

В. И. Васюнин

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА
ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
В ПРОСТРАНСТВЕ ВМО

§0. ВВЕДЕНИЕ

Хочу с самого начала предупредить читателя, что эта работа не является независимой самодостаточной статьёй. Это – иллюстрация применения техники, развитой в работе [6]. Я бы назвал данный текст методичкой по практическому освоению метода функции Беллмана в анализе для гипотетического студента, который ознакомился с теоретической частью построения функции Беллмана для экстремальных задач на ВМО, а теперь хочет что-то посчитать своими руками. И данный текст – это такая пошаговая инструкция: делай то-то и получишь то-то. Тут нет никаких теорем и равно отсутствуют доказательства чего-либо, тут – только анонсы того, что должно получиться, если правильно посчитать. А посчитать должен уже сам читатель, хотя все формулы, являющиеся компонентами предполагаемого счёта, приведены. Разнообразные утверждения, прямо не связанные с методом функции Беллмана (например, что такое-то уравнение имеет единственное решение, что такая-то функция убывает или возрастает), вообще не обсуждаются, а оставлены целиком читателю: если он хочет – может проверить, нет – пусть принимает на веру. Иногда такие утверждения проверяются совсем просто, иногда – очень сложно и требуют значительного количества выкладок, которые всё равно было бы немыслимо привести, если и без них статья достигла такого объёма.

Если пролистывать данную статью, то она может показаться абсолютно не структурированной – не за что глазу зацепиться, никаких выделенных лемм, теорем, утверждений, непонятно, что основное, а что второстепенное... Тем не менее статья чётко структурирована. В статье разбирается экстремальная задача, определяемая некой чётной

Ключевые слова: функция Беллмана, уравнение Монжа–Ампера, минимальные локально выпуклые поверхности.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00748.

функцией, которая состоит из куска синусоиды, гладко продолженной после некоторой точки параболой. Изложение идёт от простого к сложному: сперва разбирается лёгкий случай, когда отрезок синусоиды совсем небольшой, потом рассматриваются случаи всё более длинных отрезков синусоиды, и всё заканчивается двумя параграфами, в которых рассматривается общий случай синусоиды произвольной длины. В каждом следующем параграфе синусоида на полпериода длиннее, чем в предыдущем. Параграф в свою очередь разбит на подпараграфы так, что в каждом подпараграфе к эволюции решения добавляются новые детали в сравнении с предыдущим подпараграфом. Априори невозможно объявить, насколько надо удлинить синусоиду, чтобы изменился характер эволюции, поэтому точки, которые отделяют один подпараграф от другого, находятся в процессе исследования эволюции.

Поскольку здесь невозможно объяснить всё содержание статьи [6], предполагается, что читатель знаком если не с ней, то с первой статьёй [2] (см. также препринты [3] и [4] или их английскую версию [5]) или, по крайней мере, с кратким описанием этих результатов в статье [1]. Однако не все объекты, используемые в настоящей статье, были введены в работе [2] (такие как воланчик, мультилунка и др.), они будут тут кратко описаны, но чтобы ознакомиться более детально, надо обращаться к работе [6].

Задача, которая будет рассматриваться, заключается в следующем: для заданной функции f мы будем искать супремум функционала

$$\langle f(\varphi) \rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|I|} \int_I f(\varphi(s)) ds.$$

Супремум берётся по шару радиуса ε в пространстве $\text{BMO}(I)$, то есть по множеству функций $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\|\varphi\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{J \subset I} \{ \langle \varphi^2 \rangle_J - \langle \varphi \rangle_J^2 \} \leq \varepsilon^2.$$

Более того, мы ограничимся тестовыми функциями φ , чьи средние $\langle \varphi \rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} x_1$ и $\langle \varphi^2 \rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} x_2$ фиксированы. Таким образом мы будем искать следующую функцию:

$$B_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \langle f \circ \varphi \rangle_I : \langle \varphi \rangle_I = x_1, \langle \varphi^2 \rangle_I = x_2, \|\varphi\| \leq \varepsilon \},$$

заданную в параболической полосе

$$\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2) : x^2 - x_1^2 \leq \varepsilon^2\}.$$

Эта функция является минимальной локально вогнутой функцией в полосе Ω_ε среди тех, что удовлетворяют граничному условию $\mathbf{B}(x_1, x_1^2) = f(x_1)$, то есть эта функция является решением уравнения Монжа–Ампера $\mathbf{B}_{x_1 x_1} \mathbf{B}_{x_2 x_2} - \mathbf{B}_{x_1 x_2}^2 = 0$ с заданным граничным условием. Хорошо известно, что её график является развертывающейся поверхностью. Область определения такой функции может быть замечена отрезками прямых, вдоль которых функция линейна. Эти отрезки называются экстремальными линиями или экстремалами. Существует два рода экстремалей – хорды и касательные. В то время как оба конца хорды лежат на нижней границе области Ω_ε , у касательных один конец лежит на нижней границе, а второй – на верхней, причём эта прямая является касательной к верхней границе. Если через какую-то точку можно провести две разных экстремали, то наша функция является линейной в некоторой окрестности данной точки. Разбиение области Ω_ε в объединение областей, где экстремалами являются хорды (хордальные области), где экстремалами являются касательные (касательные области) и областей линейности называют фолиацией. Если фолиация известна, то мы легко можем выписать значение нашей функции Беллмана \mathbf{B} в каждой точке x в терминах граничной функции f . Конкретные формулы, описывающие то, как это сделать, читатель может найти в работе [2] или [6]. В настоящей статье мы ограничимся описанием фолиаций (в основном их зависимостью от параметра ε) для одного конкретного семейства граничных функций. Это семейство выбрано таким образом, чтобы продемонстрировать возможное разнообразие фолиаций и их эволюций при росте параметра ε .

Прежде чем начать описание граничной функции, следует договориться о терминологии. Как следует из самих названий, хордальные области заметаются хордами, а касательные – касательными экстремалами. Выпуклая область, ограниченная хордой и стягиваемой ею частью нижней границы, называется лункой. Лунка может быть простой (если она целиком заметается хордами) или составной (если она содержит области линейности). Хорды простой лунки стягиваются к точке, которая называется основанием или корнем лунки. Касательные области могут быть левыми (если экстремали идут влево от точки касания) или правыми (в противоположном случае). Области линейности мы классифицируем по количеству точек нижней границы, им принадлежащих. Если у области линейности только одна точка на

нижней границе, она называется уголком. Граница уголка состоит из двух разнонаправленных касательных, выходящих из этой единственной точки на нижней границе (вершины уголка), и соответствующей дуги верхней границы. Таким образом, уголок однозначно определяется своей вершиной. Если у области линейности есть ровно две точки на нижней границе, то хорда, их соединяющая, является частью границы этой области. Две касательных из концов этой хорды также должны быть частью её границы. Если они имеют одинаковое направление, то область линейности называется троллейбусом, в случае разнонаправленных касательных она называется воланчиком. Если область линейности имеет три или более точек на нижней границе, то это либо мультиволанчик, либо мультитроллейбус, либо мультилунка. Мультиволанчик ограничен правой касательной слева и левой – справа. Касательные части границы мультитроллейбуса односторонние. Если область ограничена правой касательной справа и левой – слева, то это – мультилунка, открытая мультилункой. Если область линейности со всех сторон ограничена только хордами, то она тоже называется мультилункой, замкнутой мультилункой. Отметим, что мультифигуры могут содержать бесконечное множество точек на нижней границе, например, целую дугу, если граничная функция является квадратичным полиномом на этой дуге.

Несколько слов следует сказать о способе определения структуры фолиации, которая соответствует заданной граничной функции f . Прежде всего, основанием любой лунки является корень с третьей производной f''' , причём такой, что $f'''(u) > 0$ в некоторой левой окрестности точки c и $f'''(u) < 0$ в некоторой правой окрестности. Чтобы определить концы $A = (a, a^2)$ и $B = (b, b^2)$ любой хорды, нам нужно решить так называемое уравнение лунки:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(b) + f'(a)}{2} \quad (1)$$

и проверить, что в концах хорды дифференциалы

$$D_L \stackrel{\text{def}}{=} f''(a) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} \quad \text{и} \quad D_R \stackrel{\text{def}}{=} f''(b) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} \quad (2)$$

отрицательны. Если ε достаточно мало, то верхняя хорда любой лунки касается верхней границы, то есть её горизонтальный размер – в точности 2ε . Справа от такой лунки мы рисуем подобласть правых

касательных, а слева – подобласть левых касательных. Теперь между любыми двумя лунками мы должны вставить по уголку, чтобы соединить две области противоположно направленных касательных. Положение вершины $U = (u, u^2)$ уголка определяется так называемым уравнением баланса:

$$F_R(u) + F_L(u) = 0,$$

где F_R – правая сила лунки, находящейся слева, а F_L – левая сила лунки, находящейся справа от искомого уголка. Сила лунки определяется её верхней хордой. А силы любой хорды задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} F_L(u) &= e^{u/\varepsilon} \left[D_L e^{-a/\varepsilon} + \int_u^a f'''(t) e^{-t/\varepsilon} dt \right], \\ F_R(u) &= e^{-u/\varepsilon} \left[D_R e^{b/\varepsilon} + \int_b^u f'''(t) e^{t/\varepsilon} dt \right]. \end{aligned}$$

Левая сила определена слева от хорды, то есть для $u \leq a$, а правая сила – справа, то есть для $u \geq b$. Сила, приходящая из бесконечности ($+\infty$), задаётся выражением

$$F_\infty(u) = e^{u/\varepsilon} \int_u^\infty f'''(t) e^{-t/\varepsilon} dt.$$

Когда параметр ε увеличивается, уголок может столкнуться с растущей лункой и превратиться в троллейбус. После этого момента то же самое уравнение баланса определяет уже не позицию вершины уголка, а положение “задней” границы троллейбуса. Если два уголка одновременно сталкиваются с лункой с двух сторон, то возникает воланчик, и уравнения баланса должно выполняться для обоих концов основания воланчика.

