Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

**В. М. Каплицкий, А. К. Дронов**

# К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОПЕРАТОРОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНУСАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

## Введение

Подмножество $Q$ линейного пространства $E$ называется конусом, если $x+y \in Q$ для любых $x, y \in Q$ и $\lambda x \in Q$ для любого $\lambda \geqslant 0$ и любого $x \in Q$. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – отделимые вещественные линейные топологические пространства, $\bar{E} = (E_0, E_1)$ и $\bar{F} = (F_0, F_1)$– две банаховы пары такие, что $E_i \subset \mathcal{A}$, $F_i \subset \mathcal{B}$, а промежуточные для банаховых пар $(E_0, E_1)$ и $(F_0, F_1)$ банаховы пространства $E$ и $F$ таковы, что тройка $(E_0, E_1, E)$ интерполяционна относительно тройки $(F_0, F_1, F)$ (определения используемых далее понятий теории интерполяции линейных операторов см. в [5]). Пусть $Q_0 \subset E_0$, $Q_1 \subset E_1$ – конусы в пространствах $E_0$ и $E_1$. Пусть $Q$ – конус в $E$ такой, что $Q_0 \cap Q_1 \subset Q \subset Q_0 + Q_1$. Пусть линейный непрерывный оператор $T : E_0 + E_1 \to F_0 + F_1$ удовлетворяет условиям:

$$\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i} \text{ при } x \in Q_i \quad (i = 0, 1).$$

Нас будет интересовать следующая задача: при каких условиях оператор $T$ переводит конус $Q$ в пространство $F$ и существует постоянная $c = c(\bar{E}, \bar{F}, \bar{Q}, E, F, Q) > 0$ такая, что имеет место неравенство:

$$\|Tx\|_F \leqslant c\|x\|_E \text{ при } x \in Q.$$

К этой задаче сводятся некоторые интересные проблемы функционального анализа. Различные приложения интерполяции оценок норм операторов, ограниченных на конусах, рассматривались в [1–3]. В данной работе будет рассмотрен случай операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей. Интерполяция операторов в весовых пространствах эффективно использовалась Б. С. Митягиным, М. М. Драгилевым и В. П. Кондаковым

*Ключевые слова*: банахово пространство, конус, интерполяция, вещественный $K$-метод Петре.

в исследованиях по теории базисов в ядерных пространствах Фреше. Полученные в работе интерполяционные теоремы можно применить к решению некоторых задач этой теории, которые мы предполагаем рассмотреть в другой работе. В статье через $\omega$ обозначается линейное пространство всех числовых последовательностей, а через $\omega^+$ конус неотрицательных последовательностей в $\omega$. Пространство финитных последовательностей обозначается через $\varphi$. Через $l_\infty(a)$ обозначается весовое пространство числовых последовательностей:

$$l_\infty(a) = \{x = (x(n))_{n=1}^\infty \ : \ \|x\|_{l_\infty(a)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|a(n) < +\infty\},$$

где $a(n) > 0$ для всех $n$. Через $c$ и $c_0$ обозначаются пространство всех сходящихся числовых последовательностей и пространство всех сходящихся к нулю числовых последовательностей, наделенные обычной sup-нормой. Через $c(a)$ обозначается весовое пространство числовых последовательностей $x = (x(n))_{n=1}^\infty$ таких, что $(x(n)a(n))_{n=1}^\infty \in c$ с нормой $\|x\|_{c(a)} = \|x\|_{l_\infty(a)}$. Аналогичным образом определяется пространство $c_0(a)$. Мы будем также использовать следующие понятия теории конусов. Конус $Q$ в линейном пространстве $E$ называется воспроизводящим, если $\mathrm{span}(Q) = E$. Конус $Q$ в нормированном пространстве $E$ называется тотальным, если замыкание линейной оболочки конуса $Q$ совпадает с $E$. Это эквивалентно тому, что $(\overline{Q - Q}) = E$.

## §1. Общая постановка задачи интерполяции операторов, ограниченных на паре конусов в банаховых пространствах

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – отделимые вещественные линейные топологические пространства, $\bar{E} = (E_0, E_1), \bar{F} = (F_0, F_1)$ – банаховы пары, $E_i \subset \mathcal{A}$, $F_i \subset \mathcal{B}$ и $Q_i$ – конусы в пространствах $E_i$ $(i = 0, 1)$. В этом случае будем говорить, что $\bar{Q} = (Q_0, Q_1)$ – пара конусов в банаховой паре $\bar{E}$. Конус $Q$ в пространстве $\mathcal{A}$ называется промежуточным для пары $\bar{Q}$, если

$$Q_0 \cap Q_1 \subset Q \subset Q_0 + Q_1.$$

Пусть банаховы пространства $E$ и $F$ являются промежуточными пространствами банаховых пар $\bar{E}$ и $\bar{F}$, причем банахова тройка $(E_0, E_1, E)$ интерполяционна относительно банаховой тройки $(F_0, F_1, F)$ (см. [5]). Пусть $T : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$ – непрерывный линейный оператор. Если $T|_{Q_i} : Q_i \longrightarrow F_i$ и $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$ при $x \in Q_i$, то будем говорить, что $T$ – ограниченный оператор из пары нормированных конусов $\bar{Q} = (Q_0, Q_1)$ в банахову пару $\bar{F} = (F_0, F_1)$. В этом случае будем применять обозначение: $T \in L(\bar{Q}, \bar{F})$. Пусть конус $Q$ содержится в $E$ и является промежуточным для пары $\bar{Q}$. Если существует постоянная $c = c(\bar{E}, \bar{F}, \bar{Q}, E, F, Q) > 0$ такая, что $T|_Q : Q \longrightarrow F$ и

$$\|Tx\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E \text{ при } x \in Q, \tag{1.1}$$

то будем говорить, что тройка конусов $(Q_0, Q_1, Q)$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$.

Пусть теперь задано семейство конусов

$$\mathcal{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}},$$

где А – некоторое множество индексов. Пусть семейство $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям:

1) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ справедливы вложения: $Q_0^\alpha \subset E_0, Q_1^\alpha \subset E_1$, $Q^\alpha \subset E$, причем конус $Q^\alpha$ – промежуточный конус для пары $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha)$;

2) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ тройка $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$. В этом случае будем говорить, что семейство $\mathcal{M}$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$. При этом постоянная $c = c(\bar{E}, \bar{F}, \overline{Q^\alpha}, E, F, Q^\alpha)$ в неравенстве (1.1), вообще говоря, зависит от выбора тройки $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ из семейства $\mathcal{M}$. Если для всех троек конусов из $\mathcal{M}$ может быть выбрана одинаковая интерполяционная постоянная $c = c(\bar{E}, \bar{F}, E, F)$, то будем говорить, что семейство $\mathcal{M}$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$.

Напомним, что $K$-функционалом Петре банаховой пары $\bar{E} = (E_0, E_1)$ называется функционал на пространстве $E_0 + E_1$, определенный равенством

$$K(t, x, \bar{E}) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_i \in E_i}} (\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}),$$

где $t$ – положительный параметр. Широкий класс интерполяционных троек банаховых пространств можно строить с помощью следующей конструкции. Пусть $\Phi(h)$ – функциональная норма Петре на конусе $\mathcal{M}^+$ положительных измеримых на $(0, +\infty)$ функций $h(t)$ (см. [5, 10]). Пространство $K_\Phi(E_0, E_1)$ состоит из всех функций $x \in E_0 + E_1$ таких, что

$$\|x\|_{K_\Phi(E_0, E_1)} = \Phi\left(K(t, x; \bar{E})\right) < +\infty.$$

Известно, что в этом случае тройка $(E_0, E_1, E)$ интерполяционна относительно тройки $(F_0, F_1, F)$, где

$$E = K_\Phi(E_0, E_1),\ F = K_\Phi(F_0, F_1). \tag{1.2}$$

Например, классическое промежуточное пространство вещественного $K$-метода $E_{\theta,p} = K_{\Phi_{\theta,p}}(E_0, E_1)$ получается в случае, когда функционал $\Phi(h)$ имеет вид:

$$\Phi(h) = \Phi_{\theta,p}(h) = \left( \int\limits_0^{+\infty} (t^{-\theta} h(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant 1$, $\theta \in (0,1)$ (см. [5]). В случае, когда промежуточные пространства $E$ и $F$ имеют вид (1.2), будем говорить, что промежуточные интерполяционные пространства $E$ и $F$ описываются с помощью вещественного $K$-метода. Пусть $\bar{Q} = (Q_0, Q_1)$ – пара конусов в банаховой паре $\bar{E} = (E_0, E_1)$. Положим

$$K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) = \inf_{\substack{x_0 + x_1 = x, \\ x_i \in Q_i}} (\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}), \quad x \in Q_0 + Q_1.$$

