Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

**А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь**

# ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ НУЛЕВЫМ УТОЧНЕННЫМ ПОРЯДКОМ

Начнём с необходимых определений.

Функция $\rho(r)$, определённая на полуоси $(0,\infty)$, называется уточнённым порядком, если она удовлетворяет условию Липшица на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$ и выполняются условия:

1) существует предел $\rho=\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)$,

2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r=0$ (под $\rho'(r)$ следует понимать максимальное по модулю производное число).

В случае, если $\rho=0$, то уточнённый порядок $\rho(r)$ называется нулевым уточнённым порядком.

В работе используется обозначение $V(r)=r^{\rho(r)}$. Сформулируем несколько свойств уточнённого порядка, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем.

**Теорема A.** *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Тогда для любого $t>0$*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(rt)}{V(r)}=1,$$

*причём имеет место равномерная сходимость на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$.*

Доказательство можно найти в [1, глава 1, §12].

**Теорема B.** *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок такой, что $V(r)V(\frac{1}{r})=1$. Пусть*

$$\gamma(t)=\sup_{r>0}\frac{V(rt)}{V(r)}.$$

*Тогда $\gamma(t)$ – непрерывная функция на полуоси $(0,\infty)$, причём функции $\gamma(t)$ и $\gamma(\frac{1}{t})$ имеют нулевой порядок, то есть*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\gamma(t)}{\ln t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\gamma(\frac{1}{t})}{\ln t}=0.$$

---

*Ключевые слова*: целая трансцендентная функция, нулевой уточнённый порядок, $\rho$-тригонометрически выпуклая функция.

Это теорема 2.5 из [2].

**Теорема C.** *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок такой, что $V(r)V(\frac{1}{r}) = 1$. Пусть $K(t)$ – функция на полуоси $(0,\infty)$ такая, что существует $\delta > 0$ такое, что функции $t^{\pm\delta}K(t)$ принадлежат пространству $L_1(0,\infty)$. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{rV(r)} \int\limits_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) V(t)\, dt = \int\limits_0^\infty K(t)\, dt.$$

Эта теорема легко следует из теорем A и B. Более сильная теорема (теорема 4.1.3) есть в [3].

Уточнённые порядки $\rho(r)$ и $\rho_1(r)$ называются эквивалентными, если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = 1.$$

**Теорема D.** *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Тогда существует эквивалентный ему уточнённый порядок $\rho_1(r)$ такой, что функция $V_1(r)$ допускает голоморфное продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ и такой, что для любого $n \geqslant 1$ выполняется равенство*

$$\lim_{r\to\infty} r^n \rho_1^{(n)}(r) \ln r = 0.$$

Аналогичные утверждения приведены в [2, лемма 2.2], и [4, теорема 7]. Добавим, что если считать, что функция $V(r)$ удовлетворяет условию $V(r)V(\frac{1}{r}) = 1$, то в качестве $V_1(z)$ можно взять функцию

$$V_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{V(t)}{t^2 + z^2} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Пусть $f(z)$ – целая функция. Мы будем пользоваться стандартным обозначением $M(r,f) = \max\limits_{\varphi} |f(re^{i\varphi})|$.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется уточнённым порядком целой функции $f(z)$, если выполняется условие

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} = \sigma \in (0,\infty).$$

Если $f(z)$ – целая функция, то $v(z) = \ln|f(z)|$ есть субгармоническая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Как показал Валирон, у всякой целой функции конечного порядка $\rho$,

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},$$

существует уточнённый порядок $\rho(r)$.

Мы изучаем вопрос: "Какой должен быть уточнённый порядок $\rho(r)$, чтобы он был уточнённым порядком целой трансцендентной функции?"

Вначале обсудим случай, когда $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$ и когда ответ на поставленный выше вопрос известен.

Нам будет нужно следующее понятие. Дважды дифференцируемая функция $h(\theta)$ на интервале $(\alpha,\beta)$ называется $\rho$-тригонометрически выпуклой, если выполняется неравенство $h''(\theta) + \rho^2 h(\theta) \geqslant 0$. В общем случае одно из эквивалентных определений $\rho$-тригонометрической выпуклости таково. Функция $h(\theta)$ называется $\rho$-тригонометрически выпуклой на интервале $(\alpha,\beta)$, если она непрерывна и функция $h''(\theta) + \rho^2 h(\theta)$, рассматриваемая как обобщённая функция Шварца на интервале $(\alpha,\beta)$, является положительной мерой.