Объяснения и доказательства приведённых выше фактов можно найти в статье [2], а несколько более сложная ситуация с мультифигурами описана в работе [6].

Теперь, после этого предварительного общего описания, начнём формулировать ту конкретную задачу, которой мы будем заниматься.

Задавшись числом α , $\alpha > 0$, рассмотрим следующую чётную C^2 -гладкую граничную функцию

$$f(t) = \begin{cases} -\cos t, & |t| \leq \alpha; \\ \frac{1}{2}(t^2 - \alpha^2) \cos \alpha + (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)(|t| - \alpha) - \cos \alpha, & |t| > \alpha. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f'(t) &= \begin{cases} \sin t, & |t| \leq \alpha; \\ t \cos \alpha + (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \operatorname{sign} t, & |t| > \alpha, \end{cases} \\ f''(t) &= \begin{cases} \cos t, & |t| \leq \alpha; \\ \cos \alpha, & |t| > \alpha, \end{cases} \\ f'''(t) &= \begin{cases} -\sin t, & |t| \leq \alpha; \\ 0, & |t| > \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть N – неотрицательное целое число, заданное следующими неравенствами: $(2N-1)\pi < \alpha \leq (2N+1)\pi$. Тогда для такого граничного условия эволюция начинается с $2N+1$ лунки, между которыми расположены $2N$ уголков. Все уголки всегда начинают своё развитие из точек $v_n = (2n-1)\pi$, $-N < n \leq N$. Основаниями лунок являются точки $c_n = 2n\pi$, $-N \leq n \leq N$, если $\alpha > 2N\pi$. В случае, когда $\alpha \leq 2N\pi$, вместо самой левой и самой правой лунок у нас возникают мультилунки на “толстых” бесконечных корнях $c_{-N} = (-\infty, -\alpha]$ и $c_N = [\alpha, \infty)$. Наша задача симметрична, и по этой причине удобнее нумеровать лунки именно таким образом и рассматривать только то, что происходит на положительной полуоси. Левый конец лунки с корнем в точке c_n будет обозначаться символом a_n , а правый – символом b_n , $\ell_n = b_n - a_n$. Все лунки за исключением, возможно, самой правой (и самой левой) растут симметрично, то есть

$$a_n = 2n\pi - \frac{1}{2}\ell_n, \quad b_n = 2n\pi + \frac{1}{2}\ell_n. \quad (3)$$

Левый и правый дифференциалы такой лунки равны

$$D_L = D_R = \cos \frac{\ell_n}{2} - \frac{2}{\ell_n} \sin \frac{\ell_n}{2}.$$

Левая и правая силы лунки с корнем в точке c_n задаются выражениями

$$\begin{aligned} F_{nL}(u, \ell, \varepsilon) &= -\left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos \frac{\ell}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} - \frac{2}{\ell} \right) \sin \frac{\ell}{2} \right] e^{\frac{\ell+2u-4\pi n}{2\varepsilon}} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} (\varepsilon \cos u + \sin u), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} F_{nR}(u, \ell, \varepsilon) &= \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos \frac{\ell}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} - \frac{2}{\ell} \right) \sin \frac{\ell}{2} \right] e^{\frac{\ell-2u+4\pi n}{2\varepsilon}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} (\varepsilon \cos u - \sin u). \end{aligned} \quad (5)$$

В этих формулах предполагается, что $2n\pi + \frac{1}{2}\ell \leq u \leq \alpha$ и $0 \leq \ell \leq 2\varepsilon$. Более того, предполагается, что лунки симметричны, то есть $b_n \leq \alpha$.

Значение b_N может быть больше, чем α , тогда лунка с основанием в точке $c_N = 2N\pi$ растёт несимметрично, и нужно использовать другие формулы.

В случае, когда $b > \alpha$ и $\ell = 2\varepsilon$, уравнение лунки (1) даёт нам следующее выражение для ε как функции от величины a :

$$\varepsilon = \frac{\cos a + [\frac{1}{2}(\alpha - a)^2 - 1] \cos \alpha - (\alpha - a) \sin \alpha}{(\alpha - a) \cos \alpha + \sin a - \sin \alpha}. \quad (6)$$

Ветви обратной функции $a = a(\varepsilon)$ будут корректно определены на некоторых интервалах между корнями знаменателя

$$(\alpha - a) \cos \alpha + \sin a - \sin \alpha = 0. \quad (7)$$

Эти корни дают нам предельные значения функции a при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Например, первый справа корень будет обозначаться символом $a_N(\infty)$, то есть это – единственное решение уравнения (7) из интервала $a \in ((2N - \frac{3}{2})\pi, 2N\pi)$. И у нас получается корректно определённая функция $a_N(\varepsilon)$ на интервале $[\alpha - 2N\pi, \infty)$, значения которой пробегают интервал $(a_N(\infty), 4N\pi - \alpha]$.

Мы видим, что функция $\varepsilon(a)$ является 2π -периодической в следующем смысле: если сделать сдвиг $N \mapsto N + 1$, $\alpha \mapsto \alpha + 2\pi$, $a \mapsto a + 2\pi$, то значение функции ε останется неизменным.

Есть простая геометрическая интерпретация корней уравнения (7): это точки, где прямая линия, являющаяся частью графика функции $f'(t)$ при $t > \alpha$, пересекает график той части, где $f'(t) = \sin t$. Это особенно ясно, если уравнение (7) переписать в следующем виде:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha - \sin a}{\alpha - a}. \quad (8)$$

Рисунок 1 иллюстрирует это объяснение для случая $N = 1$. Значение $a_N(\infty)$ – это предел левого конца лунки с корнем в точке $c_N = 2N\pi$, когда её правый конец b_N уходит на бесконечность при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Заметим, что при $N > 1$ знаменатель в выражении (6) может иметь больше одного корня, и нам действительно потребуется функция $a(\varepsilon)$ со значениями в других интервалах, а не только из промежутка $(a_N(\infty), 4\pi N - \alpha]$. Однако отложим их корректное описание до того момента, когда мы будем их использовать, а сейчас только выпишем формулу для левой силы от несимметричной хорды, заканчивающейся

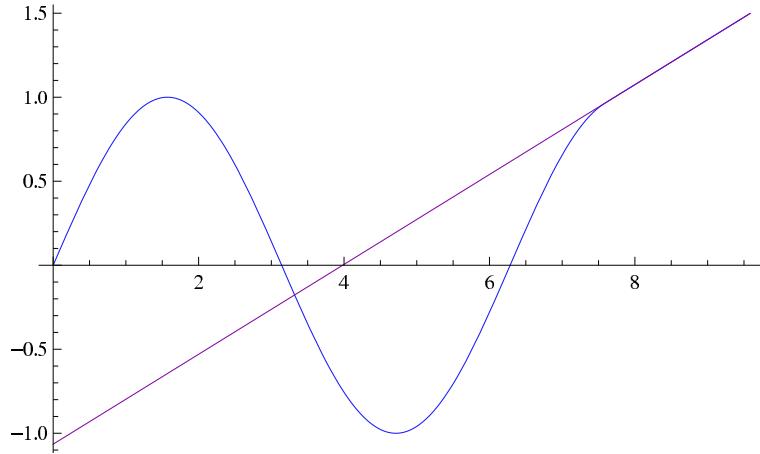


Рис. 1. График функции $f'(t)$ вместе с продолжением его линейной части.

в точке a :

$$\begin{aligned} F_{La}(u, \ell, \varepsilon) = & \left[\frac{1}{1 + \varepsilon^2} (\varepsilon \sin a - \cos a) + \cos \alpha \right. \\ & - \frac{1}{\ell} ((\alpha - a) \cos \alpha + \sin a - \sin a) \Big] e^{\frac{u-a}{\varepsilon}} \\ & - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} (\varepsilon \cos u + \sin u) \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, нам понадобится выражение для силы, идущей из бесконечности. При $\alpha \in ((2N-1)\pi, 2N\pi]$ у нас на бесконечности толстый корень: $c_N = [\alpha, +\infty)$. Сила из $+\infty$ (т.е. левая сила от мультилунки на этом толстом корне) задаётся следующей формулой:

$$F_\infty(u, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \left[(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} - (\sin u + \varepsilon \cos u) \right] \quad (10)$$

для $0 \leq u \leq \alpha$. Ясно, что $F_\infty(u, \varepsilon) = 0$ для $u \geq \alpha$.

Мы собрали все формулы для сил, которые нужны для решения уравнений баланса. Наша цель — проследить эволюцию фолиации, то есть её зависимость от ε , и кроме того понять, как эта эволюция зависит от параметра α . Как уже было сказано, в силу симметрии мы будем в основном смотреть только на правую половину картинки.

