делать, особо это не оговаривая. Покажем, что такая дополнительная свобода не приводит к изменению значений соответствующих функционалов.

Лемма 1. *Если $x \in X_0 + X_1$ и $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$, то $L_{p_0,p_1}(t,x;X_0,X_1) = L_{p_0,p_1}(t,x;X_0^{**},X_1^{**})$ и $E(t,x;X_0,X_1) = E(t,x;X_0^{**},X_1^{**})$.*

Доказательство. Неравенства “$\leqslant$” очевидны. Пусть

$$s = L_{p_0,p_1}(t,x;X_0^{**},X_1^{**}).$$

Если $L_{p_0,p_1}(t,x;X_0,X_1) > s+\varepsilon$ для некоторого строго положительрого числа ε, то открытое абсолютно выпуклое подмножество $U = \{x_0 + x_1 : x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1, \frac{1}{p_0}\|x_0\|_{X_0}^{p_0} + \frac{1}{p_1}t\|x_1\|_{X_1}^{p_1} < s+\varepsilon\}$ суммы $X_0 + X_1$ не содержит вектора $(1-\delta)x$, где δ – достаточно малое положительное число. А тогда найдется такой линейный непрерывный функционал F на X_0+X_1, что $t=\sup_{y\in U}|\langle y,F\rangle|<|F(x)|$. В то же время, найдутся векторы $z_0\in X_0^{**}$ и $z_1\in X_1^{**}$ такие, что $x_1\in X_1$, $\frac{1}{p_0}\|z_0\|_{X_0}^{p_0}+\frac{1}{p_1}t\|z_1\|_{X_1}^{p_1}<s+\varepsilon$ и $z_0+z_1=x$. Из того, что всякая пара $(x_0,x_1)\in X_0\times X_1$, удовлетворяющая неравенствам $\|x_0\|_{X_0}\leqslant\|z_0\|_{X_0^{**}}$ и $\|x_1\|_{X_1}\leqslant\|z_1\|_{X_1^{**}}$, лежит в U, вытекает, что и $|\langle F,z_0+z_1\rangle|\leqslant t$, т.е. $|F(x)|\leqslant t<|F(x)|$ – противоречие. Случай E-функционалов похож, но еще проще, мы опускаем соответствующие рассуждения. $\square$

Сформулируем теперь основной результат заметки. Мы оставим в стороне вырожденный случай, когда L-функционал достигается лишь на таких парах элементов вторых сопряженных пространств, в которых одна из компонент равна нулю.

Теорема 1. *При $1\leqslant p_0,p_1<\infty$ пара ненулевых векторов $(\bar{x}_0,\bar{x}_1)\in(X_0^{**},X_1^{**})$ оптимальна для L_{p_0,p_1}-функционала в точке (x,t) тогда и только тогда, когда $x=\bar{x}_0+\bar{x}_1$ и найдется линейный функционал Φ на X_0+X_1, удовлетворяющий следующим соотношениям*:

$$\langle\bar{x}_0,\Phi\rangle=\|\Phi\|_{X_0^*}\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}},\ \langle\bar{x}_1,\Phi\rangle=\|\Phi\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}\tag{3}$$

и

$$\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}^{p_0-1}=\|\Phi\|_{X_0^*},\quad t\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}^{p_1-1}=\|\Phi\|_{X_1^*}.\tag{4}$$

Аналогичное утверждение справедливо для E-функционала.

Теорема 2. *Вектор $\bar{x}_1$ оптимален для E-функционала в точке (x,t) тогда и только тогда, когда $\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}=t$ и найдется линейный функционал Φ на X_0+X_1, удовлетворяющий следующим соотношениям (в них $\bar{x}_0=x-\bar{x}_1$): $\|\Phi\|_{X_0^*}=1$ и*

$$\langle\bar{x}_0,\Phi\rangle=\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}},\ \langle\bar{x}_1,\Phi\rangle=\|\Phi\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}.\tag{5}$$

Отметим, что в этих формулировках можно ничего не менять при априорном дополнительном предположении о существовании оптимальных разложений в исходных пространствах, а не просто в их вторых сопряженных.

