Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

И. В. Виденский

ОБ АНАЛОГЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БЛЯШКЕ ДЛЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА С ЯДРОМ НЕВАНЛИННЫ–ПИКА

1. Введение

Статья Аглера [1] послужила толчком к бурному развитию теории гильбертовых пространств с ядрами Неванлинны–Пика, то есть с условием разрешимости некоторой интерполяционной задачи в пространстве мультипликаторов. Предварительные итоги этого развития подведены в монографиях Аглера и Маккарти [2], Сейпа [3, гл. 2].

При изучении вопросов, связанных с множествами нулей элементов функционального гильбертова пространства, более естественным, на наш взгляд, оказалось некое условие, менее ограничительное, чем условие Неванлинны–Пика. Мы называем его условием Шварца–Пика (см. ниже определения 1 и 9). Оно означает разрешимость в пространстве мультипликаторов интерполяционной задачи с данными, состоящими из единицы и нулей.

Шапиро и Шилдс [4] получили достаточное условие на множество нулей функций из пространств типа Дирихле, напоминающее условие Бляшке. Маршалл и Сандберг [5] обобщили этот результат на гильбертовы пространства с ядрами Неванлинны–Пика. Другое доказательство этого обобщения содержится в [2, 3] и состоит в следующем. В [2, 3] построены экстремальные функции – аналоги множителей Бляшке в алгебре H^∞ (см. ниже формулу (4)); отмечено, что у последовательности конечных произведений таких множителей есть предельная точка в слабой* операторной топологии (алгебра мультипликаторов является подалгеброй алгебры линейных операторов на функциональном гильбертовом пространстве), которая обращается в ноль на исходной последовательности.

В настоящей заметке определено абстрактное условие Бляшке для функционального гильбертова пространства, состоящее в сходимости произведения расстояний от элементов последовательности точек до

Ключевые слова: гильбертово пространство, воспроизводящее ядро, мультипликаторы.

фиксированной точки a (см. ниже определение 2). Для пространств с ядрами Шварца–Пика доказана независимость этого условия от выбора точки a. Впервые рассмотрено бесконечное произведение множителей типа Бляшке. Для пространств с ядрами Шварца–Пика и абстрактных последовательностей Бляшке доказана сходимость этого бесконечного произведения на компактах в соответствующих топологиях (см. ниже теорему 1). Разумеется, отсюда следует поточечная сходимость и сходимость в слабой* операторной топологии пространства мультипликаторов.

Изложим кратко необходимые предварительные сведения, подробное изложение можно найти в монографиях [2, 3].

Пусть X – бесконечное множество, H – гильбертово пространство функций, определенных на X, такое что для любой точки a, $a \in X$, функционал значения в точке a, $G_a(f) = f(a)$, $f \in H$, непрерывен, то есть $G_a \in H^*$. Тогда в H существует воспроизводящее ядро $k(x, a)$, то есть такой элемент, что

$$\langle f(x), k(x,a)\rangle = f(a), \quad f \in H.$$

Впредь будем предполагать, что ядро $k(x, y)$ неприводимо, то есть $k(x, y) \neq 0$ для любых x, y, а также, что для любых фиксированных точек a, b, $a \neq b$, элементы $k(x, a)$, $k(x, b)$ линейно независимы. Тогда на множестве X можно ввести метрику (см. [2, 3])

$$\rho(a,b) = \sqrt{1 - \frac{|k(a,b)|^2}{k(a,a)k(b,b)}}, \quad a, b \in X. \tag{1}$$

Если X – единичный круг $\mathbb{D}$ комплексной плоскости,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

H – классическое пространство Харди H^2, то формула (1) задает псевдогиперболическую метрику

$$\rho_2(a,b) = \Big|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\Big|, \quad a, b \in \mathbb{D}. \tag{2}$$