Прежде чем перейти к рассмотрению эволюции, введём несколько серий параметров, смысл которых прояснится позднее. Начнём с числа α_n , которое определяется как n -й положительный корень уравнения

$$\tan \alpha = \alpha, \quad (11)$$

то есть $\alpha_n \in (n\pi, (n+1)\pi)$, и положим $\alpha_{n,m} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_n + 2m\pi$.

Ещё четыре семейства параметров зададим только для нечётных значений индекса n . Единственное решение α уравнения

$$\pi^2 \cos \alpha - \pi \sin \alpha - e^{n-\frac{\alpha}{\pi}} = 0, \quad (12)$$

попадающее в промежуток $((n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi))$, будет обозначаться символом β_n . Из определения ясно, что $\beta_n = \beta_1 + (n-1)\pi$.

Семейство γ_n – это единственное решения α уравнения

$$n^2 \pi^2 \cos \alpha - n\pi \sin \alpha - e^{1-\frac{\alpha}{n\pi}} = 0 \quad (13)$$

из промежутка $(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$.

Семейство λ_n – это единственное решения α уравнения

$$n^2 \pi^2 \cos \alpha + n\pi \sin \alpha - e^{\frac{\alpha}{n\pi}-1} = 0 \quad (14)$$

из промежутка $((n+\frac{1}{2})\pi, (n+1)\pi)$.

Семейство μ_n – это единственное решения α уравнения

$$\pi^2 \cos \alpha + \pi \sin \alpha - e^{\frac{\alpha}{\pi}-n} = 0. \quad (15)$$

из промежутка $((n+\frac{1}{2})\pi, (n+1)\pi)$, то есть $\mu_n = \mu_1 + (n-1)\pi$.

§1. $0 < \alpha \leq \pi$

В этом простейшем случае ситуация тривиальна: у нас лишь одна симметричная лунка с корнем в нуле, которая растёт до бесконечности, см. Рис. 2. Влево от лунки у нас бесконечная область левых касательных, а справа – симметричная область правых касательных.

В некоторых более сложных ситуациях будет невозможно изобразить картинку с фолиацией, и тогда мы ограничимся графиком фолиации. Прежде чем объяснить, какой график соответствует заданной фолиации, рассмотрим график, отвечающий фолиации, изображённой на Рис. 2. Он представлен на Рис. 3.

Здесь вы видите четыре вершины: две из них, левая и правая, отвечают $\pm\infty$, вершина посередине между ними соответствует “длинной хорде” (это хорда, касательная к верхней границе, её горизонтальная длина всегда равна 2ε), и, наконец, четвёртая вершина отвечает

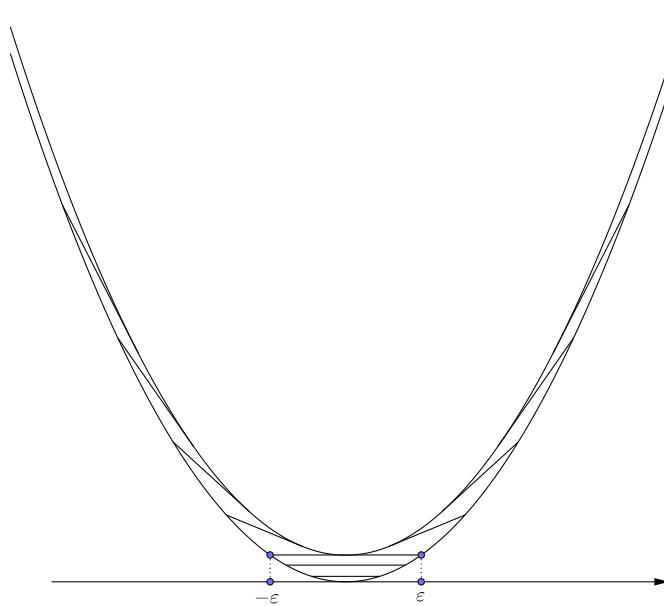
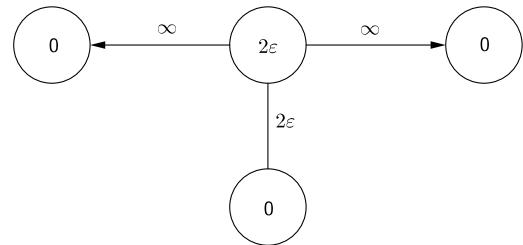
Рис. 2. Фолиация области при любых ε .

Рис. 3. Граф фолиации, изображённой на Рис. 2.

основанию лунки. Горизонтальные рёбра соответствуют областям касательных. Для области правых касательных мы рисуем ребро, направленное вправо, и, соответственно, влево направлено ребро, отвечающее области левых касательных. Для области хорд мы рисуем

вертикальное ребро, оставляя его неориентированным. Однако в случае множества хордальных областей, расположенных одна под другой, можно и вертикальные рёбра снабдить ориентацией сверху вниз, чтобы подчеркнуть, что нижняя хордальная область подчинена верхней. Разумеется, граф не изменится, если мы повернём его или поменяем верх и низ на рисунке, поэтому такое расположение выбрано просто для удобства интерпретации, чтобы по графу было легче восстановить картинку с фолиацией.

Рёбра всегда будут соответствовать либо касательным, либо хордальным областям, а вершины могут быть не только уже описанных типов. Как раз встретившиеся нам типы вершин являются вырожденными случаями, а вообще говоря, вершины графа будут порождаться областями линейности (уголками, троллейбусами, воланчиками и любыми мультифигурами). Примыкающие к нелинейным областям (то есть области хорд или касательных) соответствуют рёбрам, соединяющим данную вершину с другими. Все элементы графа снабжены числом, описывающим их “горизонтальный размер”. Для области хорд это разность длин горизонтальных проекций верхней и нижней хорд. В частности для лунки, чья нижняя хорда имеет нулевую длину, это разность первых координат концов верхней хорды. Для области касательных мы берём разность первых координат концов самой правой и самой левой касательных из данной области. Любая область линейности снабжается числом, которое равно горизонтальному расстоянию между самой правой и самой левой точками нижней границы, принадлежащими этой области линейности.

Более детальное описание и формальное определение соответствия между фолиациями и графиками читатель сможет найти в работе [6].

§2. $\pi < \alpha \leqslant 2\pi$

Теперь кроме корня $c_0 = 0$ у нас есть два толстых корня на $\pm\infty$: $c_{-1} = (-\infty, -\alpha]$ и $c_1 = [\alpha, +\infty)$. Между этими тремя корнями в точках $\pm\pi$ возникают два уголка.

2.1. $\pi < \alpha < \alpha_1$. Если значение параметра α чуть-чуть больше π , то уголки, появляющиеся в точках π , быстро убегают на бесконечность. Это означает, что в некоторый момент (обозначим это значение параметра ε символом ε_1) уколок соприкасается с мультилункой на толстом корне c_1 в точке α . Фолиация при $\varepsilon < \varepsilon_1$ изображена на Рис. 4.

Соответствующий граф приведён на Рис. 5. В момент $\varepsilon = \varepsilon_1$ уго-

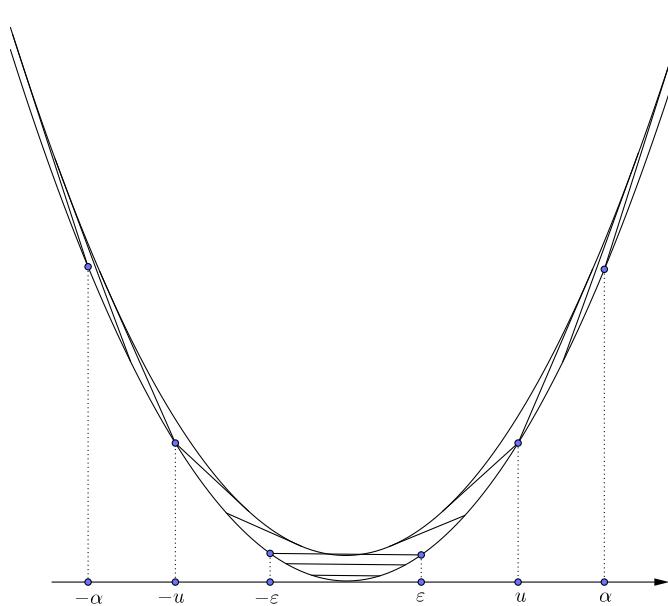


Рис. 4. Фолиация области при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$.

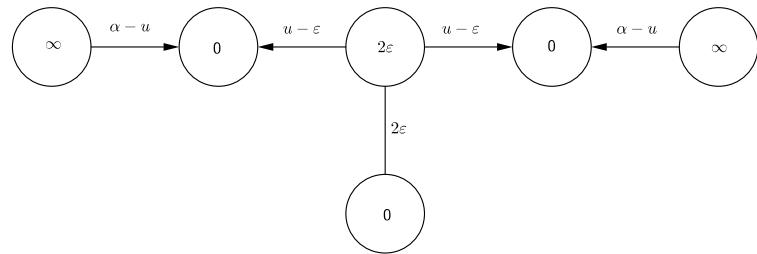


Рис. 5. Граф фолиации, изображённой на Рис. 4.