В случае, когда $p_0=p_1=1$ (т.е. речь идет о K-функционале), теорема 1 совсем проста и ее доказательство можно было бы провести, не опираясь на дифференциальные соотношения, однако мы опустим соответствующее рассуждение, поскольку доказательство из §3 годится для всех значений показателей.

Теорема 2 о E-функционалах тоже довольно проста и не использует дифференциальных соотношений. Докажем ее. Легко проверить, что $E(t,x;X_0,X_1)=s>0$ (случай нулевого E-функционала совсем прост) тогда и только тогда, когда $p(x)=1$, где p – функционал Минковского суммы $B_{X_0}(s)+B_{X_1}(t)$ шаров с радиусми s и t с центрами в нуле в пространствах X_0 и X_1. Действительно, если $E(t,x;X_0,X_1)=s$, то для всякого достаточно малого $\varepsilon>0$ справедливы соотношения $x\in B_{X_0}(s+\varepsilon)+B_{X_0}(t)$ и $x\notin B_{X_0}(s-\varepsilon)+B_{X_0}(t)$. Из первой формулы следует, что $\frac{s}{s+\varepsilon}x\in B_{X_0}(s)+B_{X_1}(t)$, а тогда $p(\frac{s}{s+\varepsilon}x)\leqslant 1$, откуда $p(x)\leqslant 1$. Из второй формулы следует, что $\frac{s}{s-\varepsilon}x\notin B_{X_0}(s)+B_{X_0}(t)$, а тогда $p(\frac{s}{s-\varepsilon}x)\geqslant 1$ и $p(x)\geqslant 1$. Обратно, если $p(x)=1$, то для всякого достаточно малого $\varepsilon>0$ имеем $\frac{x}{1+\varepsilon}\in B_{X_0}(s)+B_{X_1}(t)$ и $\frac{x}{1-\varepsilon}\notin B_{X_0}(s)+B_{X_1}(t)$, откуда $E(t,\frac{x}{1+\varepsilon};X_0,X_1)\leqslant s$ и $E(t,\frac{x}{1-\varepsilon};X_0,X_1)\geqslant s$.

Таким образом, по теореме Хана–Банаха, если $E(t,x;X_0,X_1)=s>0$, то найдется такой линейный функционал F на X_0+X_1, что $F(x)=1$ и $|F(y)|\leqslant p(y)$ при всех $y\in X_0+X_1$. Из второго соотношения следует, что $|F(a)|+|F(b)|\leqslant 1$, если $a\in B_{X_0}(s)$, $b\in B_{X_1}(t)$, так что $s\|F\|_{X_0^*}+t\|F\|_{X_1^*}\leqslant 1$. Далее, если $\bar{x}_1\in X_1^{**}$ – оптимальный элемент для E-функционала в точке (x,t) и $\bar{x}_0=x-\bar{x}_1$, то

$$\begin{aligned}1=F(x)=|\langle F,\bar{x}_0\rangle+\langle F,\bar{x}_1\rangle|&\leqslant \|F\|_{X_0^*}\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}+\|F\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}\\&\leqslant s\|F\|_{X_0^*}+t\|F\|_{X_1^*}\leqslant 1,\end{aligned}$$

т.е. во всех сделанных по дороге оценках имеют место равенства. В частности, $F(\bar{x}_0)=\|F\|_{X_0^*}\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}$ и $F(\bar{x}_1)=\|F\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}=t\|F\|_{X_1^*}$. Осталось положить $\Phi=\frac{F}{\|F\|_{X_0^*}}$.

Обратно, пусть выполнены соотношения из теоремы 2 и пусть $s=\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}$. Тогда $\Phi(x)=s+t\|\Phi\|_{X_1^*}$. По лемме 1 верно неравенство $E(t,x;X_0,X_1)\leqslant s$. Если оно строгое, то найдется вектор $x_1\in B_{X_1}(t)$ такой, что $\|x-x_1\|_{X_0}<s$. Но в таком случае $|\Phi(x)|\leqslant|\Phi(x-x_1)|+|\Phi(x_1)|<s+t\|\Phi\|_{X_1^*}$ – противоречие.