Обозначим через $B(H)$ пространство линейных непрерывных операторов на H, через $M(H)$ – пространство мультипликаторов на H, то есть

$$M(H) = \{\varphi : f \cdot \varphi \in H \quad \forall f, f \in H\}.$$

Каждый мультипликатор φ порождает линейный оператор на H

$$M_\varphi(f) = \varphi f, \quad f \in H,$$

который замкнут, следовательно, непрерывен. Определим норму на пространстве мультипликаторов $\|\varphi\|_{M(H)} = \|M_\varphi\|_{B(H)}$, с такой нормой $M(H)$ становится замкнутой подалгеброй алгебры $B(H)$. Легко видеть, что воспроизводящие ядра являются собственными векторами сопряженного оператора $(M_\varphi)^*$, а именно,

$$(M_\varphi)^* k(x,a) = \overline{\varphi(a)} k(x,a).$$

Следовательно, $|\varphi(a)| \leqslant \|(M_\varphi)^*\| = \|\varphi\|$ и $\varphi(x)$ – ограниченная функция.

Маршалл и Сандберг [5] отметили, что для алгебры мультипликаторов справедлив следующий аналог леммы Шварца–Пика.

Лемма 1. *Если φ – мультипликатор, $\|\varphi\| \leqslant 1$, a, b – различные точки множества X, $\varphi(b) = 0$, то*

$$|\varphi(a)| \leqslant \rho(a,b). \tag{3}$$

Доказательство. Для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$\|(M_\varphi)^*(\alpha k(x,a) + \beta k(x,b))\|^2 \leqslant \|\alpha k(x,a) + \beta k(x,b)\|^2,$$

что эквивалентно положительной определенности квадратичной формы

$$|\alpha|^2(1 - |\varphi(a)|^2)k(a,a) + \alpha\overline{\beta} k(b,a) + \overline{\alpha}\beta k(a,b) + |\beta|^2 k(b,b) \geqslant 0,$$

значит

$$\det \begin{pmatrix} (1 - |\varphi(a)|^2)k(a,a) & k(b,a) \\ k(a,b) & k(b,b) \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

то есть $|\varphi(a)|^2 \leqslant \rho^2(a,b)$. □

Для классического пространства Харди H^2 в круге алгеброй мультипликаторов является пространство ограниченных аналитических функций H^∞. Для $\varphi \in H^\infty$, $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\varphi(b) = 0$ лемма Шварца–Пика утверждает, что $|\varphi(a)| \leqslant \rho_2(a,b)$, причем равенство достигается только для множителя Бляшке $\varphi(z) = \gamma(z-b)/(1-\bar{b}z)$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$. По аналогии с классическим случаем введем условие на ядро $k(x,y)$, менее ограничительное, чем условие Неванлинны–Пика.

Определение 1. *Гильбертово пространство H с ядром $k(x,y)$ обладает свойством Шварца–Пика в двух точках (для краткости будем писать $H \in (SP)_2$), если для любых различных точек a, b множества X существует мультипликатор φ такой, что $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\varphi(b) = 0$, $\varphi(a) = \rho(a,b)$.*

В [5] доказано, что такой мультипликатор единственен, в [2,3] для него получена явная формула, выведем ее. В пространстве H существует единственное решение f следующей экстремальной задачи:

$$\operatorname{Re} f(a) = \sup\{\operatorname{Re} g(a) : g(b) = 0, \|g\| \leqslant 1\}.$$

Очевидно, что f является линейной комбинацией ядер $k(z,a)$, $k(z,b)$, а именно

$$f(z) = \frac{1}{\rho(a,b)} \left(\frac{k(z,a)}{\|k(z,a)\|} - \frac{k(b,a)}{\|k(z,a)\|} \frac{k(z,b)}{k(b,b)} \right), \quad \|f\| = 1.$$

С другой стороны, по условию $(SP)_2$ существует мультипликатор $\Psi(z,a,b)$ такой, что $\|\Psi(z,a,b)\| \leqslant 1$, $\Psi(b,a,b) = 0$, $\Psi(a,a,b) = \rho(a,b)$. Тогда функция $h(z) = \Psi(z,a,b) \cdot k(z,a)/\|k(z,a)\|$ обладает такими свойствами: $\|h\| \leqslant 1$, $h(b) = 0$, $h(a) = \rho(a,b)\|k(z,a)\| = f(a)$. Значит, $h(z) = f(z)$ для любого z, $z \in X$, и мы получили формулу

$$\Psi(z,a,b) = \frac{1}{\rho(a,b)} \left(1 - \frac{k(b,a)k(z,b)}{k(b,b)k(z,a)} \right), \tag{4}$$

причем $\|\Psi(z,a,b)\| = 1$. Отсюда следует, что равенство в неравенстве (3) достигается, только если $\varphi(z) = \gamma\Psi(z,a,b)$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$. Мультипликаторы $\Psi(z,a,b)$ естественно считать аналогами множителей Бляшке. Определим аналог условия Бляшке для пространства H.