Некоторые свойства $\rho$-тригонометрически выпуклых функций изложены в [1, глава 1, §16].

Для целых функций уточнённого порядка $\rho(r) \equiv \rho$ (такие функции называются функциями порядка $\rho$ и нормального типа) Линделёф ввёл понятие индикатора. Это понятие распространяется на произвольные уточнённые порядки и произвольные субгармонические функции. Функция $h(\theta)$ вида

$$h(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)}$$

называется индикатором субгармонической функции $v(z)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Индикатор целой функции $f(z)$ – это индикатор субгармонической функции $v(z) = \ln|f(z)|$.

Известно ([1, глава 1, §16]), что если $\rho(r)$ – уточнённый порядок субгармонической функции $v(z)$, то её индикатор есть ненулевая $\rho$-тригонометрически выпуклая функция. Правда, в [1] доказательство приведено для случая, когда $v(z) = \ln|f(z)|$. Однако, оно без изменения распространяется на случай произвольных субгармонических функций.

В пятидесятые годы двадцатого века был открытым вопрос (см. [1, глава 2, §1, теорема 3]) о существовании целой функции с заданным индикатором относительно заданного уточнённого порядка $\rho(r)$. В дальнейшем этот вопрос получил положительное решение. Теперь можно предложить такое решение. Пусть $h(\theta)$ – произвольная $2\pi$-периодическая $\rho$-тригонометрически выпуклая функция. Тогда функция $v(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$ есть субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r) \equiv \rho$. Из этого и теоремы 4 из [5] следует, что если $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, то существует субгармоническая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Далее применяется теорема о приближении произвольной субгармонической функции $v(z)$ субгармоническими функциями вида $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ – целая функция. Теоремы такого типа доказывались различными авторами. Основопологающий результат в этом направлении принадлежит Юлмухаметову [6].

**Теорема E.** *Пусть $v$ – субгармоническая функция в $\mathbb{C}$ конечного порядка $\rho > 0$. Тогда существует целая функция $f(z)$ порядка $\rho$ такая, что*

$$v(z) - \ln|f(z)| = O(\ln|z|),$$

*когда $z$ стремится к бесконечности вне множества кругов $|z - z_j| < r_j$ таких, что $\sum\limits_{r_j \geqslant r} r_j = o(r^{\rho-\alpha})$ для любого наперёд заданного $\alpha \geqslant \rho$.*

Из сказанного следует, что для любой $\rho$-тригонометрически выпуклой функции $h(\theta)$ и любого уточнённого порядка $\rho(r)$ такого, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$ существует целая функция $f(z)$ с индикатором $h(\theta)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$.

Так как

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} = \max h(\theta),$$

то тем самым доказано, что для любого уточнённого порядка $\rho(r)$ такого, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$, существует целая функция уточнённого порядка $\rho(r)$.

Для случая, когда $\rho = 0$, вопрос о существовании такой целой функции оставался открытым до настоящего времени. Мы доказываем следующую теорему.

**Теорема.** *Пусть $\rho(r)$ – заданный нулевой уточнённый порядок. Для того, чтобы существовала целая трансцендентная функция $f(z)$, для которой уточнённый порядок $\rho(r)$ был бы уточнённым порядком этой функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln r}{V(r)} = 0. \tag{1}$$

**Доказательство.** Необходимость. Эта часть теоремы очевидна. Действительно, пусть $f(z)$ – целая трансцендентная функция уточнённого порядка $\rho(r)$. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} = \sigma \in (0,\infty), \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\ln r}{\ln M(r,f)} = 0,$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln r}{V(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln r}{\ln M(r,f)} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} = 0.$$

Тем самым равенство (1) доказано.