лок, объединяясь с мультилункой на толстом корне c_1 , образует мультитроллейбус, который в тот же момент исчезает, и справа от центральной лунки у нас остаётся лишь область, заметаемая правыми касательными (левыми слева), ровно так, как это было при $\alpha < \pi$. Итак, при $\varepsilon > \varepsilon_1$ у нас фолиация такая, как изображена на Рис. 2 (соответствующий граф представлен на Рис. 3).

Момент $\varepsilon = \varepsilon_1$ является критической точкой эволюции. В этот момент происходит перестройка или модификация фолиации. Она может быть проиллюстрирована с помощью “равенства” *уголок + мультилунка = мультитроллейбус = область касательных*. Соответствующее “равенство” для графов, показанное на Рис. 6, описывает три возможных представления одной и той же фолиации, где общая область линейности (мультитроллейбус на толстом корне) разбита либо в объединение уголка и мультилунки (с касательной областью нулевой длины между ними), либо в объединение касательных экстремалей (область касательных).

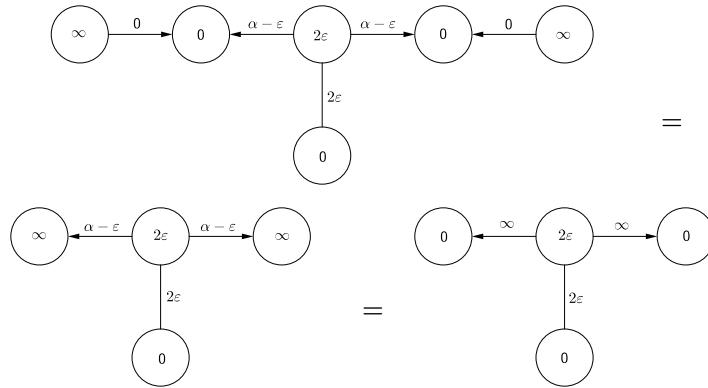


Рис. 6. “Равенство” *уголок+мультилунка=мульти-троллейбус=область касательных*.

Чтобы описать поведение уголка при $\varepsilon < \varepsilon_1$ более подробно, нам нужно решить уравнение баланса

$$F_{0R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0,$$

решение которого $u = u(\varepsilon, \alpha)$ задаёт положение вершины угла. Используя выражения (10) и (5), мы получаем уравнение

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{u}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \sin u = 0. \quad (16)$$

Непрерывная ветвь корня этого уравнения $u(\varepsilon)$, начинающаяся в точке $u(0) = \pi$, монотонно возрастает, пока не достигнет значения $u = \alpha$. На Рис. 7 показан график этой функции при $\alpha = 4.4$.

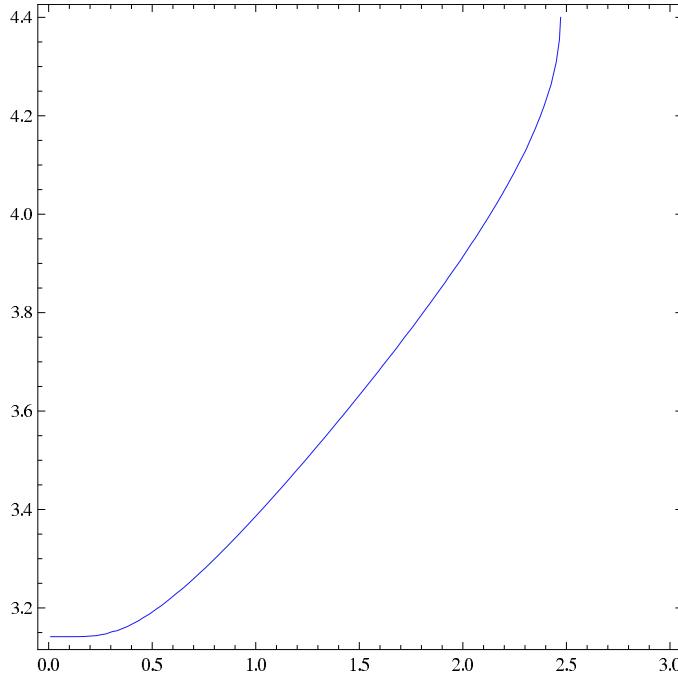


Рис. 7. Первая координата вершины угла как функция параметра ε для $\alpha = 4.4$.

Значение ε , при котором $u = \alpha$, является возрастающей функцией параметра α . Мы можем найти её, подставляя $u = \alpha$ в уравнение (16). Это даёт нам следующее соотношение между α и ε :

$$\varepsilon^2 \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\varepsilon} \right] + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{\alpha}{\varepsilon}} = 0. \quad (17)$$

Непрерывная ветвь корня этого уравнения, выходящего из точки $(\alpha, \varepsilon) = (\pi, 0)$, как раз и является значением функции $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\alpha)$, а график этой возрастающей функции можно увидеть на Рис. 8. На этом рисунке изображён также и график линейной функции $\varepsilon = \alpha$. Проведём, что они пересекаются в точке (α_1, α_1) . Если в уравнение (17) мы подставим значение $\varepsilon = \alpha$, то получим (11), где нам нужно взять минимально возможное положительное решение, то есть $\alpha_1 \approx 4.49341 \approx \frac{3}{2}\pi - 0.21898$.

Отметим, что в точке $\alpha = \alpha_1$ функция ε_1 имеет бесконечную левую производную, то есть у графика на Рис. 8 вертикальная касательная в точке (α_1, α_1) .

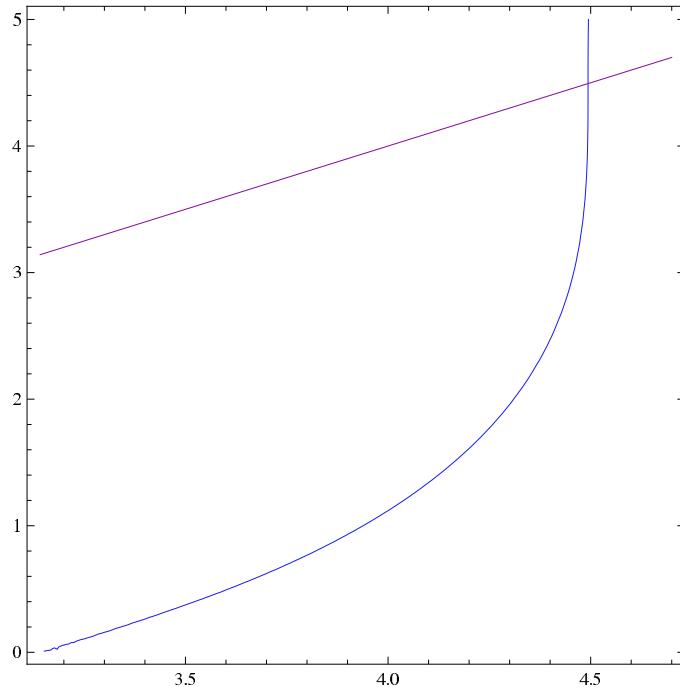


Рис. 8. График функции $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ вместе с прямой $\varepsilon = \alpha$.

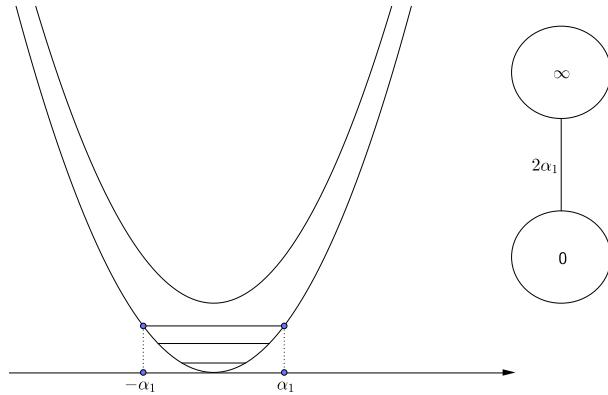
Повторим ещё раз описание того, что происходит в момент $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$. При этом значении ε вершина правого уголка находится в точке α , и вся область линейности правее этой точки превращается из мультилунки в мультитроллейбус и тут же исчезает. То есть, если при $\varepsilon < \varepsilon_1$ у нас от уголка до точки α была область левых касательных, а потом начиналась область линейности (мультилунка), то при $\varepsilon > \varepsilon_1$ больше нет ни уголка, ни этой области линейности: всё пространство от лунки с корнем в нуле до бесконечности заметается правыми касательными, и мы получаем ту же фолиацию, что изображена на Рис. 2.

2.2. $\alpha = \alpha_1$. Несколько отдельных слов надо сказать о случае $\alpha = \alpha_1$. В момент $\varepsilon = \alpha_1$ происходит тройное столкновение: в точку $u = \alpha_1$, где находится левый конец бесконечной лунки, одновременно приходят и уголок, и правый конец центральной лунки. То же самое происходит и в симметричной точке $u = -\alpha_1$, и в результате мы получаем одну бесконечную мультилунку, заполняющую всю область, расположенную над хордой, соединяющей эти две точки, где происходит это столкновение. Когда ε продолжает расти ($\varepsilon > \alpha_1$), параболическая полоса расширяется, но функция Беллмана уже не меняется. В этом случае нетрудно её явно сосчитать:

$$\mathbf{B}_\varepsilon(x_1, x_2) = \begin{cases} -\cos \sqrt{x_2}, & x_2 \leq \alpha_1^2; \\ \left[\frac{1}{2}(x_2 - \alpha_1^2) - 1 \right] \cos \alpha_1, & x_2 > \alpha_1^2. \end{cases}$$

Итак, при этом α для значений $\varepsilon < \alpha_1$ фолиация остаётся такой же, как прежде (см. Рис. 4 и Рис. 5), а для $\varepsilon \geq \alpha_1$ она представлена на Рис. 9.