Функционал $K^{\bar{Q}}$ играет ту же роль в теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах, что и $K$-функционал Петре в задачах интерполяции ограниченных линейных операторов. Непосредственно из определения следует, что $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) \geqslant K(t, x; \bar{E})$ при всех $x \in Q_0 + Q_1$. Пусть $Q$ – конус, промежуточный для пары $\bar{Q}$. Если существует постоянная $c = c(\bar{E}, \bar{Q}, Q) > 0$ такая, что

$$K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) \leqslant cK(t, x; \bar{E}) \quad \text{при} \quad x \in Q,$$

то будем писать $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) \sim K(t, x, \bar{E})$ на $Q$. В этом случае функционалы $K$ и $K^{\bar{Q}}$ называются эквивалентными на $Q$. Если банахова тройка $(E_0, E_1, E)$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$, а функционалы $K(t, x; \bar{E})$ и $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E})$ эквивалентны на $Q$, то тройка конусов $(Q_0, Q_1, Q)$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$.

**Теорема 1.1.** *Пусть $E = K_\Phi(E_0, E_1)$, $F = K_\Phi(F_0, F_1)$. Пусть задано семейство $\mathcal{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\}$ троек конусов, и для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ конусы $Q_0^\alpha, Q_1^\alpha$ вложены в пространства $E_0, E_1$ соответственно, $Q^\alpha$ – конус в пространстве $E$, являющийся промежуточным для пары $\overline{Q^\alpha} = (Q_0^\alpha, Q_1^\alpha)$. Пусть существует постоянная*

$c = c(\bar{E}, \bar{F}) > 0$ *такая, что для любого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *и любого оператора* $T \in L(\overline{Q^\alpha}, \bar{F})$, *удовлетворяющего условиям* $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$ *при* $x \in Q_i^\alpha$ $(i = 0, 1)$, *имеет место неравенство*

$$K(t, Tx; \bar{F}) \leqslant c(\bar{E}, \bar{F}) \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \bar{E}) \tag{1.3}$$

*при* $x \in Q^\alpha$. *Тогда семейство* $\mathcal{M}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* $(F_0, F_1, F)$.

**Доказательство.** Пусть $E = K_\Phi(\bar{E})$, $F = K_\Phi(\bar{F})$. Тогда из (1.3) стандартным образом выводится оценка (см., например, [1]):

$$\|Tx\|_F \leqslant \tilde{c}(\bar{E}, \bar{F}, E, F) \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E$$

при $x \in Q^\alpha$, т. е. семейство $\mathcal{M}$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой паре $(F_0, F_1)$. Теорема доказана. □

Приведем пример того, что интерполяционное свойство банаховой тройки, вообще говоря, не наследуется тройками вложенных конусов. Будем рассматривать тройки весовых пространств числовых последовательностей $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ и $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$, при этом веса имеют вид:

$$a_1(n) = 1, \quad a_0(n) = \frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{1}{n^\theta},$$
$$b_1(n) = n, \quad b_0(n) = 1, \quad b(n) = n^{1-\theta},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Тогда

$$a(n) = a_1(n) h\left(\frac{a_0(n)}{a_1(n)}\right), \quad b(n) = b_1(n) h\left(\frac{b_0(n)}{b_1(n)}\right),$$

где $h(t) = t^\theta$. Очевидно, что функция $h$ вогнута. Как известно (см. [9]), в этом случае тройка $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ интерполяционна относительно тройки $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$. Рассмотрим следующее множество в $\omega$:

$$C_1(\alpha) = \{x \in \omega^+ : \alpha(n) x(n) \in C_1\},$$

где $\alpha \in \omega^+$ и $C_1$ – множество монотонно убывающих последовательностей, ограниченных снизу некоторой положительной постоянной (своей для каждой последовательности). Пусть

$$C(\alpha) = C_1(\alpha) \cup \{0\}.$$

Ясно, что $C(\alpha)$ – конус в $\omega$. Введем теперь конус $Q = C(b_0) + C(b_1)$. Пусть

$$(P_N x)(n) = \begin{cases} x(n), & n = 1, 2, \dots, N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

Несложно проверить, что семейство операторов $\{P_N\}$ равномерно ограниченно по $N$ на конусах $Q \cap c_0(a_0)$ и $Q \cap c_0(a_1)$, однако для последовательности $e$ из одних единиц имеем $\|P_N e\|_{c_0(b)} = N^{1-\theta} \to \infty$ при $N \to \infty$. Так как $e \in Q \cap c_0(a)$, то тройка $(Q \cap c_0(a_0), Q \cap c_0(a_1), Q \cap c_0(a))$ не наследует интерполяционного свойства, поскольку постоянная в (1.1) не должна зависеть от выбора оператора.

## §2. Конусы, являющиеся нижними полурешетками, и оценки функционала $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E})$

Пусть $\mathbb{M}$ – измеримое пространство, на $\sigma$-алгебре измеримых множеств которого задана мера $\mu$. Пусть $S(\mathbb{M}, \mu)$ – пространство всех вещественных измеримых на $\mathbb{M}$ функций. В пространстве $S(\mathbb{M}, \mu)$ имеется естественная полуупорядоченность: $x \leqslant y$ $(x, y \in S(\mathbb{M}, \mu))$ эквивалентно тому, что $x(t) \leqslant y(t)$ почти при всех $t \in \mathbb{M}$. Пусть $E \subset S(\mathbb{M}, \mu), E \neq \varnothing$ – банахово пространство. Далее, естественным образом вводятся понятия максимума и минимума из двух элементов, а также модуля:

$$\max(x, y)(t) = \max_{t \in \mathbb{M}}(x(t), y(t)), \quad \min(x, y)(t) = \min_{t \in \mathbb{M}}(x(t), y(t)),$$
$$|x|(t) = \max(x, 0)(t) - \min(x, 0)(t).$$

Пространство $E$ называется идеальным банаховым пространством, если из условий $|x| \leqslant |y|$, где $x$ – измеримая функция, а $y \in E$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Конус неотрицательных элементов идеального банахова пространства $E$ обозначается через $E^+$. Все рассматриваемые в статье пространства являются идеальными банаховыми пространствами. Единицу в алгебре $\omega$ будем обозначать через $e$: $e = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Будем говорить, что множество $\mathcal{M} \subset E$ является нижней полурешеткой, если из условия $x, y \in \mathcal{M}$ следует, что $\min(x, y) \in \mathcal{M}$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $E_0$ – идеальное банахово пространство последовательностей такое, что $l_\infty = E_1 \subset E_0$. Пусть $Q$ – конус в $\omega$,* *являющийся нижней полурешеткой,* $Q \subset \omega^+$ *и* $e \in Q$. *Пусть, далее,* $\bar{E} = (E_0, l_\infty)$, $\bar{Q} = (E_0^+, Q \cap l_\infty^+)$. *Тогда*

$$K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) = K(t, x; \bar{E})$$

*при* $x \in Q \cap E_0^+$.

**Доказательство.** Так как $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) \geqslant K(t, x; \bar{E})$ для любой пары нормированных конусов, то достаточно доказать, что $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) \leqslant K(t, x; \bar{E})$ при $x \in Q \cap E_0^+$. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in Q \cap E_0^+$. Тогда существуют векторы $x_0$ и $x_1$ такие, что $x_0 + x_1 = x$, $x_i \in E_i^+$ и $K(t, x; \bar{E}) > \|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1} - \varepsilon$.