Достаточность. Для того, чтобы доказать теорему, достаточно её доказать для какого-либо уточнённого порядка $\rho_1(r)$, эквивалентного $\rho(r)$. Тогда, как следует из теоремы D, можно дополнительно считать, что $V(r)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на полуоси $(0,\infty)$. Из сказанного также следует, что теорему достаточно доказать для какого-нибудь уточнённого порядка $\rho_1(r)$, который совпадает с $\rho(r)$ на некоторой полуоси $[a,\infty)$. Поэтому имея в виду (1), можно дополнительно считать, что на полуоси $[1,\infty)$ выполняется неравенство $V(r) \geqslant \ln r + 1$, а на сегменте $[1,e]$ выполняется равенство $V(r) = \ln r + 1$.

Поэтому дальнейшее доказательство теоремы мы будем вести, считая, что выполняются дополнительные условия:

1) $V(r)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на полуоси $(0,\infty)$,

2) при $r \geqslant 1$ выполняется неравенство $V(r) \geqslant \ln r + 1$,

3) на сегменте $[1,e]$ выполняется равенство $V(r) = \ln r + 1$.

Так как доказательство достаточно длинное, мы разобьём его на несколько этапов.

**1.** Обозначим $\varphi(x) = V(e^x)$. Функция $\varphi(x)$ обладает свойствами:

1) $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на полуоси $[0,\infty)$,

2) при $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant x+1$,
3) на сегменте $[0,1]$ выполняется равенство $\varphi(x) = x+1$,
4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$,
5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Заметим, что свойство 4) следует из равенства (1), а свойство 5) следует из равенства

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{e^x V'(e^x)}{V(e^x)} = \rho(e^x) + xe^x\rho'(e^x).$$

Пусть $k$ – произвольное вещественное число. Выполняется равенство

$$\lim_{x\to\infty} (\varphi(x) - kx) = \infty.$$

Поэтому функция $\varphi(x) - kx$ на полуоси $[0,\infty)$ имеет минимальное значение, которое мы обозначим через $b(k)$. Заметим, что $b(k)$ – убывающая непрерывная функция и что $b(k) = 1$ при $k \leqslant 1$.

**2.** Множество решений уравнения $\varphi(x) = kx + b(k)$ есть непустой компакт $F_k$. Обозначим

$$\tilde{x}_k = \min F_k, \qquad x_k = \max F_k. \tag{2}$$

Прямая $\ell(k):\ y = kx + b(k)$ есть опорная прямая к кривой $\mathscr{L}:\ y = \varphi(x)$ и точки $(\tilde{x}_k, \varphi(\tilde{x}_k))$, $(x_k, \varphi(x_k))$ являются точками опоры для прямой $\ell(k)$ и кривой $\mathscr{L}$.

Тем самым доказано, что у кривой $\mathscr{L}$ есть опорная прямая $\ell(k)$ с угловым коэффициентом $k$ и что кривая $\mathscr{L}$ располагается над прямой $\ell(k)$.

Из свойства 4) функции $\varphi(x)$ следует, что кривая $\mathscr{L}$ не лежит ни в какой полуплоскости $y \leqslant kx + b$. Поэтому множество опорных прямых к кривой $\mathscr{L}$, которые имеют угловой коэффициент $k$, содержит единственный элемент $\ell(k)$.

Мы будем рассматривать величины $\tilde{x}_k, x_k$ как функции переменной $k$. Изучим свойства этих функций. Рассмотрим прямые $\ell(k)$ и $\ell(k_1)$, где $k < k_1$. Точка пересечения этих прямых есть точка $M(\xi, k\xi + b(k))$, где $\xi = \frac{b(k)-b(k_1)}{k_1-k}$.

Пусть $h_1$ – открытый луч, лежащий на прямой $\ell(k):\ y = kx + b(k)$, являющийся образом полуоси $(\xi,\infty)$. Поскольку кривая $\mathscr{L}$ лежит над прямой $\ell(k_1)$, а луч $h_1$ лежит строго под прямой $\ell(k_1)$, мы видем, что на луче $h_1$ нет точек кривой $\mathscr{L}$. Точка $(x_k, kx_k + b(k))$ лежит на кривой

$\mathscr{L}$ и прямой $\ell(k)$ и не лежит на луче $h_1$. Значит, $x_k \leqslant \xi$. Аналогично доказывается, что $\xi \leqslant \tilde{x}_{k_1}$. Тем самым доказано неравенство $x_k \leqslant \tilde{x}_{k_1}$.