Определение 2. *Последовательность $Z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ различных точек множества X удовлетворяет условию Бляшке для пространства H (для краткости будем писать $Z \in (B)$), если существует такая точка a, $a \in X$, что сходится произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \rho(z_n, a) > 0. \tag{B}$$

Для пространства Харди H^2 это условие превращается в обычное условие Бляшке, которое характеризует множество нулей функций из пространств H^2 и H^∞, при этом оно не зависит от выбора точки a, $a \neq z_n$.

2. Основные результаты

Лемма 2. *Предположим, что гильбертово пространство H удовлетворяет условию Шварца–Пика для двух точек $(SP)_2$. Тогда для любых точек a, b из множества X справедливы следующие включение* *и неравенство*:

$$\frac{k(z,b)}{k(z,a)} \in M(H),$$
$$\left\| \frac{k(z,b)}{k(z,a)} \right\| \leqslant (1+\rho(a,b)) \frac{k(b,b)}{|k(b,a)|}. \tag{5}$$

Доказательство. Выразим из формулы (4) отношение воспроизводящих ядер:

$$\frac{k(z,b)}{k(z,a)} = (1-\rho(a,b)\Psi(z,a,b)) \frac{k(b,b)}{k(b,a)}. \tag{6}$$

Так как $\Psi(z,a,b)$ – мультипликатор и $\|\Psi(z,a,b)\| = 1$, то $k(z,b)/k(z,a)$ – мультипликатор и

$$\left| \frac{k(z,b)}{k(z,a)} \right| \leqslant \left\| \frac{k(z,b)}{k(z,a)} \right\| \leqslant (1+\rho(a,b)) \frac{k(b,b)}{|k(b,a)|}.$$

□

Теорема 1. *Пусть гильбертово пространство H удовлетворяет условию Шварца–Пика для двух точек $(SP)_2$ и последовательность $Z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию Бляшке для H.*

1. *Тогда для любой точки b, $b \in X$, $b \neq z_n$, $n \geqslant 1$, сходится произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \rho(z_n, b) > 0.$$

2. *Пусть мультипликаторы $\Psi(z,a,z_n)$ определены по формуле (4). Тогда бесконечное произведение*

$$\Psi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \Psi(z,a,z_n) \tag{7}$$

сходится равномерно на компактах метрического пространства (X,ρ).

3. *Если H сепарабельное пространство, то произведение (7) сходится в слабой операторной топологии. Если H несепарабельно, то произведение (7) сходится в слабой* операторной топологии пространства $B(H)$.*

4. *Предположим, что X – топологическое пространство (топология не задается метрикой ρ) и элементы гильбертова пространства H непрерывны на X. Тогда произведение (7) сходится равномерно на компактных подмножествах множества X.*

Доказательство. 1. Существует точка a, $a \in X$, такая, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \rho(z_n, a) \ > 0.$$

Пусть $b \in X$, $b \neq a$, $b \neq z_n$, $n \geqslant 1$. Обозначим

$$S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho^2(z_n, a)), \quad S(a) < +\infty.$$

Из определения расстояния (1) имеем

$$S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|k(z_n, a)|^2}{k(a, a) k(z_n, z_n)}.$$

Для оценки величины $S(b)$ воспользуемся неравенством (5) при $z = z_n$, получим

$$\begin{aligned} \frac{|k(z_n, b)|^2}{k(b, b) k(z_n, z_n)} &\leqslant (1 + \rho(a, b))^2 \frac{|k(z_n, a)|^2}{k(a, a) k(z_n, z_n)} \frac{k(b, b) k(a, a)}{|k(b, a)|^2} \\ &= (1 + \rho(a, b))^2 \frac{|k(z_n, a)|^2}{k(a, a) k(z_n, z_n)} \frac{1}{1 - \rho^2(a, b)}. \end{aligned}$$