2.3. $\alpha_1 < \alpha \leq 2\pi$. Значение α_1 является максимальным среди всех α , при которых уголок убегает на бесконечность. При больших α вершина уголка достигает своего крайне правого положения (теперь это значение меньше, чем α) и поворачивает назад, убывая до того момента, когда уголок натыкается на лунку. Ясно, что это случится при $\varepsilon = u$, и мы снова этот момент обозначим символом $\varepsilon_1(\alpha)$. Этим символом всегда будет обозначаться тот момент, когда самый правый уголок коснётся одной из соседних лунок. При $\alpha \in (\pi, \alpha_1)$ это была правая лунка (точнее – мультилунка), при $\alpha \in (\alpha_1, 2\pi]$ это левая лунка. При $\alpha = \alpha_1$, он касается их одновременно. Мы получим неявное выражение для функции ε_1 на промежутке $[\alpha_1, 2\pi]$, если подставим

Рис. 9. Фолиация и её график для $\varepsilon \geq \alpha = \alpha_1$.

$u = \varepsilon$ в уравнение (16). В результате получится следующее уравнение:

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{1-\frac{\alpha}{\varepsilon}} + \cos \varepsilon - \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin \varepsilon = 0. \quad (18)$$

График решения уравнения (18) приведён на Рис. 10. Тут правая производная функции ε_1 в точке α_1 обращается в бесконечность, то есть касательная к графику вертикальна в точке $(\alpha, \varepsilon) = (\alpha_1, \alpha_1)$. Итак, уравнение (18) задаёт функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ на промежутке $[\alpha_1, 2\pi]$, она монотонно убывает от значения $\varepsilon_1(\alpha_1) = \alpha_1 \approx 4.49341$ до $\varepsilon_1(2\pi) \approx 2.88011$. Отметим, что величина $\varepsilon_1(2\pi)$ является решением уравнения

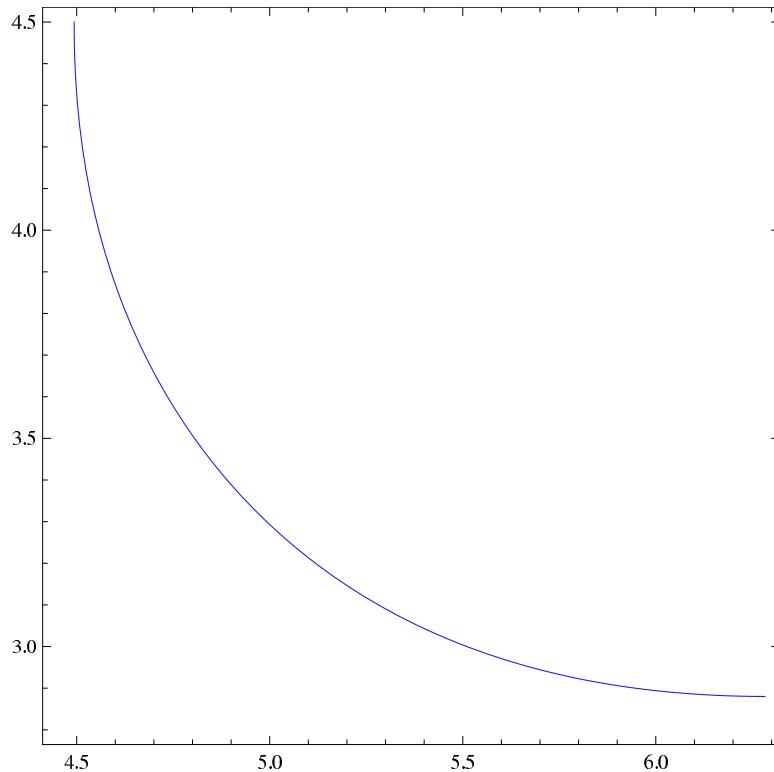
$$\varepsilon^2 e^{1-\frac{2\pi}{\varepsilon}} + \cos \varepsilon - \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin \varepsilon = 0. \quad (19)$$

Производная функции ε_1 возрастает от $-\infty$ в точке $\alpha = \alpha_1$ до нуля в точке $\alpha = 2\pi$.

График функции ε_1 на всём интервале $[\pi, 2\pi]$ можно увидеть на Рис. 11.

В момент $\varepsilon_1(\alpha)$, когда уголок сталкивается с лункой (в силу симметрии левый и правый уголки сталкиваются с лункой одновременно), возникает воланчик. Он сужается при росте ε . Положение правого конца лунки можно найти из уравнения

$$F_{0R}(u, 2u, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0,$$

Рис. 10. График функции $\varepsilon_1(\alpha)$.

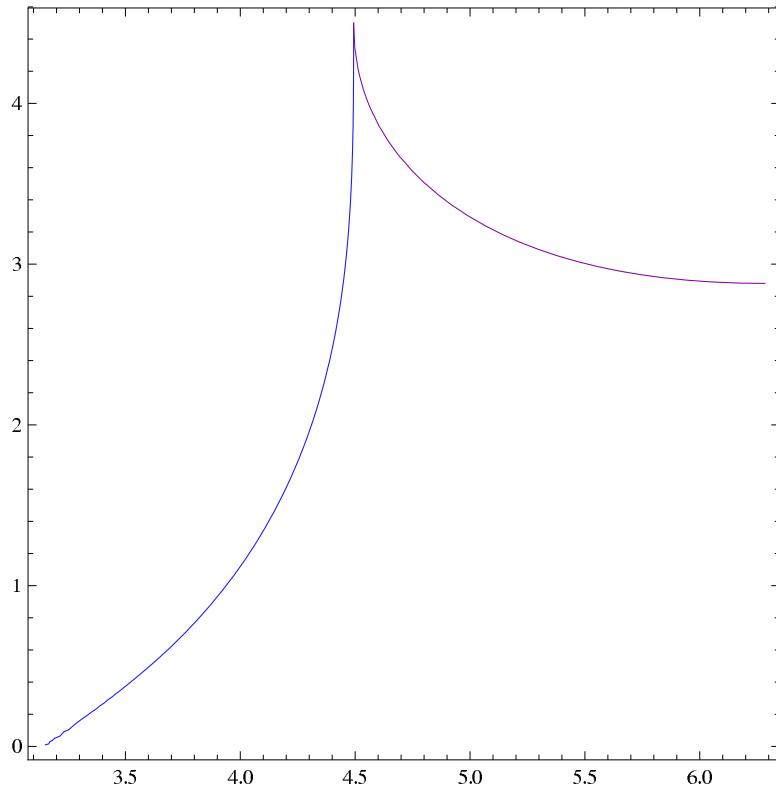
или более явно, правый конец $u = b_0(\varepsilon, \alpha)$ – это решение уравнения

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \left[(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} - \sin u - \varepsilon \cos u \right] + \cos u - \frac{\sin u}{u} = 0. \quad (20)$$

Точнее, b_0 – это единственная ветвь решения, выходящая из точки $b_0(\varepsilon_1(\alpha), \alpha) = \varepsilon_1(\alpha)$.

Переходя к пределу в уравнении (20) при $\varepsilon \rightarrow \infty$, мы получаем уравнение

$$\frac{\sin u}{u} = \cos \alpha.$$

Рис. 11. График функции $\varepsilon_1(\alpha)$ на промежутке $[\pi, 2\pi]$.

Единственное решение этого уравнения из интервала $[0, \alpha_1]$ задаёт функцию $u = b_0(\infty, \alpha)$, убывающую от $b_0(\infty, \alpha_1) = \alpha_1$ до $b_0(\infty, 2\pi) = 0$. Величина $b_0(\infty, \alpha)$ – предельное положение правого конца базы воланчика при $\varepsilon \rightarrow \infty$. В результате мы видим, что лунка под воланчиком никогда не исчезает, то есть этот воланчик никогда не превращается в уголок. Даже в предельной конфигурации (то есть без верхней границы) для всех $\alpha < 2\pi$ у нас лунка сидит около начала координат, и только при $\alpha = 2\pi$ вся параболическая область замечается вертикальными экстремалями.

Суммируя полученные сведения об эволюции при $\alpha \in (\alpha_1, 2\pi]$, можно сказать, что до критической точки (то есть для $\varepsilon < \varepsilon_1$) у нас такая фолиация, как изображёна на Рис. 4 (её граф – на Рис. 5), а после критической точки (то есть для $\varepsilon > \varepsilon_1$) у нас имеется воланчик и две стабильные мультилунки на бесконечных толстых корнях $c_{\pm 1}$, разделённые областями касательных. См. Рис. 12.