Положим $x_1' = \min(\|x_1\|_{l_\infty} e, x)$, $x_0' = (x - \|x_1\|_{l_\infty})_+$, где

$$(x_+)(n) = \begin{cases} x(n), & x(n) \geqslant 0, \\ 0, & x(n) < 0. \end{cases}$$

Тогда $x_1' \in Q \cap E_1^+$, $x_0 \in E_0^+$ и $x_0' + x_1' = x$. Далее,

$$\|x_1'\|_{l_\infty} \leqslant \|x_1\|_{l_\infty} \|e\|_{l_\infty} = \|x_1\|_{l_\infty}.$$

Покажем, что $(x - \|x_1\|_{l_\infty} e)_+ \leqslant x - x_1$. Если $x(n) - \|x_0\|_{l_\infty} < 0$, то это очевидно, так как $x - x_1 = x_0 \geqslant 0$. Пусть $x(n) - \|x_1\|_{l_\infty} \geqslant 0$. Тогда $x(n) - \|x_1\|_{l_\infty} \leqslant x(n) - x_1(n)$, так как $x_1(n) \leqslant \|x_1\|_{l_\infty}$. Таким образом, $(x - \|x_1\|_{l_\infty} e)_+ \leqslant x - x_1 = x_0$, а значит $\|x_0'\|_{E_0} \leqslant \|x_0\|_{E_0}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} K(t, x; \bar{E}) > \|x_0'\|_{E_0} + t\|x_1'\|_{E_1} - \varepsilon &\geqslant \inf_{\substack{x_0 + x_1 = x, \\ x_0 \in E_0^+, \\ x_1 \in Q \cap E_1^+}} (\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}) - \varepsilon \\ &= K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем, что $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) = K(t, x; \bar{E})$ при $x \in Q \cap E_0^+$. Теорема доказана. □

Следующая теорема доказывается аналогично.

**Теорема 2.2.** *Пусть* $E_1$ *– идеальное банахово пространство последовательностей такое, что* $E_1 \subset E_0 = l_\infty$. *Пусть* $Q$ *– конус в* $\omega$, *являющийся нижней полурешеткой,* $Q \subset \omega^+$ *и* $e \in Q$. *Пусть, далее,* $\bar{E} = (l_\infty, E_1)$, $\bar{Q} = (Q \cap l_\infty^+, E_1^+)$. *Тогда*

$$K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E}) = K(t, x; \bar{E})$$

*при* $x \in Q \cap E_0^+$.

**Теорема 2.3.** *Пусть $E_1 = l_\infty$, $E_0$ – идеальное банахово пространство числовых последовательностей такое, что $E_1 \subset E_0$, $(F_0, F_1)$ – некоторая банахова пара, $E = K_\Phi(E_0, E_1)$ и $F = K_\Phi(F_0, F_1)$. Пусть $\mathcal{A}$ – множество конусов в $\omega^+$ такое, что любой конус $Q \in \mathcal{A}$ – нижняя полурешетка и $e \in Q$. Тогда семейство троек конусов*

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

*обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$.*

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из полученной выше формулы для функционала $K^{\bar{Q}}(t, x; \bar{E})$, где $\bar{Q} = (E_0^+, Q \cap E_1^+)$, и стандартных оценок вещественного $K$-метода. Аналогичным образом доказывается симметричная теорема.

**Теорема 2.4.** *Пусть $E_0 = l_\infty$, $E_1$ – идеальное банахово пространство числовых последовательностей такое, что $E_1 \subset E_0, (F_0, F_1)$ – некоторая банахова пара, $E = K_\Phi(E_0, E_1)$ и $F = K_\Phi(F_0, F_1)$. Пусть $\mathcal{A}$ – множество конусов в $\omega^+$ такое, что любой конус $Q \in \mathcal{A}$ – нижняя полурешетка и $e \in Q$. Тогда семейство троек конусов*

$$\mathcal{L} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

*обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1, F)$.*

## §3. Теоремы о равномерном интерполяционном свойстве некоторых семейств конусов в пространствах $c_0$ с весами

В данном параграфе мы перенесем теоремы предыдущего параграфа на тройки конусов вида $(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+)$ или $(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+)$, где $E_i$ и $E$ – пространства $c_0$ с весами, $Q$ – конус, являющийся нижней полурешеткой. Предварительно докажем одну вспомогательную теорему о конусах, которые являются нижними полурешетками, и их конечномерных аппроксимациях. Через $\omega^{++}$ обозначим множество строго положительных последовательностей. Если $E$ – некоторое идеальное банахово пространство, вложенное в $\omega$, то мы полагаем $E^+ = E \cap \omega^+$, $E^{++} = E \cap \omega^{++}$. Через $P_N$ далее обозначается проектор на линейную оболочку первых $N$ координатных ортов:

$$(P_N x)(n) = \begin{cases} x(n), & 1 \leqslant n \leqslant N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

**Теорема 3.1.** *Пусть $E = c_0$ и конус $Q \subset E^+$ – нижняя полурешетка. Пусть $T : E \to E$ – ограниченный линейный оператор такой, что*

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad x \in Q.$$

*Пусть $\delta > 0$ – фиксированное число, $N \in \mathbb{N}$ и $Q_{N,\delta}$ – конечномерный конус, определенный следующим образом:*

$$Q_{N,\delta} = \{x = P_N y : \ y \in Q, \quad y(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)y\|\}.$$

*Тогда конус $Q_{N,\delta}$ обладает свойствами:*

1) *конус $Q_{N,\delta}$ – нижняя полурешетка;*
2) *если $x \in Q_{N,\delta}$, то*

$$\|Tx\| \leqslant M^\delta \|P_N x\|,$$

*где $M^\delta = M + \delta(M + \|T\|)$;*

3) *если $x \in Q \cap E^{++}$, то $P_N x \in Q_{N,\delta}$ при всех $N > N(x, \delta)$.*

**Доказательство.** 1) Пусть $x, y \in Q_{N,\delta}$. Тогда найдутся $x', y' \in Q$ такие, что $x = P_N x'$, $y = P_N y'$ и

$$x'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)x'\|,$$
$$y'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)y'\|.$$

Тогда, поскольку $Q$ – нижняя полурешетка, справедливы соотношения

$$\min(P_N x', P_N y') = P_N(\min(x', y')) \in P_N(Q). \tag{3.1}$$

Так как норма в $c_0$ монотонна, то

$$x'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)\min(x', y')\|$$

и

$$y'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)\min(x', y')\|.$$

Следовательно,

$$\min(x', y')(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)\min(x', y')\|. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что $\min(x, y) \in Q_{N,\delta}$.

2) Пусть $x \in Q_{N,\delta}$ и $x = P_N y$. Имеем:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|TP_N y\| = \|T(y - (I - P_N)y)\| \leqslant \|Ty\| + \|T(I - P_N)y\| \\ &\leqslant M\|P_N y\| + M\|(I - P_N)y\| + \|T\|\|(I - P_N)y\| \\ &\leqslant M\|P_N x\| + \delta(M + \|T\|)y(1) \leqslant M\|P_N x\| + \delta(M + \|T\|)\|P_N x\| \\ &= (M + \delta(M + \|T\|))\|P_N x\|.\end{aligned}$$

Доказательство свойства 3) тривиально. □

Пусть $L$ – линейное пространство, вложенное в нормированное пространство $E$, $L_0$ – подпространство в $L$ коразмерности единица. Далее нам понадобится версия теоремы Хана–Банаха, в которой утверждается существование мажорированного продолжения линейного функционала $f_0 : L_0 \to \mathbb{R}$, ограниченного на некотором конусе $Q_0 \subset L_0$, до линейного функционала $f : L \to \mathbb{R}$, ограниченного на конусе $Q$, являющемся одномерным расширением исходного конуса $Q_0$. Доказательство этой теоремы совершенно аналогично первому шагу доказательства классической теоремы Хана–Банаха о продолжении функционала, ограниченного на некотором подпространстве (см. [6]). Для удобства читателя мы воспроизведем его ниже.