Просуммируем эти неравенства по n, получим

$$S(b) \leqslant \frac{1 + \rho(a, b)}{1 - \rho(a, b)} S(a).$$

2. Пусть $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \rho(z_n, a) > 0$, K – метрический компакт пространства (X, ρ), w – фиксированная точка, $w \in K$. Из (4), (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} |1 - \rho(z_n, a) \Psi(w, a, z_n)| &= \left| \frac{k(z_n, a) k(w, z_n)}{k(z_n, z_n) k(w, a)} \right| \\ &= \frac{|k(z_n, a)|^2}{k(z_n, z_n) k(a, a)} \cdot \frac{|k(w, z_n)|}{|k(z_n, a)|} \cdot \frac{k(a, a)}{|k(w, a)|} \\ &\leqslant (1 - \rho^2(z_n, a))(1 + \rho(a, w)) \frac{|k(w, w)|}{|k(w, a)|} \\ &\cdot \frac{k(a, a)}{|k(w, a)|} = \frac{1 - \rho^2(z_n, a)}{1 - \rho(a, w)}. \end{aligned}$$

Просуммируем эти неравенства по n, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1-\rho(z_n,a)\Psi(w,a,z_n)| \leqslant \frac{1}{1-\rho(a,w)} S(a). \tag{8}$$

Так как $\rho(a,w)<1$, $\rho(a,w)$ – непрерывная функция, то

$$\min_{w\in K}(1-\rho(a,w)) = m_k > 0.$$

Из неравенства (8) и сходимости произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\rho(z_n,a)$ следует равномерная сходимость произведения (7) на K. Отметим, что $\Psi(a)>0$.

3. Рассмотрим последовательность частичных произведений

$$\Psi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \Psi(z,a,z_k).$$

Очевидно, что $\|\Psi_n\| \leqslant 1$. Если H сепарабельно, то существует подпоследовательность $\{\Psi_{n_j}\}$, которая сходится в слабой операторной топологии к мультипликатору φ, то есть

$$\lim_{j\to\infty}\langle \Psi_{n_j} f, g\rangle = \langle \varphi f, g\rangle, \quad f,g\in H.$$

Взяв в качестве g воспроизводящее ядро, получим $\lim\limits_{j\to\infty}\Psi_{n_j}(w)=\varphi(w)$ при всех w, $w\in X$. С другой стороны, по доказанному в пункте 2, $\lim\limits_{j\to\infty}\Psi_{n_j}(w) = \Psi(w)$ Следовательно, $\Psi=\varphi$ и произведение (7) сходится в слабой операторной топологии. Если H несепарабельно, то последовательность $\{\Psi_n\}$ имеет предельную точку φ в слабой* операторной топологии. Рассуждая аналогично, получим, что $\Psi=\varphi$ и произведение (7) сходится в слабой* операторной топологии.

4. Пусть $K\subset X$, K – топологический компакт. Проверим, что $\sup\limits_{w\in K}\|k(z,w)\|<+\infty$. Обозначим через G_w функционал значения в точке w, то есть $G_w(f)=f(w)$, $f\in H$; $G_w\in H^*$. Тогда

$$\sup_{w\in K}|G_w(f)| = \sup_{w\in K}|f(w)| < +\infty,$$

так как функция f непрерывна. Из принципа равномерной ограниченности Банаха–Штейнгауза заключаем, что $\sup\limits_{w\in K}\|G_w\| = M_k < +\infty$. Очевидно, что $\|k(z,w)\|_H = \|G_w\|_{H^*}$. Кроме того,

$$\inf_{w\in K}|k(w,a)| = m_k > 0$$

из-за непрерывности функции $k(w,a)$. Следовательно, при $w \in K$ имеем

$$\frac{1}{1-\rho(a,w)} = \frac{1+\rho(a,w)}{1-\rho^2(a,w)} = (1+\rho(a,w))\frac{k(w,w)k(a,a)}{|k(w,a)|^2} \leqslant 2\frac{M_k^2}{m_k^2}k(a,a).$$

Из (8) при $w \in K$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1-\rho(z_n,a)\Psi(w,a,z_n)| \leqslant 2\frac{M_k^2}{m_k^2}k(a,a)S(a).$$

Следовательно, произведение (7) сходится равномерно на K. $\square$

Отметим некоторые свойства экстремальных функций (4).