§3. Доказательство теоремы 1

В доказательстве этой теоремы используются дифференциальные соотношения, однако его начало – примерно такое же, как и у теоремы 2.

Пусть $x \in X_0 + X_1$ и пусть $L_{p_0,p_1}(t, x; X_0, X_1) = \rho > 0$. Предположим также, что значение L-функционала достигается на паре ненулевых векторов. Рассмотрим выпуклое множество $U = \{(x_0, x_1) \in X_0 + X_1 : \frac{1}{p_0}\|x_0\|_{X_0}^{p_0} + \frac{t}{p_1}\|x_1\|_{X_1}^{p_1} < \rho\}$. Множество $V = \{x_1 + x_2 : (x_1, x_2) \in U\}$ тоже выпукло, и легко понять, что $x \notin V$, но $(1-\varepsilon)x \in V$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Значит, $q(x) = 1$, где q – функционал Минковского множества V. По теореме Хана–Банаха, найдется такой линейный функционал F на $X_0 + X_1$, что $F(x) = 1$ и $|F(x_0) + F(x_1)| \leqslant 1$ для всех $(x_0, x_1) \in U$. Заменяя x_0 и x_1 их произведениями на подходящие скаляры, по модулю равные единице, получим неравенство

$$|F(x_0)| + |F(x_1)| \leqslant 1. \tag{6}$$

Пусть теперь u, v – положительные числа такие, что $\frac{1}{p_0}u^{p_0} + \frac{1}{p_1}v^{p_1} < \rho$, тогда $(x_0, x_1) \in U$ всякий раз, когда $\|x_0\|_{X_0} \leqslant u$ и $\|x_1\|_{X_1} \leqslant v$. Перейдя к верхней грани в неравенстве (6) по таким парам (x_0, x_1), получим $\|F\|_{X_0^*}u + \|F\|_{X_1^*}v \leqslant 1$.

В частности, отсюда следует, что $\|F\|_{X_0^*}\|x_0\|_{X_0} + \|F\|_{X_1^*}\|x_1\|_{X_1} \leqslant 1$ всякий раз, когда $(x_0, x_1) \in U$. Возьмем теперь оптимальное разложение $x = \bar{x}_0 + \bar{x}_1$, $\bar{x}_j \in X_j^{**}$, $j = 0, 1$, для рассматриваемого L-функционала, причем считаем, что оба вектора $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$ – ненулевые. Если δ – положительное число, меньшее единицы, то $(\delta x_0, \delta x_1) \in U$ при $\|x_0\|_{X_0} \leqslant \|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}$ и $\|x_1\|_{X_1} \leqslant \|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}$. В силу w^*-плотности единичного шара любого банахова пространства в единичном шаре второго сопряженного отсюда теперь легко следует, что $\|F\|_{X_0^*}\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}} + \|F\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}} \leqslant 1$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} F(x) = 1 = |F(x)| &\leqslant |\langle F, \bar{x}_0\rangle| + |\langle F, \bar{x}_1\rangle| \\ &\leqslant \|F\|_{X_0^*}\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}} + \|F\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Поэтому во всех сделанных по дороге оценках имеют место равенства, то есть

$$\langle F, \bar{x}_0\rangle = \|F\|_{X_0^*}\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}, \tag{7}$$

$$\langle F, \bar{x}_1\rangle = \|F\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}, \tag{8}$$

$$\|F\|_{X_0^*}\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}} + \|F\|_{X_1^*}\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}} = 1. \tag{9}$$

Теперь настал черед основного нововведения в сравнении с доказательством теоремы 2. Рассмотрим на плоскости линейную функцию

$$l(u, v) = \|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}u + \|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}v \tag{10}$$

и выпуклое множество

$$W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u,v \geqslant 0,\ \frac{1}{p_0}u^{p_0} + \frac{t}{p_1}v^{p_1} \leqslant \rho\}. \tag{11}$$