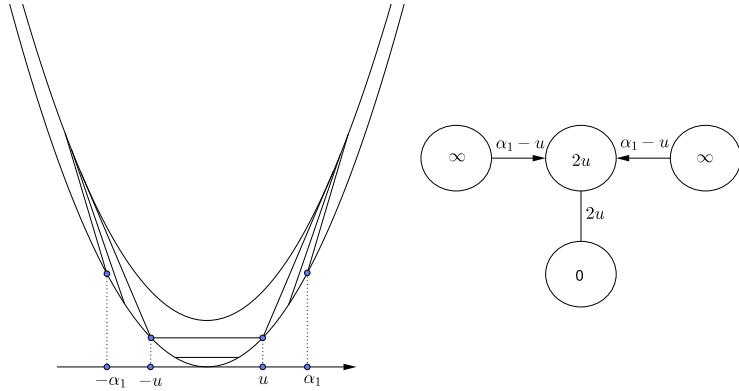


Рис. 12. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_1$.

В момент $\varepsilon = \varepsilon_1$ выполняется следующее схематическое равенство: *уголок + длинная хорда + уголок = воланчик*, см. Рис. 13, который иллюстрирует отдельно это столкновение. Тут выделена та часть графа, которая фолиируется двумя разными способами. Вся картинка пред-

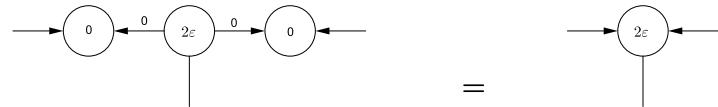
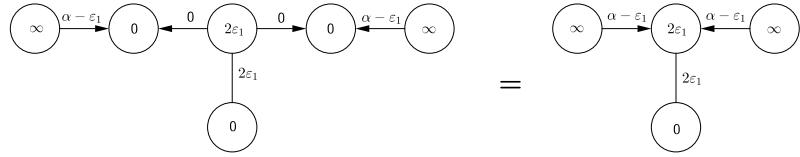
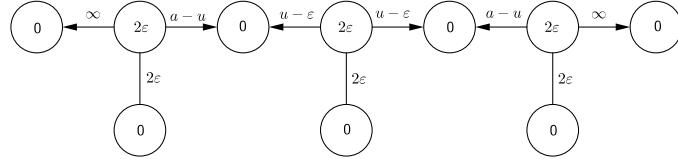


Рис. 13. Тождество фолиаций *уголок + длинная хорда + уголок = воланчик*.

ставлена на Рис. 14.

Рис. 14. Перестройка фолиации в момент $\varepsilon = \varepsilon_1$.§3. $2\pi < \alpha \leqslant 3\pi$

3.1. $2\pi < \alpha \leqslant \alpha_2$. При $\varepsilon \in (0, \alpha - 2\pi]$ ничего интересного не происходит: у нас три полных симметричных лунки вокруг точек $2k\pi$, $k = 0, \pm 1$, и два неподвижных уголка с вершинами в точках $\pm\pi$. (Начиная с данного момента я больше не буду рисовать картинок с фолиациями, поскольку они становятся уже слишком громоздкими, и ограничусь только графиками. Надеюсь, что читатель, набравшись некоторого опыта, сможет сам восстановить картину фолиации, в этом ему поможет и приводимое словесное описание фолиации.) Граф фолиации приведён на Рис. 15, где нужно положить $u = \pi$ и $a = 2\pi - \varepsilon$.

Рис. 15. Фолиация при $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Всё становится не так с момента $\varepsilon = \alpha - 2\pi$, когда правая лунка начинает расти асимметрично. При больших ε мы обязаны использовать формулу (6) для описания соотношения между ε и левым концом $a = a_1$ лунки. График функции $a_1(\varepsilon)$, обратной к той, что задана равенством (6), при $\alpha = 2\pi + 1$ представлен на Рис. 16.

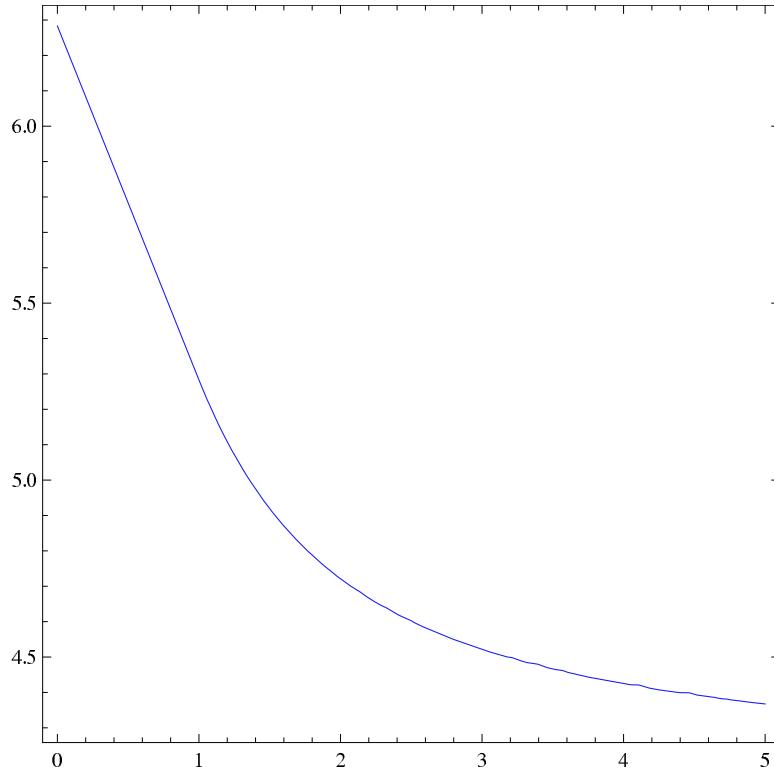


Рис. 16. Первая координата левого конца правой лунки как функция параметра ε при $\alpha = 2\pi + 1$.

Для исследования того, что происходит левее этой несимметричной лунки, в качестве левой силы последней нужно использовать выражение (9) с $\ell = 2\varepsilon$:

$$\begin{aligned} F_{1La}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) = & \\ & \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \sin a - \cos a \right) + \frac{1}{2\varepsilon} ((a + 2\varepsilon - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha) \right] e^{\frac{u-a}{\varepsilon}} \\ & - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} (\varepsilon \cos u + \sin u), \quad u \leq a \leq 4\pi - \alpha. \end{aligned}$$

Решение уравнения

$$F_{0R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{1La}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad (21)$$

(точнее, та ветвь решения, которая начинается в точке $u = \pi$ при $\varepsilon = \alpha - 2\pi$) задаёт функцию $u(\varepsilon)$, показывающую положение вершины уголка между правой и центральной лунками. Эта функция задана на промежутке $[\alpha - 2\pi, \varepsilon_1(\alpha)]$, где ε_1 , как и раньше, это момент, когда уголок натыкается на центральную лунку, то есть это момент, когда $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, что является решением уравнения (21) с $u = \varepsilon$, т.е.,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \sin a - \cos a \right) + \frac{1}{2\varepsilon} ((a + 2\varepsilon - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha) \right] e^{1-\frac{a}{\varepsilon}} \\ & + \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[\cos \varepsilon - \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\varepsilon \right) \sin \varepsilon \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Функция $\varepsilon_1(\alpha)$ возрастает от значения $\varepsilon_1(2\pi) \approx 2.88011$ (напомним, что последнее значение – это решение уравнения (19)) до величины $\varepsilon_1(\alpha_2) \approx 3.06761$.

Итак, в момент $\varepsilon = \varepsilon_1$ происходит структурная перестройка фолиации, описанная тождеством графов на Рис. 13, и при $\varepsilon \geq \varepsilon_1$ возникает воланчик на центральной лунке. Этот воланчик сужается, но никогда не исчезает, поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F_{1La}(0, 2\varepsilon, \varepsilon) = \cos \alpha - 1 < 0,$$

то есть хвост правой лунки никогда не покрывает точку 0. Следовательно, при $\varepsilon > \varepsilon_1$ фолиация такова, как изображено на Рис. 17.

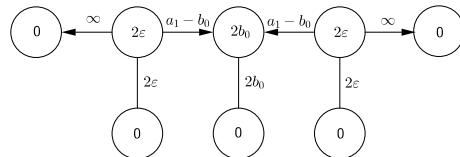


Рис. 17. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Если мы хотим узнать размер лунки в некоторый момент ε , нужно решить следующее уравнение баланса:

$$F_{0R}(b_0, 2b_0, \varepsilon) + F_{1La}(b_0, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0, \quad (23)$$

где b_0 – это первая координата правого конца верхней хорды центральной лунки, то есть $\ell_0 = 2b_0$, а в явном виде это уравнение выглядит так:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \sin a - \cos a \right) + \frac{1}{2\varepsilon} ((a + 2\varepsilon - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha) \right] e^{-\frac{a-b_0}{\varepsilon}} \\ & + \frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos b_0 - \left(\frac{1}{b_0} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right) \sin b_0 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow \infty$ уравнение баланса (24) принимает вид:

$$\frac{\sin b_0}{b_0} = \cos \alpha.$$

Корень $b_0 = b_0(\infty)$ этого уравнения из промежутка $(0, \pi)$ определяет положение правого конца предельной хорды, до которого сжимается основание воланчика (в силу симметрии левый конец $a_0(\infty)$ – это $-b_0(\infty)$).

Тот факт, что $b_0(\varepsilon) < a = a_1(\varepsilon)$ при всех ε , если $\alpha \in (2\pi, \alpha_2]$, и $b_0(\infty) = a_1(\infty)$, если $\alpha = \alpha_2$, объясняет выбор рассматриваемого интервала значений параметра α . Для больших значений α растущие левая и правая лунки захватят (одновременно в силу симметрии) сужающийся воланчик, образуя мультилунку. Но эта история будет рассмотрена уже в следующем подпараграфе.