**Теорема.** *Пусть в вещественном векторном пространстве $E$ задана полунорма $p$. Пусть $L_0$ – подпространство в $E$ и $Q_0 \subset L_0$ – конус в $L_0$. Пусть $f_0$ – линейный функционал, определенный на подпространстве $L_0$ такой, что*

$$f_0(x) \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Q_0. \tag{3.3}$$

*Пусть $x_1$ – вектор в $E$ такой, что $x_1 \notin L_0$ и*

$$\begin{aligned}L &= \{x = y + \lambda x_1 : y \in L_0, \lambda \in \mathbb{R}\}, \\ Q &= \{x = y + \lambda x_1 : y \in Q_0, \lambda \geqslant 0\}.\end{aligned}$$

*Тогда функционал $f_0$ может быть продолжен до линейного функционала $f$, определенного на подпространстве $L$, для которого справедливо неравенство*:

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Q. \tag{3.4}$$

**Доказательство.** Каждый элемент $x \in L$ может быть единственным образом представлен в виде:

$$x = x' + \lambda x_1, \quad x' \in L_0, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Если $x', x'' \in Q$, то с помощью неравенства (3.3) находим:

$$f_0(x') + f_0(x'') = f_0(x' + x'') \leqslant p(x' + x'')$$
$$\leqslant p((x' + x_1) + (-x_1 + x'')) \leqslant p(x' + x_1) + p(-x_1 + x''),$$

откуда

$$f_0(x'') - p(-x_1 + x'') \leqslant -f_0(x') + p(x_1 + x'),$$

и, следовательно (поскольку $x'$ и $x''$ здесь произвольны),

$$c' = \sup_{x' \in Q_0} [f_0(x') - p(-x_1 + x')] \leqslant \inf_{x' \in Q_0} [-f_0(x') + p(x_1 + x')] = c''.$$

Пусть $c' \leqslant t_1 \leqslant c''$. Определим на $L$ функционал $f$ формулой

$$f(x) = f(\lambda x_1 + x') = \lambda t_1 + f_0(x'),$$

если $x = \lambda x_1 + x'$, $x' \in Q$. Тогда $f$ – линейный функционал, который является продолжением функционала $f_0$ на подпространство $L$. Покажем, что имеет место неравенство (3.4). Будем считать, что в представлении (3.5) $\lambda > 0$. Тогда

$$f(x) = \lambda t_1 + f_0(x') \leqslant \lambda c'' + f_0(x') \leqslant \lambda[-f_0(\frac{x'}{\lambda}) + p(x_1 + \frac{x'}{\lambda})] + f_0(x')$$
$$= -f_0(x') + p(\lambda x_1 + x') + f_0(x') = p(x).$$

Теорема доказана. □

При доказательстве теорем об интерполяции операторов с оценками на конусах в пространствах $c_0$ с весами нам понадобится классический критерий Петре интерполяционности троек весовых $L_p$-пространств (см. [9]). Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ – пространство с мерой, $a : \Sigma \to \mathbb{R}$ – измеримая функция (вес) такая, что $a(t) > 0$ почти всюду. Через $L_p(a)$ будем обозначать соответствующее весовое пространство функций с нормой:

$$\|x\|_{L_p(a)} = \|ax\|_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}$$

Функция $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ называется квазивогнутой, если существуют вогнутая функция $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и положительная константа $c$ такие, что

$$\frac{1}{c} k(t) \leqslant h(t) \leqslant c k(t).$$

Если две неотрицательные функции $h$ и $k$ связаны этим неравенством, то они называются эквивалентными. При этом мы пишем $h \sim k$.

**Теорема Петре.** *Для того, чтобы банахова тройка* $(L_p(a_0), L_p(a_1), L_p(a))$ *обладала интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* $(L_p(\widetilde{a_0}), L_p(\widetilde{a_1}), L_p(\widetilde{a}))$ *при всех* $1 \leqslant p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a \sim a_1 h\left(\frac{a_0}{a_1}\right), \quad \widetilde{a} \sim \widetilde{a_1} h\left(\frac{\widetilde{a_0}}{\widetilde{a_1}}\right),$$

*где* $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– квазивогнутая функция.*

В случае $p = \infty$ теорема, вообще говоря, не имеет места, однако она справедлива, например, для троек пространств $c_0$ с весами.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $E_i = c_0(a_i)$, $F_i = c_0(b_i)$ $(i = 0, 1)$, $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$ *и банахова тройка* $(E_0, E_1, E)$ *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* $(F_0, F_1, F)$. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– множество конусов в* $\omega^+$ *такое, что для каждого конуса* $Q \in \mathcal{A}$ *выполняются условия*:

1) $Q$ *– нижняя полурешетка в* $\omega$;
2) $Q \cap E_1^+$ *– тотальный конус в пространстве* $E_1$;
3) $Q \cap E_1^{++} \neq \varnothing$.

*Тогда семейство троек конусов*

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

*обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* $(F_0, F_1, F)$.

**Доказательство.** Без ограничений общности можно считать, что

$$a_0(n) \leqslant a(n) \leqslant a_1(n) = 1, \quad b_0(n) \leqslant b(n) \leqslant b_1(n) = 1,$$

то есть $F_1 = E_1 = c_0$. Так как конус $Q \cap E_1^+$ не содержит единицы, то полученная в предыдущем параграфе формула к $K$-функционалу возникающей в данном случае пары нормированных конусов непосредственно не применима. Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы при каждом $N = 1, 2, \ldots$ расширить конус $Q_N = Q_{N,\delta}$ до конуса $\widetilde{Q}_N$, который является нижней полурешеткой, и, кроме того, содержит вектор $f_N$ из $c_0$, аппроксимирующий единицу. Последовательность $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ выбирается так, чтобы она сходилась к вектору $e$ поточечно. Такие конусы $\widetilde{Q}_N$ можно построить с помощью одномерных расширений конуса $Q_N$. При этом также потребуется продолжать некоторые из возникающих в доказательстве линейных функционалов на конус $\widetilde{Q}_N$ с сохранением верхних оценок. Это можно сделать, используя приведенную выше версию теоремы Хана–Банаха для конусов. Для каждого конуса $\widetilde{Q}_N$, содержащего вектор $f_N$, аппроксимирующий единицу, можно применить тот же подход к оценке $K$-функционалов соответствующей пары конусов, зависящей от $N$, который применялся ранее, а затем в полученных таким путем неравенствах перейти к пределу при $N \to \infty$.

Перейдем к аккуратному доказательству. Пусть $N_0$ – некоторое натуральное число. Положим

$$f_0(n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2N_0}, & n = 1, 2, \dots, N_0; \\ 0, & n > N_0. \end{cases}$$

Так как $f_0 \in E_1$, найдется вектор $f \in \operatorname{span}(Q \cap E_1^+)$ такой, что $\|f - f_0\|_{E_1} < \frac{1}{2N_0}$. Тогда

$$\|f - f_0\|_{E_1} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n) - f_0(n)| < \frac{1}{2N_0}.$$

Следовательно, $|f(n) - f_0(n)| < \frac{1}{2N_0}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, для $f$ выполнены условия:

1) $1 \leqslant f(n) \leqslant 1 + \frac{1}{N_0}$, $n = 1, 2, \dots, N_0$;

2) $-\frac{1}{N_0} \leqslant f(n) \leqslant 1 + \frac{1}{N_0}$ при $n > N_0$.

Пусть $f = f^+ - f^-$, где $f^+, f^- \in Q \cap E_1^+$. Без ограничений общности можно считать, что $f^+, f^- \in E_1^{++}$ (иначе следует выбрать $h_0 \in Q \cap E_1^{++} \neq \{\emptyset\}$ и заменить $f^+$ и $f^-$ на $\widetilde{f}^+$ и $\widetilde{f}^-$, где $\widetilde{f}^+ = f^+ + h_0$, $\widetilde{f}^- = f^- + h_0$).