Мы видели, что $l(u,v) \leqslant 1$ при $(u,v) \in W$. С другой стороны, точка $(\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}, \|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}})$ лежит границе множества W – именно, на гладкой кривой

$$\frac{1}{p_0}u^{p_0} + \frac{t}{p_1}v^{p_1} = \rho \tag{12}$$

(она строго выпукла, если один из показателей p_0, p_1 строго больше единицы, а в противном случае это – прямая). В силу соотношения (9), уравнение $l(u,v) = 1$ задает опорную прямую для W, а тем самым и касательную к упомянутой кривой в упомянутой точке. Следовательно, градиенты функций $\varphi(u,v) = \frac{1}{p_0}u^{p_0} + \frac{t}{p_1}v^{p_1}$ и l в этой точке пропорциональны с неотрицательным коэффициентом:

$$\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}^{p_0-1} = \lambda\|F\|_{X_0^*}, t\|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}}^{p_1-1} = \lambda\|F\|_{X_1^*}. \tag{13}$$

Теперь введем новый функционал Φ: $\Phi = \lambda F$. Ясно, что равенства (7) и (8) тогда превращаются в соотношения (3), из которых затем с помощью формул (13) получаются равенства (4).

Обратно, пусть имеется разложение $x = \bar{x}_0 + \bar{x}_1$ (оба слагаемые считаем ненулевами; им разрешено лежать во вторых сопряженных пространствах) и для некоторого функционала Φ выполнены соотношения (3) и (4). Положим $\tau = \Phi(x) = \|\Phi\|_{X_0^*}\|x_0\|_{X_0^{**}} + \|\Phi\|_{X_1^*}\|x_1\|_{X_1^{**}}$ и $\rho = \frac{1}{p_0}\|x_0\|_{X_0^{**}}^{p_0} + \frac{t}{p_1}\|x_1\|_{X_1^{**}}^{p_1}$. По лемме 1 справедливо неравенство $L_{p_0,p_1}(t,x;X_0,X_1) \leqslant \rho$. Приведем к противоречию допущение о том, что это неравенство – строгое. Снова введем линейную фнкцию l формулой (10) и выпуклое множество W формулой (11). Часть границы множества W сотавляет выпуклая кривая (12). Точка $(\|\bar{x}_0\|_{X_0^{**}}, \|\bar{x}_1\|_{X_1^{**}})$ лежит и на этой кривой, и на прямой $l(u,v) = \tau$, а равенства (4) показывают, что прямая касается кривой. Следовательно, она – опорная к множеству W. В частности, $l(u,v) < \tau$ для каждой точки множества W, не лежащей на упомянутой кривой.

Если теперь предположить, что $L_{p_0,p_1}(t,x;X_0,X_1) < \rho$, то найдется разложение $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, для которого точка $(\|x_0\|_{X_0}, \|x_1\|_{X_1})$ лежит в W, но не на упомянутой граничной кривой. А тогда

$$\tau = |\Phi(x)| \leqslant l(\|x_0\|_{X_0}, \|x_1\|_{X_1}) < \tau,$$

и мы пришли к противоречию. Этим доказательство теоремы 1 завершено.

Литература

1. N. Kruglyak, J. Niyobuhungiro, *Characterization of optimal decompositions in real Interpolation.* — J. Approx. Theory, **185** (2014), 1–11.
2. H. Attouch, H. Brezis, *Duality for the Sum of Convex Functions in General Banach Spaces.* — In: Aspects of Mathematics and its Applications. J.A. Barroso ed., North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 125–133

Kislyakov S. V., Kruglyak N. Ya., Niyobuhungiro J. Characterization of optimal decompositions in real interpolation. II.

Optimal decompositions mentioned in the title have certain extremal properties expressed in terms of duality. We present a direct and fairly short proof of this.

Поступило 22 июля 2014 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Division of Mathematics
and Applied Mathematics,
Department of Mathematics,
Linköping University,
SE-581 83 Linköping, Sweden
E-mail: natan.kruglyak@liu.se

Department of Mathematics,
College of Science and Technology,
University of Rwanda,
P.O. Box 3900 Kigali, Rwanda
E-mail: japhet.niyobuhungiro@liu.se,
jniyobuhungiro@ur.ac.rw