Теорема 2. *Пусть гильбертово пространство H удовлетворяет условию Шварца–Пика для двух точек $(SP)_2$.*

1. *Если a, b – различные точки множества X, то*

$$\Psi(z,b,a) = \frac{\rho(a,b)-\Psi(z,a,b)}{1-\rho(a,b)\Psi(z,a,b)}, \quad z \in X. \tag{9}$$

2. *Если a, b, c – различные точки множества X, то*

$$\rho(a,b)\Psi(c,a,b) = \rho(c,b)\overline{\Psi(a,c,b)}. \tag{10}$$

3. *Если a, b, c – точки множества X, то*

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{k(b,a)k(c,b)}{k(c,a)}\right) \geqslant \frac{|k(b,a)|^2}{k(a,a)} + \frac{|k(b,a)|^2}{k(b,b)}\frac{|k(c,b)|^2}{|k(c,a)|^2}. \tag{11}$$

Доказательство. 1. Из (4) имеем

$$\Psi(z,b,a) = \frac{1}{\rho(a,b)}\left(1-\frac{k(a,b)}{k(a,a)}\frac{k(z,a)}{k(z,b)}\right). \tag{12}$$

Подставив (6) в (12), получим

$$\Psi(z,b,a) = \frac{1}{\rho(a,b)}\left(1-\frac{k(a,b)}{k(a,a)}\frac{k(b,a)}{k(b,b)}\frac{1}{1-\rho(a,b)\Psi(z,a,b)}\right)$$
$$= \frac{1}{\rho(a,b)}\left(1-(1-\rho^2(a,b))\frac{1}{1-\rho(a,b)\Psi(z,a,b)}\right) = \frac{\rho(a,b)-\Psi(z,a,b)}{1-\rho(a,b)\Psi(z,a,b)}.$$

2. Из (4) имеем

$$\rho(a,b)\Psi(c,a,b) = 1 - \frac{k(b,a)}{k(b,b)}\frac{k(c,b)}{k(c,a)},$$
$$\rho(c,b)\Psi(a,c,b) = 1 - \frac{k(b,c)}{k(b,b)}\frac{k(a,b)}{k(a,c)}.$$

Учитывая, что $k(b,a) = \overline{k(a,b)}$, получаем (10).

3. Из формулы (4) имеем

$$1 \geqslant |\Psi(c,a,b)|^2 = \frac{1}{\rho^2(a,b)}\left(1 - \frac{k(b,a)}{k(b,b)}\frac{k(c,b)}{k(c,a)}\right)\left(1 - \frac{\overline{k(b,a)}}{k(b,b)}\frac{\overline{k(c,b)}}{\overline{k(c,a)}}\right).$$

Следовательно,

$$\rho^2(a,b) \geqslant 1 + \frac{|k(b,a)|^2|k(c,b)|^2}{k(b,b)^2|k(c,a)|^2} - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{k(b,a)}{k(b,b)}\frac{k(c,b)}{k(c,a)}\right).$$

Поставив значение $\rho^2(a,b)$ из формулы (1), получим неравенство (11). $\square$

3. Заключительные замечания

Приведем некоторые результаты, полученные в [2,3,5] в предположении, что гильбертово пространство удовлетворяет условию Неванлинны–Пика, доказательства которых фактически использовали лишь условие Шварца–Пика. Нам потребуется ряд определений.

Определение 3. *Пусть Z – подмножество множества X. Положим $H(Z) = \{f \in H : f(z) = 0, z \in Z\}$, $V(Z)$ – замыкание линейной оболочки ядер $\{k(w,z)\}_{z\in Z}$. При этом H разлагается в ортогональную сумму $H = H(Z) \oplus V(Z)$.*

Пусть $a \in X \setminus Z$. Определим

$$d(a,Z) = \mathrm{dist}\left(\frac{k(z,a)}{\|k(z,a)\|}, V(Z)\right), \tag{13}$$

где dist *– расстояние в гильбертовом пространстве H.*

Заметим, что если Z состоит из одной точки b, то $d(a,b) = \rho(a,b)$. Если f_a – решение экстремальной задачи

$$\mathrm{Re}\, f_a(a) = \sup\{\mathrm{Re}\, g(a) : g \in H(Z),\ \|g\| \leqslant 1\}, \tag{14}$$

то $f_a(a) = d(a,Z)\cdot\|k(z,a)\|$.