Пусть $T : E_0 \to F_0$ – ограниченный линейный оператор такой, что

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_0, \quad x \in E_0^+,$$
$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_1, \quad x \in Q \cap E_1^+.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{Ran}(T) \subset F_1$, а значит сужение $T$ на $E_1$ является ограниченным оператором из $E_1$ в $F_1$. Фиксируем положительное число $\delta > 0$ и некоторое $N \in \mathbb{N}$. Введем конус $Q_N = Q_{N,\delta}$:

$$Q_N = \bigl\{x = P_N y : y \in Q \cap E_1^{++}, y(1) \geqslant \frac{1}{\delta} \|(I - P_N) y\|_1\bigr\}.$$

Пусть $x \in Q_N$. Тогда, в силу теоремы 3.1, имеем:

$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, \quad x \in Q_N, \tag{3.6}$$

где $M_1^\delta = M_1 + \delta(M_1 + \|T\|_{E_1 \to F_1})$. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Из (3.6) следует, что

$$\pm(Tx)(m) \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, \quad x \in Q_N.$$

Пусть подпространство $L_N$ является линейной оболочкой первых $N$ координатных ортов:

$$L_N = \operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^N.$$

Рассмотрим линейный функционал $\varphi_m : L_N \to \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{N}$), где

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(x; T) = (Tx)(m), \quad x \in L_N.$$

Тогда

$$\varphi_m(x) \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, \quad x \in Q_N.$$

Рассмотрим следующие конусы в $E_1$:

$$\widehat{Q}_N = \{x = y - \lambda f^-, y \in Q_N, \lambda \geqslant 0\}, \quad \widetilde{Q}_N = \widehat{Q}_N \cap \omega_N^+,$$

где

$$\omega_N^+ = \{x \in \omega : P_N x \geqslant 0\}.$$

Покажем, что конусы $\widehat{Q}_N$ и $\widetilde{Q}_N$ суть нижние полурешетки при всех $N \geqslant N_1$, где $N_1 = N_1(f^-)$ такое натуральное число, что $P_{N_1} f^- \in Q_N$. Действительно, пусть $u, v \in \widehat{Q}_N$, $u = u_1 - \lambda_1 f^-$, $v = v_1 - \lambda_2 f^-$, где $u_1, v_1 \in Q_N$ и, для определенности, $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\min(u, v) &= \min(u_1 - \lambda_1 f^-, v_1 - \lambda_2 f^-) \\
&= \min(u_1 + \lambda_2 f^- - \lambda_1 f^- - \lambda_2 f^-, v_1 - \lambda_2 f^-) \\
&= \min(u_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) P_N f^-, v_1) - \lambda_2 f^-.
\end{aligned}$$

Так как $P_N f^- \in Q_N$ при $N > N_1$, то $(\lambda_2 - \lambda_1) P_N f^- \in Q_N$. Так как, согласно теореме 3.1, $Q_N$ – нижняя полурешетка, то

$$\min(u_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) P_N f^-, v_1) \in Q_N,$$

и

$$\min(u_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) P_N f^-, v_1) - \lambda_2 f^- \in \widehat{Q}_N.$$

Ясно, что $\widetilde{Q}_N$ также обладает свойством нижней полурешетки. Так как конус $\widehat{Q}_N$ – одномерное расширение конуса $Q_N$, то можно воспользоваться версией теоремы Хана–Банаха для конусов, где в качестве преднормы выступает функция $M_1^\delta \|P_N x\|_1$. Тогда функционал

$\varphi_m(x;T)$ можно продолжить с $L_N$ до линейного функционала $\widetilde{\varphi}_m(x) = \widetilde{\varphi}_m(x;T)$, определенного на подпространстве

$$\widetilde{L}_N = L_N + \{\lambda f^-\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$$

и удовлетворяющего условию:

$$\widetilde{\varphi}_m(x) \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, \quad x \in \widehat{Q}_N.$$

Введем векторы $f_N = P_N f^+ - f^- = f_N^+ - f^-$, $g_N = P_N f^- - f^- = f_N^- - f^-$. Очевидно, что $f_N$ и $g_N$ принадлежат конусу $\widetilde{Q}_N$, причем $g_N = (I - P_N) f_N$. Положим

$$K_N^+ = \{x = y - \lambda f^- : y \in L_N^+, \lambda \geqslant 0\} \cap \omega_N^+.$$

Множество $K_N^+$, очевидно, является конусом в $E_1$, причем $\widetilde{Q}_N \subset K_N^+$. Отношение частичного порядка на $E_1$, порождаемое конусом $K_N^+$, будем обозначать через $\preccurlyeq$, т.е. $y \preccurlyeq x$ $(x, y \in E_1)$, если $x - y \in K_N^+$. Заметим, что соотношение $y \preccurlyeq x$ влечет поточечное неравенство $P_N y \leqslant P_N x$. Введем вспомогательный функционал $\Psi_m : \widetilde{Q}_N \to \mathbb{R}$ :

$$\Psi_m(x) = \Psi_m(x;T) = \sup_{y\in\widetilde{Q}_N : y \preccurlyeq x} \widetilde{\varphi}_m(y;T), \quad x \in \widetilde{Q}_N.$$

Далее мы увидим, что этот функционал удобно использовать для оценки величины $K(t, Tx; \bar{F})$ при $x \in Q_N$. Очевидно, что $\Psi_m(x) \geqslant 0$ и из $x_1 \preccurlyeq x_2$ $(x_1, x_2 \in \widetilde{Q}_N)$ следует $\Psi_m(x_1) \leqslant \Psi_m(x_2)$. Пусть $F_i^{(m)} = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_i^{(m)})$ $(i = 0, 1)$, где

$$\|x\|_1^{(m)} = |x|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \|x\|_0^{(m)} = |x| b_0(m), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что функционал $\Psi_m : E_1 \to F_1^{(m)}$ ограничен и выполняется неравенство

$$\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} \leqslant M_1^\delta \|x\|_1, \quad x \in \widetilde{Q}_N. \tag{3.7}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $y \in \widetilde{Q}_N$, для которого $y \preccurlyeq x$ и $\Psi_m(x) \leqslant \widetilde{\varphi}_m(y) + \varepsilon$. Поэтому

$$\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} = \Psi_m(x) \leqslant \widetilde{\varphi}_m(y) + \varepsilon.$$

Из условия $y \preccurlyeq x$ следует, что $P_N y \leqslant P_N x$, причем $P_N y \geqslant 0$, так как $y \in \widetilde{Q}_N$. Поскольку $\widetilde{\varphi}_m(y) \leqslant M_1^\delta \|P_N y\|_1$ и $0 \leqslant P_N y \leqslant P_N x$, мы получаем $\|P_N y\|_1 \leqslant \|P_N x\|_1$ и $\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1 + \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon$ имеем:

$$\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1 \leqslant M_1^\delta \|x\|_1, \quad x \in \widetilde{Q}_N,$$

и (3.7) верно.

Покажем, что если $x_1, x_2 \in \widetilde{Q}_N$ и $x_2 - x_1 \in L_N^+$, то

$$\|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)\|_0^{(m)} \leqslant M_0 \|x_2 - x_1\|_0. \tag{3.8}$$

Из включения $x_2 - x_1 \in L_N^+$ вытекает, что $x_1$ и $x_2$ имеют следующий вид:

$$x_1 = u_1 - \lambda f^-, \quad x_2 = u_2 - \lambda f^-,$$

где $u_1, u_2 \in Q_N$, $\lambda \geqslant 0$. Так как $x_i \in \widetilde{Q}_N$, то $P_N x_i \geqslant 0$, откуда $u_i \geqslant \lambda P_N f^-$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется элемент $y' \in \widetilde{Q}_N$ такой, что $y' \preccurlyeq x_2$ и $\Psi_m(x_2) \leqslant \widetilde{\varphi}_m(y') + \ \varepsilon$. Представим $y'$ в виде

$$y' = v - \mu f^-,$$

где $v \in Q_N$, $\mu \geqslant 0$ и $v \geqslant \mu P_N f^-$. Так как $y' \preccurlyeq x_2$, то $v \leqslant u_2$, $\mu \leqslant \lambda$. Пусть

$$y'' = \min(u_1, v) - \mu f^-.$$

Так как $u_1 \geqslant \lambda P_N f^- \geqslant \mu P_N f^-$ и $v \geqslant \mu P_N f^-$, то $\min(u_1, v) \geqslant \mu P_N f^-$, то есть $P_N y'' \geqslant 0$ и $y'' \in \widetilde{Q}_N$. Тогда, так как $\min(u_1, v) \leqslant u_1, \mu \leqslant \lambda$, то

$$y'' \preccurlyeq x_1 = u_1 - \lambda f^-.$$

Следовательно, $\Psi_m(x_1) \geqslant \widetilde{\varphi}_m(y'')$. Так как $x_2 \succcurlyeq x_1$, то $\Psi_m(x_2) \geqslant \Psi_m(x_1)$. Тогда:

$$\begin{aligned} |\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)| &= \Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1) \\ &\leqslant \widetilde{\varphi}_m(y') - \widetilde{\varphi}_m(y'') + \varepsilon \leqslant |\widetilde{\varphi}_m(y') - \widetilde{\varphi}_m(y'')| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому $|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)| \leqslant |\widetilde{\varphi}_m(y') - \widetilde{\varphi}_m(y'')| + \varepsilon = |\widetilde{\varphi}_m(y' - y'')| + \varepsilon$. С другой стороны,

$$y' - y'' = v + \mu f_- - (\min(u_1, v) + \mu f_-) = v - \min(u_1, v) = (v - u_1)_+.$$