Так как $\mathscr{L}$ – гладкая кривая, то опорная прямая к этой кривой является касательной к этой кривой в точке опоры. Поэтому $\varphi'(x_k) = k$, $\varphi'(\tilde{x}_{k_1}) = k_1 > k$, $x_k < \tilde{x}_{k_1}$. Из этого неравенства и очевидного неравенства $\tilde{x}_k \leqslant x_k$ следует, что функции $\tilde{x}_k$, $x_k$ являются строго возрастающими. Докажем ещё, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \infty. \tag{3}$$

Если это не так, то существует число $a > 0$ такое, что $\lim x_k = a$ $(k \to \infty)$. Это равенство и равенство $\varphi'(x_k) = k$ противоречат тому, что функция $\varphi$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Тем самым равенство (3) доказано.

**3.** Пусть $g_1$ – открытый отрезок на прямой $\ell(k)$, являющийся образом интервала $(0, \tilde{x}_k)$ при отображении $y = kx + b(k)$, $g_2$ – открытый луч на прямой $\ell(k)$, являющийся образом луча $(x_k, \infty)$ при том же отображении.

Докажем, что через каждую точку отрезка $g_1$ проходит опорная прямая к кривой $\mathscr{L}$ с некоторым угловым коэффициентом $k_1 < k$, а через каждую точку луча $g_2$ проходит опорная прямая к кривой $\mathscr{L}$ с некоторым угловым коэффициентом $k_2 > k$.

Пусть $M$ – произвольная точка луча $g_2$. Её координаты имеют вид $(t, kt + b(k))$, где $t$ – некоторые число на полуоси $(x_k, \infty)$. Покажем, что существует $\delta = \delta(t) > 0$ такое, что при любом $\lambda \in [k, k+\delta)$ луч $A_\lambda$ прямой $y - kt - b(k) = \lambda(x - t)$, являющийся образом полуоси $[t, \infty)$, не пересекается с кривой $\mathscr{L}$. Если это не так, то существует последовательность $\xi_n \geqslant t$ такая, что выполняется равенство

$$\varphi(\xi_n) = kt + b(k) + \left(k + \frac{1}{n}\right)(\xi_n - t). \tag{4}$$

Из того равенства и свойства 4) функции $\varphi(x)$ следует, что последовательность $\xi_n$ ограничена. Поэтому у последовательности $\xi_n$ есть сходящаяся подпоследовательность $\xi_{n_m}$. Если $\xi = \lim \xi_{n_m}$ $(m \to \infty)$, то $\xi \geqslant t > x_k$. Беря в равенстве (4) $n = n_m$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получим равенство $\varphi(\xi) = k\xi + b(k)$. Это равенство противоречит определению числа $x_k$.

Тем самым доказано, что существуют числа $\delta > 0$ такие, что для любого $\lambda \in [k, k+\delta)$ луч $A_\lambda$ не пересекается с кривой $\mathscr{L}$. Пусть $\delta_2$

– точная верхняя грань таких $\delta$. Очевидно, что $\delta_2 < \infty$. Пусть $k_2 = k+\delta_2$. Легко проверить, что прямая $y-kt-b(k) = k_2(x-t)$, проходящая через точку $M$, является опорной прямой к кривой $\mathscr{L}$.

Тем самым часть сформулированного выше утверждения, относящаяся к лучу $g_2$, доказана.

Аналогично доказывается другая часть утверждения, относящаяся к отрезку $g_1$. На этом мы заканчиваем доказательство сформулированного нами утверждения.