Следствие 1. *Пусть гильбертово пространство H удовлетворяет условию Шварца–Пика для двух точек $(SP)_2$, $Z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, удовлетворяющая условию Бляшке для H,*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \rho(z_n, a) = \delta_a, \quad \delta_a > 0.$$

Тогда $d(a, Z) \geqslant \delta_a$.

Доказательство. Пусть $\Psi(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \Psi(z, a, z_n)$ – мультипликатор, построенный в теореме 1. Определим функцию

$$g(z) = \Psi(z) k(z, a) / \|k(z, a)\|.$$

Тогда $\|g\| \leqslant 1$, $g \in H(Z)$, $g(a) = \delta_a \|k(z, a)\|$. Если f_a – решение задачи (14), то $f_a(a) \geqslant g(a)$, то есть $\delta_a \leqslant d(a, Z)$. □

Определение 4. *Пусть $Z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность различных точек множества X. Обозначим $Z_j = Z \setminus z_j$, $d_j = d(z_j, Z_j)$. Семейство воспроизводящих ядер $\{k(z, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ называется равномерно минимальным, если $\inf\limits_j d_j > 0$ (для краткости будем писать $Z \in (UM)$).*

Определение 5. *Последовательность точек $Z = \{z_n\}_{n \geqslant 1}$ называется разделенной, если $\inf\limits_{1 \leqslant j < k} \rho(z_j, z_k) > 0$ (для краткости будем писать $Z \in (S)$).*

Определение 6. *Последовательность точек $Z = \{z_k\}_{k \geqslant 1}$ называется равномерно разделенной, если*

$$\inf_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \rho(z_j, z_n) > 0$$

(для краткости будем писать $Z \in (US)$).

Следствие 2. *Пусть гильбертово пространство H удовлетворяет условию Шварца–Пика для двух точек $(SP)_2$, последовательность точек $Z = \{z_n\}_{n \geqslant 1}$ является равномерно разделенной ($Z \in (US)$). Тогда последовательность воспроизводящих ядер $\{k(z, z_n)\}_{n \geqslant 1}$ является равномерно минимальной ($Z \in (UM)$).*

Доказательство. Обозначим $\delta_n = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty} \rho(z_j, z_n)$ По следствию 1 имеем $d_n \geqslant \delta_n$. Следовательно, $\inf\limits_{n\geqslant 1} d_n \geqslant \inf\limits_{n\geqslant 1} \delta_n > 0$. □

Разумеется, условие Бляшке для H не является необходимым для того, чтобы последовательность Z была множеством нулей нетривиальной функции из пространства H. Однако условие равномерной разделенности естественно возникает в интерполяционных задачах. Отметим, что если Z – равномерно разделенная последовательность и пространство H удовлетворяет условию $(SP)_2$, то для системы нормированных воспроизводящих ядер $\left\{\frac{k(z,z_n)}{\|k(z,z_n)\|}\right\}_{n\geqslant 1}$ можно написать биортогональную. Положим

$$\Psi_n(z) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty} \Psi(z, z_n, z_j), \quad G_n(z) = \frac{\Psi_n(z)}{\Psi_n(z_n)} \frac{k(z,z_n)}{\|k(z,z_n)\|}.$$

Тогда $\{G_n\}_{n\geqslant 1}$ биортогональна к $\left\{\frac{k(z,z_n)}{\|k(z,z_n)\|}\right\}_{n\geqslant 1}$. К сожалению, в отличии от классического случая пространств Харди, функции G_n, вообще говоря, не попадают в $V(Z)$.

В задачах интерполяции важную роль играют меры Карлесона.