Так как $v \leqslant u_2$, то $(v - u_1)_+ \leqslant (u_2 - u_1)_+ \leqslant |u_2 - u_1|$. Следовательно, $(v - u_1)_+ \in L_N^+$ и $\widetilde{\varphi}_m(y' - y'') = \varphi_m(y' - y'') = (T(y' - y''))(m)$ (поскольку сужение функционала $\widetilde{\varphi}_m$ на $L_N$ совпадает с $\varphi_m$), а тогда

$$\begin{aligned} b_0(m)|\Psi(x_2) - \Psi(x_1)| &\leqslant b_0(m)|(T(y' - y'')(m)| + b_0(m)\varepsilon \\ &\leqslant M_0 \|y' - y''\|_0 + b_0(m)\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $y' - y'' = (v - u_1)_+ \leqslant |u_2 - u_1|$, то

$$b_0(m)|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)| \leqslant M_0 \|u_2 - u_1\|_0 + b_0(m)\varepsilon.$$

Так как $x_2 - x_1 = u_2 - u_1$, то $\|u_2 - u_1\|_0 = \|x_2 - x_1\|_0$. Тогда

$$b_0(m)|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)| \leqslant M_0\|x_2 - x_1\|_0 + b_0(m)\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ получаем:

$$b_0(m)|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)| = \|\Psi_m(x_1) - \Psi_m(x_2)\|_0^{(m)} \leqslant M_0\|x_2 - x_1\|_0.$$

Справедливость неравенства (3.8) доказана.

Из (3.7), (3.8) легко получить оценку:

$$K(t, \Psi_m(x); \bar{F}^{(m)}) \leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\} K^{(L_N^+, \widetilde{Q}_N)}(t, x; \bar{E}), \quad x \in \widetilde{Q}_N, \tag{3.9}$$

где

$$K^{(L_N^+, \widetilde{Q}_N)}(t, x; \bar{E}) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in L_N^+, \\ x_1 \in \widetilde{Q}_N}} (\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
K(t, \Psi_m(x); \overline{F^{(m)}}) &= \inf_{\Psi_m(x) = y_0 + y_1} (\|y_0\|_0^{(m)} + t\|y_1\|_1^{(m)}) \\
&\leqslant \inf_{\substack{x' \in \widetilde{Q}_N: \\ x - x' \in L_N^+}} (\|\Psi_m(x) - \Psi_m(x')\|_0^{(m)} + t\|\Psi_m(x')\|_1^{(m)}) \\
&\leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\} \inf_{\substack{x' \in \widetilde{Q}_N: \\ x - x' \in L_N^+}} (\|x - x'\|_0 + t\|x'\|_1) \\
&= \max\{M_0, M_1^\delta\} \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in L_N^+, \\ x_1 \in \widetilde{Q}_N}} (\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1) \\
&= \max\{M_0, M_1^\delta\} K^{(L_N^+, \widetilde{Q}_N)}(t, x; \bar{E}).
\end{aligned}$$

Так как $\Psi_m(x) \leqslant \Psi_m(y)$ при $x \preccurlyeq y$ $(x, y \in \widetilde{Q}_N)$, а $K$-функционал – монотонная норма, то оценку (3.9) можно усилить:

$$K(t, \Psi_m(x); \overline{F^{(m)}}) \leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\} L_N(t, x; \bar{E}), \tag{3.10}$$

где

$$L_N(t, x; \bar{E}) = \inf_{\substack{y \succcurlyeq x, \\ y \in \widetilde{Q}_N}} K^{(L_N^+, \widetilde{Q}_N)}(t, y; \bar{E}).$$

Оценим теперь функционал $L_N(t, x; \bar{E})$ через $K$-функционал Петре банаховой пары $\bar{E}$ при $x \in Q_N$. При этом мы будем опираться на монотонность функционала $L_N(t, x; \bar{Q})$ в смысле введенного отношения порядка. Для оценки величины $K(t,Tx;\bar{F})$ при $x \in Q_N$ достаточно оценить величину $L_N(t,x;\bar{E})$ также для $x \in Q_N \subset \widetilde{Q}_N \cap L_N^+$. Пусть $x \in Q_N$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $x = x_0 + x_1$ – оптимальное $\varepsilon$-разложение для $K$-функционала $K(t,x;\bar{E})$, то есть

$$K(t,x;\bar{E}) \geqslant \|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1 - \varepsilon. \tag{3.11}$$

Введем вектор $x' = x + \|x_1\|_1 g_N$. Тогда $x' \in \widetilde{Q}_N$ и $x \preccurlyeq x'$, откуда

$$L_N(t,x;\bar{E}) \leqslant K^{(L_N^+,\widetilde{Q}_N)}(t,x';\bar{E}). \tag{3.12}$$

Используя тождество $x = (x-y)_+ + \min(x,y)$, получим

$$x' = (x' - \|x_1\|_1 f_N)_+ + \min(x', \|x_1\|_1 f_N).$$

Обозначим $x_0' = (x' - \|x_1\|_1 f_N)_+$, $x_1' = \min(x', \|x_1\|_1 f_N)$. Покажем, что $x_0' \in L_N^+$. Действительно,

$$0 \leqslant x_0' = (x + \|x_1\|_1 g_N - \|x_1\|_1 f_N)_+ = (x - \|x_1\|_1 (P_N f^+ - P_N f^-))_+ \leqslant x.$$

Так как $x \in Q_N \subset L_N^+$, то $x_0' \in L_N^+$. Так как $\widetilde{Q}_N$ – нижняя полурешетка, то $x_1' \in \widetilde{Q}_N$. Следовательно,

$$L_N(t,x;\bar{E}) \leqslant K^{(L_N^+,\widetilde{Q}_N)}(t,x';\bar{E}) \leqslant \|x_0'\|_0 + t\|x_1'\|_1. \tag{3.13}$$

Оценим нормы векторов $x_0', x_1'$. Будем считать, что $N > N_0$. При $n > N$ имеем: $x_0'(n) = 0$. Пусть теперь $0 \leqslant n \leqslant N$. Если $0 \leqslant n \leqslant N_0$, то $f_N(n) \geqslant 1$ и $g_N(n) = 0$, следовательно,

$$x_0'(n) = (x(n) + \|x_1\|_1 g_N(n) - \|x_1\|_1 f_N(n))_+ \leqslant \max(x_0(n), 0) \leqslant \|x_0\|_0.$$

Поэтому $x_0'(n) \leqslant \|x_0\|_0$ при $n = 1, 2, \ldots, N_0$. Если $N_0 < n \leqslant N$, то $g_N(n) = 0, -\frac{1}{N_0} \leqslant f_N(n) < 1 + \frac{1}{N_0}$,

$$\begin{aligned} x_0'(n) &= (x(n) + \|x_1\|_1 g_N(n) - \|x_1\|_1 f_N(n))_+ \\ &= (x(n) - \|x_1\|_1 f_N(n))_+ \leqslant x(n) + \frac{1}{N_0}\|x_1\|_1. \end{aligned}$$

Ранее было показано, что $x_0' \in L_N^+$. Таким образом,

$$\|x_0'\|_0 \leqslant \|x_0\|_0 + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + \frac{1}{N_0}\|x_1\|_1.$$

Далее, $0 \leqslant x_1'(n) \leqslant \|x_1\|_1 f_N(n) \leqslant (1+\frac{1}{N_0})\|x_1\|_1$ при $1 \leqslant n \leqslant N$. Если $n > N$, то, с учетом соотношения $x \in Q_N$, получаем

$$\begin{aligned} x_1'(n) &= \min(x(n) + \|x_1\|_1 g_N, \|x_1\|_1 f_N(n)) \\ &= \min(-f^-(n)\|x_1\|_1, -f^-(n)\|x_1\|_1) = -\|x_1\|_1 f^-(n), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|(I-P_N)x_1'\|_1 \leqslant \|x_1\|_1 \|(I-P_N)f^-\|_1.$$