**4.** Определим на полуоси $[0,\infty)$ функцию

$$\varphi_1(x) = \sup_k (kx + b(k)).$$

Для любых $x \geqslant 0$ и $k \in (-\infty,\infty)$ выполняется неравенство $kx + b(k) \leqslant \varphi(x)$. Из этого следует, что

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x), \ \ x \in [0,\infty). \tag{5}$$

Так как $\sup\limits_k (kx+b(k)) \geqslant x+b(1) = x+1$, то выполняется неравенство $\varphi_1(x) \geqslant x+1$. Так как на сегменте $[0,1]$ выполняется равенство $\varphi(x) = x+1$, то на том же сегменте выполняется равенство $\varphi_1(x) = x+1$. Так как при $k \leqslant 1$ выполняются соотношения $kx + b(k) = kx + 1 \leqslant x + 1$, то справедливо равенство

$$\varphi_1(x) = \sup_{k\geqslant 1} (kx + b(x)). \tag{6}$$

Так как при $k \geqslant 1$ функция $kx+b(k)$ возрастает по переменной $x$, то $\varphi_1(x)$ – возрастающая функция на полуоси $[0,\infty)$. Так как $\varphi_1(x)$ есть верхняя огибающая семейства линейных функций, то $\varphi_1(x)$ – выпуклая функция на полуоси $[0,\infty)$.

**5.** Прямая $\ell(k)$ является опорной прямой для кривой $\mathscr{L}$. Пусть $(\tau,\varphi(\tau))$ – произвольная точка опоры для прямой $\ell(k)$. Тогда выполняется равенство $k\tau + b(k) = \varphi(\tau)$. Так как $\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x)$, то $\varphi_1(\tau) \leqslant \varphi(\tau) = k\tau+b(k)$. С другой стороны, из определения функции $\varphi_1$ следует неравенство $\varphi_1(\tau) \geqslant k\tau + b(k) = \varphi(\tau)$. Таким образом, получаем равенство $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$.

Опорная прямая к гладкой кривой является касательной к этой кривой в точке опоры. Поэтому $\varphi'(\tau) = k$.

Имеем систему условий:

1) $\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x)$,

2) $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$,

3) $\varphi$ – дифференцируемая функция,

4) $\varphi_1$ – выпуклая функция.

Из этих условий следует, что функция $\varphi_1$ является дифференцируемой в точке $\tau$ и что выполняется равенство $\varphi_1'(\tau) = \varphi'(\tau)$.

В частности, функция $\varphi_1$ дифференцируема в точках $\tilde{x}_k$ и $x_k$ и выполняются равенства $\varphi_1'(\tilde{x}_k) = \varphi_1'(x_k) = k$. Если выполняется неравенство $\tilde{x}_k < x_k$, то на сегменте $[\tilde{x}_k, x_k]$ функция $\varphi_1$ является линейной. Таким образом, функция $\varphi_1$ является дифференцируемой на интервале $(\tilde{x}_k, x_k)$. Дифференцируемость функции $\varphi_1$ в точках $\tilde{x}_k$ и $x_k$ была доказана ранее. Таким образом, функция $\varphi_1$ дифференцируема в каждой точке сегмента $[\tilde{x}_k, x_k]$. Здесь уже нет необходимости предполагать, что этот сегмент невырожденный.

**6.** Теперь докажем равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x} = \infty. \tag{7}$$

Из равенства $\varphi_1(x_k) = \varphi(x_k)$ и свойства 4) функции $\varphi(x)$ (см. пункт 1) следует, что функция $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ является неограниченной на полуоси $[1, \infty)$. Так как $\varphi_1$ – выпуклая функция, то $(\varphi_1)_+'(x)$ – возрастающая функция. Поэтому существует $\lim(\varphi_1)_+'(x)$ $(x \to \infty)$. Если этот предел конечный, то это противоречит неограниченности функции $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ на полуоси $[1, \infty)$. Поэтому $\lim (\varphi_1)_+'(x) = \infty$ $(x \to \infty)$. Из этого следует равенство (7).

**7.** Из равенства (7) следует, что кривая $\mathscr{L}_1 :\ y = \varphi_1(x),\ x \in [0, \infty)$, не лежит ни в какой полуплоскости $y \leqslant kx + b$. Поэтому при любом вещественном $k$ у кривой $\mathscr{L}_1$ имеется не более чем одна опорная прямая с угловым коэффициентом $k$. Прямая $\ell(k)$ есть единственная опорная прямая к кривой $\mathscr{L}$, которая имеет угловой коэффициент $k$. Эта прямая также является опорной к кривой $\mathscr{L}_1$, причём точки $(\tilde{x}_k, \varphi_1(\tilde{x}_k))$ и $(x_k, \varphi_1(x_k))$ являются точками опоры для этой прямой. Эта прямая является единственной опорной прямой к кривой $\mathscr{L}_1$, которая имеет угловой коэффициент $k$. Следовательно, у кривых $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_1$ одно и тоже множество опорных прямых.