Когда $\alpha = \alpha_2$, мультилунка у нас образуется в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$. Точка $u = b_0(\infty) = a_1(\infty)$, в которой в пределе воланчик соприкасается с правой лункой, является решением уравнения

$$\frac{\sin u}{u} = \cos \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2}.$$

Графически мы можем найти это значение как абсциссу точки пересечения графика функции $f'(t) = \sin t$ на промежутке $(0, \alpha_2)$ с продолжением линейной части графика $f'(t)$. Чтобы найти критическое значение α , при котором возникает мультилунка, нам надо провести прямую через начало координат, чтобы она одновременно касалась графика функции $\sin t$ (см. Рис. 18).

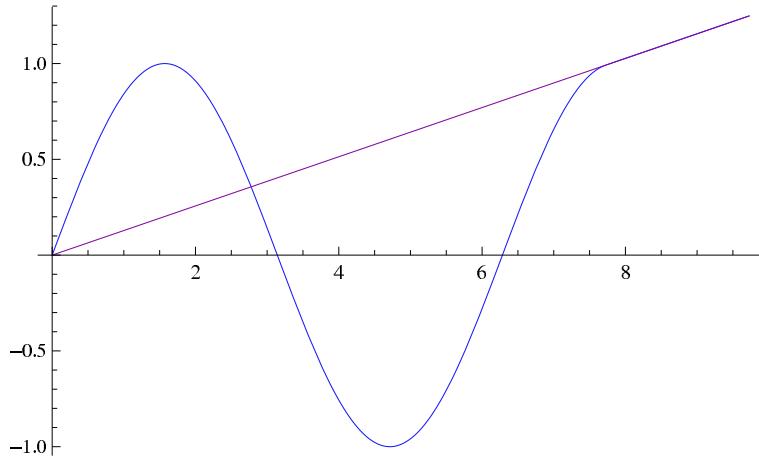


Рис. 18. График функции $f'(t)$ вместе с продолжением его линейной части при $\alpha = \alpha_2 \approx 7.72525$.

3.2. $\alpha_2 < \alpha < 3\pi$. Прежде всего упомянем о том, что момент $\varepsilon_1(\alpha)$ соприкосновения центральной лунки с соседними уголками задаётся тем же уравнением (22), что и раньше, и функция ε_1 продолжает свой рост вплоть до значения $\varepsilon_1(3\pi) = \pi$. Если мы захотим понять более детально поведение этой функции вблизи точки 3π , из уравнений (6) и (22) мы можем вывести, что величина $a = a_1$ в момент времени ε_1 зависит от α следующим образом: $a \approx \pi + \frac{1}{3}(3\pi - \alpha)^3$. Поэтому, учтя уравнение (6), мы получим зависимость $\varepsilon_1(\alpha) \approx \pi - \frac{1}{32\pi}(3\pi - \alpha)^4$.

В предыдущем подпараграфе была описана ситуация, когда правая лунка не могла задеть сужающийся воланчик. Теперь ситуация иная, и мы можем определить, когда такое произойдёт. Этот момент ε мы обозначим символом $\delta_1(\alpha)$.

Ситуация, когда такое соударение случается, может быть легко найдена с помощью графика функции f' : нам надо найти прямую линию, проходящую через начало координат и пересекающую этот график в точках с абсциссами $a \in (\frac{1}{2}\pi, \pi]$ и $b \in (\alpha_2, 3\pi]$, для которых выполнено уравнение лунки (1), то есть суммарная площадь между этой прямой и графиком (с учётом знака) равна нулю (см. Рис. 19). Тогда точки $a = a_1$ и $b = b_1$ будут концами правой лунки с корнем

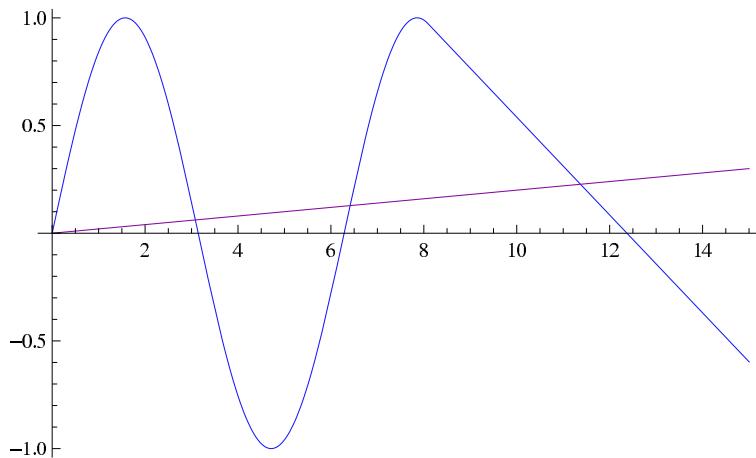


Рис. 19. Нахождение момента ε , когда появляется мультилунка.

$c_1 = 2\pi$, в то время как точки $a_0 = -a$ и $b_0 = a$ — это концы центральной лунки.

Вычислим этот момент, используя вышеприведённый рисунок:

$$\frac{f'(b)}{b} = \frac{f'(a)}{a},$$

откуда получаем следующее выражение для ε :

$$\varepsilon = \frac{a[(a - a)\cos \alpha + \sin a - \sin \alpha]}{2[a \cos \alpha - \sin a]}.$$

Сравнение этого выражения с уравнением (6) неявно задаёт функцию $a(\alpha)$, возрастающую от $a_1(\infty)$ до π , когда α пробегает от α_2 до 3π . Вблизи точки 3π приблизительно $a(\alpha) \approx \pi - \frac{1}{32\pi}(3\pi - \alpha)^4$. Теперь, используя либо приведённое выше выражение, либо уравнение (6), мы получим ε как функцию от α , что и является искомой функцией $\delta_1(\alpha)$, убывающей от бесконечности до $\delta_1(3\pi) = \pi$. Вблизи точки 3π она ведёт себя как $\delta_1(\alpha) \approx \pi + \frac{1}{6}(3\pi - \alpha)^3$.

До первой критической точки, т.е. при $\varepsilon < \varepsilon_1(\alpha)$, фолиация описывается тем же самым графиком, что и раньше (см. Рис. 15). На промежутке $\varepsilon \in (\varepsilon_1(\alpha), \delta_1(\alpha))$, когда у нас присутствует воланчик в центре

и две растущие лунки, фолиация тоже известна (см. Рис. 17). Ситуация меняется в момент $\varepsilon = \delta_1(\alpha)$, когда обе лунки одновременно соприкасаются с центральным воланчиком, и появляется мультилунка, имеющая все три лунки в своём основании.

Эту перестройку структуры фолиации можно записать в виде равенства: *длинная хорда+воланчик+длинная хорда=мультилунка* (см. Рис. 20). При $\varepsilon > \delta_1(\alpha)$ эволюция уже простая: мультилунка разви-

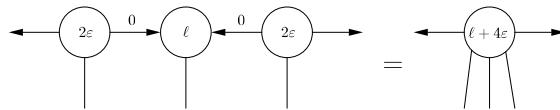


Рис. 20. Фолиационное тождество
длинная хорда+воланчик+длинная хорда=мультилунка.

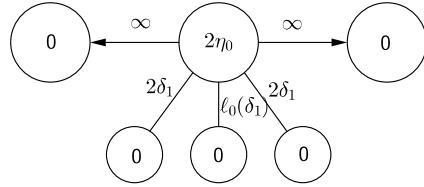
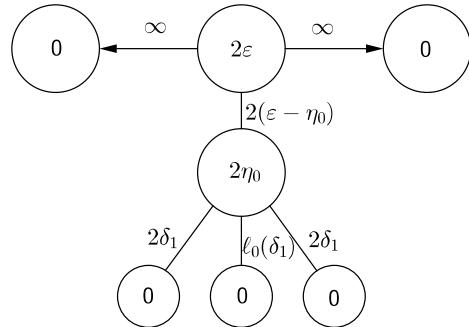
вается до момента $\varepsilon = \eta_0(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} b_1(\delta_1(\alpha)) = \frac{1}{2}\ell_0(\delta_1) + 2\delta_1$, после чего над ней возникает область хорд, а она сама становится замкнутой стабильной мультилункой, входящей в состав сложной лунки, а последняя уже растёт до бесконечности. Функция η_0 , определённая (как и δ_1) на промежутке $(\alpha_2, 3\pi]$, убывает от бесконечности до значения $\eta_0(3\pi) = 3\pi$. Около точки 3π она ведёт себя как $\eta_0(\alpha) = a_1(\delta_1(\alpha)) + 2\delta_1(\alpha) \approx 3\pi + \frac{1}{3}(3\pi - \alpha)^3$.

Итак, подводя итог, мы можем сказать, что теперь у нас не одна, а три критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ два уголка одновременно касаются центральной лунки, образуя воланчик;
- при $\varepsilon = \delta_1(\alpha)$ две оставшиеся лунки касаются воланчика, преобразуя его в мультилунку;
- при $\varepsilon = \eta_0(\alpha)$ мультилунка заканчивает своё развитие и возникает сложная лунка.