Поэтому $\|x_1'\|_1 \leqslant (1+\frac{1}{N_0})\|x_1\|_1 + \|x_1\|_1\|(I-P_N)f^-\|_1$. Обозначим $\mu_N = \|(I-P_N)f^-\|_1$. Ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty} \mu_N = 0$. Так как $0 \leqslant x_1 \leqslant x$, то $\|x_1\|_1 \leqslant \|x\|_1$ и

$$\|x_1'\|_1 \leqslant (1+\frac{1}{N_0})(\|x_1\|_1 + \mu_N\|x\|_1).$$

Из (3.13) получаем:

$$\begin{aligned} L_N(t,x;\bar{E}) &\leqslant \|x_0'\|_0 + t\|x_1'\|_1 \leqslant \|x_0\|_0 + \|(I-P_{N_0})x\|_0 \\ &+ (t(1+\frac{1}{N_0}) + \frac{1}{N_0})\|x_1\|_1 + t(1+\frac{1}{N_0})\mu_N\|x\|_1. \end{aligned}$$

Используя (3.10) при $x \in Q_N$ и (3.11), получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} K(t,\Psi_m(x);\overline{F^{(m)}}) &\leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\} L_N(t,x;\bar{E}) \\ &\leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\}(\|x_0\|_0 + (t(1+\frac{1}{N_0}) + \frac{1}{N_0})\|x_1\|_1 \\ &+ \|(I-P_{N_0})x\|_0 + t(1+\frac{1}{N_0})\mu_N\|x\|_1) \\ &\leqslant (1+\frac{c(t)}{N_0})\max\{M_0, M_1^\delta\}(\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1 \\ &+ \|(I-P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N\|x\|_1) \\ &\leqslant (1+\frac{c(t)}{N_0})\max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t,x;\bar{E}) + \varepsilon \\ &+ \|(I-P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N\|x\|_1), \end{aligned}$$

где $c(t) = 1 + \frac{1}{t}$. Таким образом, для $x \in Q_N$ в силу произвольности $\varepsilon$ имеем:

$$\begin{aligned} &K(t,\Psi_m(x);\overline{F^{(m)}}) \\ &\leqslant (1+\frac{c(t)}{N_0})\max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t,x;\bar{E}) + \|(I-P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N\|x\|_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим далее два случая.

I случай: $(Tx)(m) \geqslant 0$. Тогда $\widetilde{\varphi}_m(x) = \varphi_m(x) = (Tx)(m)$ и

$$\Psi_m(x) = \sup_{\substack{y \in \widetilde{Q}_N: \\ y \preccurlyeq x}} \widetilde{\varphi}_m(y) \geqslant \widetilde{\varphi}_m(x) = \varphi_m(x) = (Tx)(m) = |(Tx)(m)|.$$

Простое вычисление приводит к равенству

$$K(t, \Psi_m(x); \overline{F^{(m)}}) = \inf_{\substack{y_i \in \mathbb{R}: \\ y_0 + y_1 = \Psi_m(x)}} (|y_0| b_0(m) + t|y_1|) = \Psi_m(x) \min(b_0(m), t).$$

Поэтому

$$|(Tx)(m)| \min(b_0(m), t)$$
$$\leqslant (1 + \frac{c(t)}{N_0}) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \bar{E}) + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1).$$

II случай: $(Tx)(m) < 0$. Тогда $(Sx)(m) > 0$, где $Sx = -Tx$. Повторяя те же выкладки для функционала $\Psi'_m(x) = \Psi_m(x; S)$, где оператор $S$ есть $-T$, получим:

$$|(Tx)(m)| \min(b_0(m), t) = (Sx)(m) \min(b_0(m), t)$$
$$\leqslant (1 + \frac{c(t)}{N_0}) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \bar{E}) + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1).$$

Следовательно, при $x \in Q_N$ верно неравенство

$$|(Tx)(m)| \min(b_0(m), t)$$
$$\leqslant (1 + \frac{c(t)}{N_0}) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \bar{E}) + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1).$$

Так как $m$ здесь произвольно, то

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |(Tx)(m)| \min(b_0(m), t) \leqslant \big(1 + \frac{c(t)}{N_0}\big) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \bar{E}) + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1)$$

или

$$K(t, Tx; \bar{F})$$
$$\leqslant \big(1 + \frac{c(t)}{N_0}\big) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \bar{E}) + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1).$$

Выберем теперь произвольно $x \in Q \cap E_1^{++}$. Тогда $P_N x \in Q_N$ при достаточно большом $N$. Считая, что такое $N$ выбрано, получим:

$$K(t, T(P_N x); \bar{F}) \leqslant \big(1 + \frac{c(t)}{N_0}\big) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, P_N x; \bar{E}) \\ + \|(I - P_{N_0})P_N x\|_0 + t\mu_N \|P_N x\|_1)), \quad x \in Q \cap E_1^{++}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая непрерывность операторов $P_N$, $I - P_N$ и $K$-функционала, для $x \in Q \cap E_1^{++}$ будем иметь:

$$K(t, Tx; \bar{F}) \leqslant (1 + \frac{c(t)}{N_0}) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \bar{E}) + \|(I - P_{N_0})x\|_0).$$

Переходя еще раз к пределу при $N_0 \to \infty$, будем иметь:

$$K(t, Tx; \bar{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\} K(t, x; \bar{E}), \quad x \in Q \cap E_1^{++}.$$

Так как $M_1^\delta = M_1 + \delta(M_1 + \|T\|_{E_1 \to F_1})$, то, в силу произвольности $\delta$, получим:

$$K(t, Tx; \bar{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \bar{E}), \quad x \in Q \cap E_1^{++}. \tag{3.14}$$

Пусть теперь $x \in Q \cap E_1^{+}$. Выберем произвольно $g_0 \in Q \cap E_1^{++}$ и рассмотрим вектор $x_\varepsilon = x + \varepsilon g_0 \in Q \cap E_1^{++}$. Для вектора $x_\varepsilon$ неравенство (3.14) выполняется, поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что оно выполняется для всех $x \in Q \cap E_1^{+}$.

Пусть теперь $x \in Q \cap E^{+}$ и $z_0 \in Q \cap E_1^{++}$. Тогда вектор

$$x_N = \min(x, N z_0)$$

принадлежит $Q \cap E_1^{+}$, поскольку $0 \leqslant x_N \leqslant N z_0 \in E_1^{+}$. Очевидно, что $x_N(n) \to x(n)$ при $N \to \infty$ (поскольку $z_0(n) > 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$). Так как при этом $x_N \leqslant x$, то $x_N \to x$ в топологии пространства $E_0$. Переходя к пределу по $N$ в неравенстве

$$K(t, Tx_N; \bar{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x_N; \bar{E}),$$

получим

$$K(t, Tx; \bar{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \bar{E}), \quad x \in Q \cap E^{+}.$$

Пусть теперь образ оператора $T$ не вложен в пространство $F_1$. Рассмотрим оператор $T_N = P_N T$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathrm{Ran}(T_N) \subset F_1$ и

$$K(t, T_N x; \bar{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \bar{E}), \quad x \in Q \cap E^{+}.$$

Так как $T_N x \to Tx$ при $N \to \infty$ в топологии постранства $F_0$, то из общих свойств $K$-функционала Петре следует, что

$$K(t, Tx; \bar{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \bar{E}), \quad x \in Q \cap E^+.$$

Как показано в [4], если $x$ – финитный вектор, то из полученной оценки для $K$-функционалов следует требуемое интерполяционное неравенство для оператора $T$. Поэтому, как это уже делалось выше, перейдем к оценке на конусе, аппроксимирующем $Q \cap E^+$ и состоящем из финитных векторов. Пусть

$$K_{N,\delta} = \{x = P_N y : y \in Q \cap E^{++}, y(1) \geqslant \frac{1}{\delta} \|(I - P_N)y\|_0\}.$$