**8.** Теперь докажем, что функция $\varphi_1(x)$ дифференцируема на полуоси $(0, \infty)$. Пусть $\tau$ – произвольное строго положительное число. Нам нужно доказать существование производной $\varphi_1'(\tau)$. Поскольку $\varphi(x) = x+1$ на сегменте $[0, 1]$, можно считать, что $\tau \geqslant 1$. Если $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$, то,

как следует из рассуждений, приведённых на этапе 5 доказательства, в этом случае функция $\varphi_1$ будет дифференцируемой в точке $\tau$.

Предположим теперь, что выполняется неравенство $\varphi_1(\tau) < \varphi(\tau)$. Проведём через точку $(\tau, \varphi_1(\tau))$ прямую $\ell_1$, опорную к кривой $\mathscr{L}_1$. Так как функция $\varphi_1$ выпукла, то такая прямая существует. Из рассуждений, приведённых на этапе 7, следует, что прямая $\ell_1$ совпадает с одной из прямых $\ell(k)$.

Докажем, что выполняется неравенство $\tilde{x}_k \leqslant \tau \leqslant x_k$. Предположим, что выполняется неравенство $x_k < \tau$. Пусть $\tau_1$ – такое число, что $x_k < \tau_1 < \tau$. Из рассуждений, приведённых на этапе 3, следует, что через точку $(\tau_1, k\tau_1 + b(k))$, лежащую на прямой $\ell(k)$, можно провести прямую $\ell_2$ – опорную к кривой $\mathscr{L}$, угловой коэффициент которой $k_1$ строго больше чем $k$. Прямая $\ell_2$ будет опорной прямой также к кривой $\mathscr{L}_1$. Поэтому кривая $\mathscr{L}_1$ лежит над прямой $\ell_2$. С другой стороны, точка $(\tau, k\tau + b(k))$ лежит на кривой $\mathscr{L}_1$ и строго под прямой $\ell_2$. Полученное противоречие доказывает неравенство $\tau \leqslant x_k$. Аналогично доказывается неравенство $\tilde{x}_k \leqslant \tau$. Из рассуждений, приведённых на этапе 5, следует дифференцируемость функции $\varphi_1$ в точке $\tau$. Дифференцируемость функции $\varphi_1$ доказана.

**9.** Мы заканчиваем изучение свойств функции $\varphi_1$ доказательством равенства

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = 0. \tag{8}$$

Обозначим $F = \{x \geqslant 0 : \ \varphi_1(x) = \varphi(x)\}$. Это неограниченное множество.

Пусть $\varepsilon$ – произвольное строго положительное число. Существует $\xi \in F$ такое, что при $x \geqslant \xi$ будет выполняться неравенство $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} < \varepsilon$. Пусть $x > \xi$. Если $x \in F$, то $\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} < \varepsilon$. Пусть теперь $x \notin F$. Из рассуждений, приведённых на предыдущем этапе, следует, что существует $k$ такое, что выполняется неравенство $\tilde{x}_k \leqslant x \leqslant x_k$. Из этого неравенства и соотношения $x \notin F$ следует неравенство $\tilde{x}_k < x < x_k$. Предположим, что выполняется неравенство $\tilde{x}_k \geqslant \xi$. Используя то, что $\varphi_1$ – линейная возрастающая функция на сегменте $[\tilde{x}_k, x]$, получим

$$\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} \leqslant \frac{\varphi_1'(\tilde{x}_k)}{\varphi_1(\tilde{x}_k)} = \frac{\varphi'(\tilde{x}_k)}{\varphi(\tilde{x}_k)} < \varepsilon.$$

Если же выполняется неравенство $\tilde{x}_k < \xi$, то аналогичное рассуждение нужно применить к сегменту $[\xi, x]$. Тем самым равенство (8) доказано.