Определение 7. *Неотрицательная мера μ на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X называется мерой Карлесона для H, если $H \subset L^2(\mu)$, что означает существование такой константы $M, M > 0$, что*

$$\|f\|_{L^2(\mu)} \leqslant M \|f\|_H, \quad f \in H. \tag{15}$$

Последовательнсть различных точек $Z = \{z_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условию Карлесона (для краткости будем писать $Z \in (C)$), если дискретная мера $\mu_Z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_{z_n} \cdot \frac{1}{k(z_n,z_n)}$ является мерой Карлесона, где δ_{z_n} – единичная нагрузка в точке z_n. Говорят, что последовательность точек $Z = \{z_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условию Карлесона для воспроизводящих ядер (для краткости будем писать $Z \in (RC)$), если неравенство (15) справедливо для меры $\mu = \mu_Z$ и только для функций вида $f(z) = k(z, z_n)$, $n \geqslant 1$.

Из условия (RC) следует, что последовательность Z представляется в виде конечного объединения раздельных последовательностей [2, 3, 5].

Следствие 3. 1. *Если последовательность Z равномерно разделенная, то она удовлетворяет условию (RC).*

2. *Если последовательность Z разделенная и удовлетворяет условию (RC), то Z – равномерно разделенная.*

Доказательство. Условие (RC) означает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|k(z_n,z_j)|^2}{k(z_n,z_n)k(z_j,z_j)}\leqslant M^2,\quad n\in\mathbb{N},$$

то есть

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-\rho^2(z_n,z_j))\leqslant M^2,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Подставим $x=\rho^2(z_n,z_j)$ в неравенство $1-x\leqslant\log\frac{1}{x}\leqslant\frac{1-x}{x}$ и просуммируем по j. Получим

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}(1-\rho^2(z_n,z_j))\leqslant 2\log\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\rho(z_n,z_j)}\leqslant\frac{1}{\gamma^2}\sum_{j=1}^{\infty}(1-\rho^2(z_n,z_j)),\qquad(16)$$

где $\gamma=\inf\limits_{1\leqslant 3k<j}\rho(z_k,z_j)$, $\gamma>0$ для разделенной последовательности. Неравенства (16) дают утверждения 1 и 2 следствия. □

Определение 8. *Последовательность различных точек $Z=\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ называется универсальной интерполяционной для пространства H (для краткости будем писать $Z\in(UI)$), если*

$$\left\{\left\{\frac{f(z_n)}{\|k(z,z_n)\|}\right\}_{n=1}^{\infty},\ f\in H\right\}=l^2.$$

Отметим, что универсальная интерполяционная последовательность Z для H является равномерно разделенной. Действительно, включение

$$\left\{\left\{\frac{f(z_n)}{\|k(z,z_n)\|}\right\}_{n\geqslant 1},\ f\in H\right\}\subset l^2$$

означает, что мера μ_z является мерой Карлесона, то есть выполнено условие (C) и тем более (RC). Включение

$$l^2\subset\left\{\left\{\frac{f(z_n)}{\|k(z,z_n)\|}\right\}_{n\geqslant 1},\ f\in H\right\}$$

обеспечивает с помощью стандартных рассуждений равномерную миминмальность и тем более раздельность. Из следствия 3 вытекает, что последовательность Z – равномерно разделенная.

Рассмотрим обобщение условия Шварца–Пика на n точек. В [5] доказано неравенство: если $Z \subset X$, $z_0 \in X \setminus Z$, φ – мультипликатор такой, что $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\varphi(z) = 0$ при $z \in Z$, то

$$|\varphi(z_0)| \leqslant d(z_0, Z). \tag{17}$$

Если $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$, то как и при доказательстве леммы 1, из условия $\|(M_\varphi)^*\| \leqslant 1$ вытекает $\det(c_{ij}) \geqslant 0$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, где $c_{00} = (1-|\varphi(z_0)|^2)\times k(z_0, z_0)$, $c_{i,j} = k(z_i, z_j)$ при $(i,j) \neq (0,0)$, а это означает (17).

Определение 9. *Гильбертово пространство H с ядром $k(x,y)$ обладает свойством Шварца–Пика в n точках, $n \geqslant 2$ (для краткости будем писать $H \in (SP)_n$), если для любого набора из n различных точек $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ существует такой мультипликатор φ, что*

$$\|\varphi\| \leqslant 1, \quad \varphi(z_0) = d(z_0, Z), \quad \varphi(z) = 0 \quad \textit{при} \quad z \in Z, \tag{18}$$

где $Z = \{z_k\}_{k=1}^{n-1}$. Если это условие выполняется для любого $n, n \geqslant 2$, то будем говорить, что пространство H обладает свойством Шварца–Пика (для краткости будем писать $H \in (SP)$).