Повторяя те же оценки, что в доказательстве теоремы 3.1, получим:

$$K(t, Tx; \bar{F}) \leqslant M^\delta K(t, x; \bar{E}), \quad x \in K_{N,\delta},$$

где $M^\delta = M + \delta(M + \|T\|_{E_0 \to F_0})$, $M = \max\{M_0, M_1\}$. Как показано в [4], из этой оценки для $K$-функционалов следует интерполяционное неравенство

$$\|Tx\|_F \leqslant c M^\delta \|x\|_E, \quad x \in K_{N,\delta},$$

где $E$ и $F$ – промежуточные весовые интерполяционные пространства, определяемые квазивогнутой функцией $h$, а положительная постоянная $c$ зависит только от пространств $E_i, F_i$ $(i = 0, 1), E$ и $F$. Поэтому при достаточно больших $N$ справедливо неравенство

$$\|TP_N x\|_F \leqslant c M^\delta \|P_N x\|_E, \quad x \in Q \cap E^{++}.$$

Так же, как и ранее, переходя сначала к пределу при $N \to \infty$, а затем при $\delta \to 0$ (при фиксированном $x \in Q \cap E^{++}$), после чего, аппроксимируя вектор из $Q \cap E^+$ последовательностью векторов из $Q \cap E^{++}$, получим требуемое неравенство:

$$\|Tx\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E, \quad x \in Q \cap E^+.$$

Теорема доказана. □

Сформулируем теперь симметричную теорему о равномерном интерполяционном свойстве семейств троек конусов вида

$$(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+).$$

**Теорема 3.3.** *Пусть* $E_i = c_0(a_i)$, $F_i = c_0(b_i)$ $(i = 0, 1)$, $E = c_0(a), F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$. *Пусть банахова тройка* $(E_0, E_1, E)$ *обладает интерполяционным свойством по отношению к* *банаховой тройке* $(F_0, F_1, F)$. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– множество конусов в* $\omega^+$ *такое, что для каждого конуса* $Q \in \mathcal{A}$ *выполняются условия*:

1) $Q$ *– нижняя полурешетка в* $\omega$;
2) $Q \cap E_1^+$ *– тотальный конус в пространстве* $E_1$;
3) $Q \cap E_1^{++} \neq \varnothing$.

*Тогда семейство троек конусов*

$$\mathcal{L} = \big\{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) \,:\, Q \in \mathcal{A}\big\}$$

*обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* $(F_0, F_1, F)$.

Доказательство теоремы 3.3 совершенно аналогично доказательству теоремы 3.2.

Отметим, что вопрос о достаточных условиях, обеспечивающих интерполяционное свойство троек конусов вида $(Q \cap E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+)$, где $E_i$ $(i = 0, 1)$, $E$ – идеальные банаховы пространства, рассматривался в работе [1]. Однако накладываемые в той работе ограничения на конус $Q$ оказываются слишком жесткими для того, чтобы полученный результат был применим к достаточно широкому кругу задач. В то же время, для многих задач достаточно знать интерполяционность тех троек конусов, которые рассмотрены в теоремах 3.2 и 3.3. Условия на конус $Q$ в этих теоремах являются значительно менее жесткими, чем в [1]. Приведем примеры конусов, для которых выполнены условия 1)–3) теорем 3.2 и 3.3.

**Пример 1.** Пусть $\alpha \in \omega^{++}$. Пусть $D$ – конус неотрицательных монотонно убывающих последовательностей. Определим конус квазимонотонных последовательностей $D(\alpha)$ следующим образом:

$$D(\alpha) = \{x \in \omega^+ : \alpha x = \{\alpha(n)x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in D\}.$$

Ясно, что $D(\alpha)$ является нижней полурешеткой. Элементарно проверяется, что любую финитную последовательность можно представить в виде разности двух финитных последовательностей из $D(\alpha)$, откуда следует, что конус $D(\alpha) \cap E_i^+$ является тотальным в любом пространстве $E_i = c_0(a_i)$ $(i = 0, 1)$. Очевидно, что конус $D(\alpha) \cap E_i^+$ $(i = 0, 1)$ содержит строго положительный элемент. Таким образом, конус $D(\alpha)$ удовлетворяет условиям 1)–3).

**Пример 2.** Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное множество индексов. Рассмотрим семейство линейных положительных операторов $A_\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$, действующих в весовых пространствах числовых последовательностей

$E_i = c_0(a_i)$ $(i = 0, 1)$, где $E_1 \subset E_0$. Пусть операторы $I - A_\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ являются биективными в $E_i$, причем операторы $(I - A_\alpha)^{-1}$ – положительные в $E_i$ $(i = 0, 1)$. Рассмотрим конусы

$$Q_\alpha = \{x \in E_0^+ \, : \, x \geqslant A_\alpha x\}.$$

Пусть $x, y \in Q_\alpha$. Тогда $x \geqslant A_\alpha(\min(x, y))$, $y \geqslant A_\alpha(\min(x, y))$ в силу положительности операторов $A_\alpha$. Тем самым, $\min(x, y) \geqslant A_\alpha(\min(x, y))$, то есть $Q_\alpha$ – нижняя полурешетка. Далее, для любого $x \in E_i$ справедливо представление $x = \max(x, 0) - \max(-x, 0) = x_+ - x_-$, поэтому $(I - A_\alpha)^{-1}x = (I - A_\alpha)^{-1}x_+ - (I - A_\alpha)^{-1}x_- \in \operatorname{span}(Q_\alpha)$. Следовательно, в силу биективности операторов $(I - A_\alpha)^{-1}$, конусы $Q_\alpha \cap E_i^+$ являются воспроизводящими конусами в пространствах $E_i$ $(i = 0, 1)$. Очевидно, что все конусы $Q_\alpha \cap E_i^+$ содержат строго положительный вектор. Таким образом, семейство конусов $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ удовлетворяет условиям 1)–3).

В заключение авторы выражают признательность рецензенту за ряд полезных замечаний и рекомендаций, в значительной мере способствовавших улучшению статьи.

## Литература

1. J. Cerda, H. Coll, *Function cones and interpolation.* — Math. Nachr. **278** (2005), 227–239.
2. J. Cerda, J. Martin, *Interpolation of operators on decreasing functions.* — Math. Scand. **78** (1996), 233–245.
3. Y. Sagher, *Some remarks on interpolation of operators and Fourier coefficients.* — Studia Mathematica, v. XLIV (1972), 239–252.
4. В. М. Каплицкий, *Интерполяция нелинейных операторов в весовых $L_p$-пространствах.* — Сибирский математический журнал **51**, No. 2 (2010), 316–329.
5. Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение.* М., Мир, 1980.
6. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* М., Наука, 1984.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М., Наука, 1965.
8. J. Peetre, *A theory of interpolation of normed spaces.* — Notas de mathematica **39** (1968), 1–86.
9. J. Peetre, *On interpolation functions*, I. — Acta Sci. Math. **27**, No 3-4 (1966), 167–171; III: Acta Sci. Math. **30**, No. 3-4 (1969), 235–239.
10. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, М., Наука, 1978.

Kaplitskii V. M., Dronov A. K. Interpolation of operators bounded on cones in weighted spaces of numerical sequences.

The paper is devoted to the general problem of obtaining interpolation theorems for operators bounded on cones in normed spaces, and to some specific results pertaining to the particular problem of interpolation of operators bounded on cones in weighted spaces of numerical sequences. This setting is a natural generalization of the classical problem of interpolation of the boundness property of a linear operator that is bounded between two Banach couples. We introduce the general concept of a Banach triple of cones possessing the interpolation property with respect to a given Banach triple. We provide a sufficient conditions for a triple of cones $(Q_0, Q_1, Q)$ in weighted spaces of numerical sequences to possess the interpolation property with respect to a given Banach triple of weighted spaces of numerical sequences $(F_0, F_1, F)$. Appropriate interpolation theorems generalize the classical result about interpolation of linear operators in weighted spaces and are of interest for the theory of bases in Fréchet spaces.

Южный федеральный университет,
кафедра дифференциальных
и интегральных уравнений
*E-mail*: kaplitsky@donpac.ru

Южный федеральный университет,
кафедра дифференциальных
и интегральных уравнений
*E-mail*: floberrr@mail.ru

Поступило 17 июня 2014 г.