Пусть числовая функция $y = \psi(x)$ имеет своей областью определения множество $E$. Надграфик $epi\ \psi$ функции $\psi$ определяется следующим образом:

$$epi\ \psi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in E,\ y \geqslant \psi(x)\right\}.$$

Можно проверить, что построенная функция $\varphi_1(x)$ является наибольшей выпуклой минорантой функции $\varphi(x)$ и что множество $epi\ \varphi_1$ есть выпуклая оболочка множества $epi\ \varphi$.

**10.** Функция $\varphi_1(x)$ выпукла на полуоси $[0, \infty)$, причём $\varphi_1(0) = 1$, $(\varphi_1)'_+(0) = 1$. Поэтому функцию $\varphi_1(x)$ можно продолжить как выпуклую на вещественную ось $(-\infty, \infty)$, причём так, чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi_1(x) = m > 0, \ \lim_{x \to -\infty} \varphi_1'(x) = 0.$$

Обозначим $r^{\rho_1(r)} = V_1(r) = \varphi_1(\ln r)$. Заметим, что функция $\rho_1(r)$ – это нулевой уточнённый порядок, функция $V_1(r)$ является логарифмически выпуклой, причём выполняются соотношения

$$\lim_{r \to +0} V_1(r) = m > 0, \ \lim_{r \to +0} rV_1'(r) = 0, \ \lim_{r \to \infty} rV_1'(r) = \infty.$$

Последнее равенство есть следствие равенства (7) и того, что $rV_1'(r)$ есть возрастающая функция.

Далее обозначим

$$n(r) = [rV_1'(r)], \quad N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Функция $n(r)$ является возрастающей ступенчатой неограниченной функцией с единичными скачками. Выполняются соотношения $n(r) \sim rV_1'(r)$ $(r \to \infty)$,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r)}{V_1(r)} = 1, \quad \frac{rN_+'(r)}{N(r)} = \frac{n(r)}{N(r)} \to 0 \ (r \to \infty).$$

Из последнего равенства следует, что справедливо равенство $N(r) = r^{\rho_2(r)}$, где $\rho_2(r)$ – нулевой уточнённый порядок.

Пусть $a_n$ – точки роста функции $n(r)$,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Имеем

$$\ln M(r,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{a_n}\right) = \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn(t)$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{rn(t)}{t(t+r)} dt = \int_0^{\infty} \frac{rN(t)}{(t+r)^2} dt.$$

Теперь из теоремы C следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{N(r)} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{V_1(r)} = 1.$$

Так как $V(r) \geqslant V_1(r)$, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} \leqslant 1.$$

Из того, что существует неограниченная последовательность $r_n$ такая, что $V_1(r_n) = V(r_n)$, следует, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} = 1.$$

Теорема доказана. □

## Литература


1. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М. (1956).
2. А. Ф. Гришин, И. В. Поединцева, *Абелевы и тауберовы теоремы для интегралов.* — Алгебра и анализ **26**, No. 3 (2014), 1–88.
3. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbaurne, Sidney (1987).

4. А. Ф. Гришин, Т. И. Малютина, *Об уточнённом порядке.* — Сборник “Комплексный анализ и математическая физика”. Красноярск (1998), 10–24.
5. А. Ф. Гришин, А. Шуиги, *К теории предельных множеств Азарина.* — Математичні Студії, **28**, No. 2 (2007), 163–174.
6. Р. С. Юлмухаметов, *Аппроксимация субгармонических функций.* — Analysis Mathematica **11**, No. 3 (1985), 257–282.

Grishin A. F., Nguyen Van Quynh, Entire functions with preassigned zero proximate order.

It is known that if the proximate order $\rho(r)$ is such that $\lim \rho(r) = \rho > 0$ $(r \to \infty)$, then there exists an entire function $f(z)$ of proximate order $\rho(r)$. In the case where $\rho = 0$ the question about the existence of such an entire function has remained open until now. This question is investigated in the paper.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
*E-mail*: grishin@univer.kharkov.ua

Поступило 14 апреля 2014 г.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
*E-mail*: quynh_sonla032@yahoo.com;
quynhsonla1988@gmail.com