Отметим, что если мультипликатор φ со свойствами (18) существует, то он единственен. Это следует из единственности решения задачи (14) при $a = z_0$, тогда $\|\varphi\| = 1$ и

$$f_{z_0}(z) = \varphi(z)\frac{k(z, z_0)}{\|k(z, z_0)\|}. \tag{19}$$

Если Z – бесконечное множество, $d(z_0, Z) > 0$ и пространство H обладает свойством (SP), то существует единственный мультипликатор φ, удовлетворяющий условию (18). Докажем это.

Для каждого конечного подмножества $F, F \subset Z$, существует мультипликатор φ_F, удовлетворяющий условиям (18) (с заменой Z на F). Если H – сепарабельное пространство, то из семейства $\{\varphi_F\}_{F\subset Z}$ можно выбрать последовательность φ_n, которая сходится в слабой операторной топологии к мультипликатору φ, причем φ удовлетворяет условиям (18). Если же H несепарабельное, то у семейства $\{\varphi_F\}_{F\subset Z}$ есть предельная точка φ в слабой* операторной топологии, φ удовлетворяет условиям (18). Единственность следует из формулы (19).

Для множеств нулей функций из пространств H и $M(H)$ при условии Шварца–Пика справедлив такой же результат, как и для пространств со свойством Неванлинны–Пика [2] и с тем же доказательством.

Следствие 4. *Предположим, что пространство H удовлетворяет условию Шварца–Пика (SP). Пусть f – нетривиальная функция из пространства H, $Z = f^{-1}(0)$. Тогда существует семейство мультипликаторов $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ такое, что*

$$Z = \bigcap_{\alpha\in A} \varphi_\alpha^{-1}(0).$$

Доказательство. Пусть $a \in X\setminus Z$. Так как $f(a) \neq 0$, то $\operatorname{dist}(a, Z) > 0$ и по доказанному существует мультипликатор φ_a такой, что $\varphi_a(z) = 0$ при $z \in Z$, $\varphi_a(a) = d(a, Z) > 0$, значит $a \notin \varphi_a^{-1}(0)$. Следовательно,

$$Z = \bigcap_{a\in X\setminus Z} \varphi_a^{-1}(0).$$

$\square$

Последнее замечание касается условия Аглера, которое состоит в следующем. Существует точка $b, b \in X$, такая, что функция

$$F_b(z, w) = 1 - \frac{k(b, w)}{k(b, b)}\frac{k(z, w)}{k(z, b)}$$

положительно полуопределена на $X \times X$. Условие Аглера [2] необходимо и достаточно для того, чтобы гильбертово пространство H функций на X с ядром $k(x, y)$ удовлетворяло полному условию Неванлинны–Пика, что означает разрешимость матричнозначного аналога интерполяционной задачи Неванлинны–Пика. Заметим, что экстремальные функции $\Psi(z, a, b)$ из формулы (4) связаны с функцией F равенством

$$\rho(w, b)\Psi(z, w, b) = F_b(z, w).$$

Литература

1. J. Agler, *Interpolation*, preprint, 1986.
2. J. Agler, J. E. McCarthy, *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics **44**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2002.
3. K. Seip, *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions*, University lecture series **33**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2004.

4. H. S. Shapiro, A. L. Shields, *On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces*, Math. Z. **80** (1962), 217–229.
5. D. E. Marshall, C. Sundberg, *Interpolating sequences for the multipliers of the Dirichlet space*, Preprint 1993. Available at http://www.math.washington.edu/˜ marshall/preprints/preprints.html

Videnskii I. V. On an analog of Blaschke products for Hilbert spaces with Nevanlinna–Pick kernels.

We investigate the convergence of an infinite product of multipliers for a Hilbert space with Nevanlinna-Pick kernel. It is natural to view these products as an analog of Blaschke products in the algebra H^∞.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
198504, Петродворец, Россия
E-mail: ilya.viden@gmail.com

Поступило 9 июля 2014 г.