Фолиация между этими критическими точками описывается следующими графами:

- Рис. 15 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 17 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \delta_1)$;

Рис. 21. Фолиация при $\delta_1 < \varepsilon < \eta_0$.Рис. 22. Фолиация при $\varepsilon > \eta_0$.

- Рис. 21 при $\varepsilon \in (\delta_1, \eta_0)$;
- Рис. 22 при $\varepsilon \in (\eta_0, \infty)$.

3.3. $\alpha = 3\pi$. Поскольку $\varepsilon_1(3\pi) = \delta_1(3\pi) = \pi$, у нас только две критических точки эволюции при $\alpha = 3\pi$:

- при $\varepsilon = \pi$ все три лунки касаются своих соседей, а два уголка между ними превращаются в мультилунку;

- при $\varepsilon = 3\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, образуя сложную лунку.

Фолиация между этими критическими точками описывается следующими графиками:

- Рис. 15, где $u = \pi$ и $a = 2\pi - \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 21, где $\delta_1 = \pi$, $\ell_0(\delta_1) = 2\pi$ и $\eta_0 = 3\pi$ при $\varepsilon \in (\pi, 3\pi)$;
- Рис. 22 с теми же значениями $\delta_1 = \pi$, $\ell_0(\delta_1) = 2\pi$ и $\eta_0 = 3\pi$ при $\varepsilon \in (3\pi, \infty)$.

§4. $3\pi < \alpha \leqslant 4\pi$

4.1. $3\pi < \alpha \leqslant \beta_3$. При малых значениях ε у нас на положительной полуоси кроме полной центральной лунки с корнем в 0 есть полная лунка с корнем в 2π и мультилунка на толстом корне $[\alpha, +\infty)$. И есть два уголка, появляющихся в точках π и 3π (см. график на Рис. 23). Первый

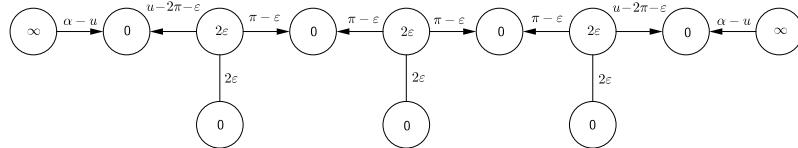


Рис. 23. Фолиация при $\varepsilon < \varepsilon_1$.

из них неподвижен, а второй начинает сразу сдвигаться вправо точно так же, как это было при значениях α , на 2π меньших, чем сейчас. Действительно, положение вершины определяется уравнением

$$F_{1R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0,$$

где F_∞ задаётся формулой (10), а $F_{1R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon)$ – формулой (5). Другими словами, мы получим уравнение баланса в нашей ситуации, если подставим $u - 2\pi$ вместо u и $\alpha - 2\pi$ вместо α в уравнение (16):

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{u-2\pi}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \sin u = 0. \quad (25)$$

Непрерывная ветвь $u(\varepsilon)$ корня этого уравнения, начинающаяся в точке $u(0) = 3\pi$, монотонно возрастает, пока не достигнет значения $u = \alpha$. Для момента, когда уголок касается правой мультилунки (т.е.

$u(\varepsilon) = \alpha$, мы получим уравнение, если подставим $\alpha - 2\pi$ вместо α в уравнение (16):

$$\varepsilon^2 \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\varepsilon} \right] + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1 - \frac{\alpha - 2\pi}{\varepsilon}} = 0. \quad (26)$$

Корень этого уравнения даёт нам значение функции $\varepsilon_1(\alpha)$, таким образом, мы приходим к естественному выводу, что $\varepsilon_1(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha - 2\pi)$ на промежутке $\alpha \in [3\pi, \beta_3]$. Значение $\alpha = \beta_3$, при котором $\varepsilon_1(\alpha) = \pi$, является корнем уравнения

$$\pi^2 \cos \alpha - \pi \sin \alpha - e^{3 - \frac{\alpha}{\pi}} = 0 \quad (27)$$

из промежутка $\alpha \in (3\pi, \frac{7}{2}\pi)$.

При $\varepsilon \geq \varepsilon_1(\alpha)$ эволюция проста: в момент $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ появляется мультитроллейбус на бесконечном толстом корне $[\alpha, \infty)$, который тут же исчезает, затем в момент $\varepsilon = \pi$ все три лунки с корнем в нуле и в точках $\pm 2\pi$ образуют мультилунку, которая завершает свою эволюцию при $\varepsilon = 3\pi$, когда возникает симметричная составная лунка, растущая до бесконечности. Таким образом, у нас опять три критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки убегают на бесконечность;
- при $\varepsilon = \pi$ все три лунки касаются своих соседей, а два уголка между ними превращаются в мультилунку;
- при $\varepsilon = 3\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, порождая составную лунку.

Фолиация между этими критическими точками описывается следующими графами:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 15, где $u = \pi$ и $a = 2\pi - \varepsilon$ при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \pi)$;
- Рис. 21, где $\delta_1 = \pi$, $\ell_0(\delta_1) = 2\pi$ и $\eta_0 = 3\pi$ при $\varepsilon \in (\pi, 3\pi)$;
- Рис. 22 с теми же параметрами $\delta_1 = \pi$, $\ell_0(\delta_1) = 2\pi$ и $\eta_0 = 3\pi$ при $\varepsilon \in (3\pi, \infty)$.

4.2. $\beta_3 < \alpha \leq \gamma_3$. Теперь возникающая в момент $\varepsilon = \pi$ мультилунка появляется раньше, чем самый правый уголок успевает убежать на бесконечность (то есть раньше, чем он успевает достичь точки α). По этой причине уравнение баланса при $\varepsilon > \pi$ отличается от уравнения (25). В этой ситуации правую силу мультилунки можно записать

в виде $F_{0R}(u, 6\pi, \varepsilon)$ вместо $F_{1R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon)$. Следовательно, уравнение баланса принимает вид

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} - e^{\frac{3\pi-u}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \sin u = 0. \quad (28)$$

Прежде чем продолжать наше исследование, скажу несколько слов о критических значениях β_3 и γ_3 . Как уже было сказано, при $\alpha = \beta_3$ правый уголок убегает на бесконечность в момент $\varepsilon = \pi$ (момент образования мультилунки). При меньших α уже было значение параметра $\beta_1 \approx 4.46757$, когда правый уголок убегал на бесконечность в момент $\varepsilon = \pi$. Но при $\alpha = \beta_1$ не происходило других перестроек структуры, и по этой причине мы специально не отмечали эту точку. Однако, она может быть найдена подстановкой $\varepsilon = \pi$ в уравнение (17):

$$\pi^2 \cos \alpha - \pi \sin \alpha - e^{1-\frac{\alpha}{\pi}} = 0, \quad (29)$$

у которого нам нужно взять решение из интервала $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$. График функции из левой части этого уравнения показан на Рис. 24.

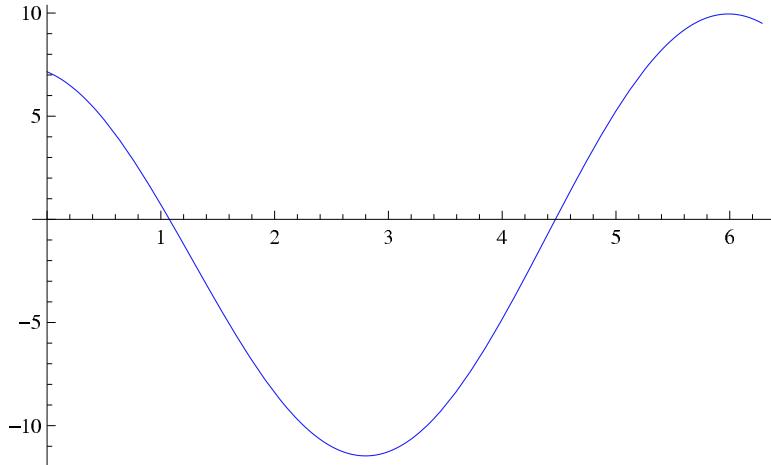


Рис. 24. Функция из соотношения (29).

В силу упомянутой периодичности функции $\varepsilon_1(\alpha)$, самый правый уголок убегает на бесконечность в момент $\varepsilon = \pi$, если $\alpha = \beta_3 = \beta_1 + 2\pi$. Следовательно, соотношение $\varepsilon_1(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha - 2\pi)$ справедливо при $\alpha \in (3\pi, \beta_3)$, а чтобы получить функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ для $\alpha > \beta_3$, нужно

подставлять $u = \alpha$ в уравнение (28), а не в (25). В результате мы получим

$$\varepsilon^2 \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\varepsilon} \right] - e^{\frac{3\pi-\alpha}{\varepsilon}} = 0. \quad (30)$$

Однако уравнение (28) задаёт положение правого уголка лишь в том случае, если у нас есть не завершившая свою эволюцию мультилунка, то есть при $\varepsilon \leq 3\pi$. Следовательно, уравнение (30) определяет функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ вплоть до значения $\alpha = \gamma_3$, при котором уголок убегает на бесконечность в момент $\varepsilon = 3\pi$, когда мультилунка завершает свою эволюцию и возникает сложная лунка. Это ещё раз меняет уравнение баланса, и такая ситуация будет рассмотрена в следующем подпункте. Тут мы только отметим, что для нахождения величины γ_3 нам надо подставить $\varepsilon = 3\pi$ в уравнение (30). В результате получится сле-

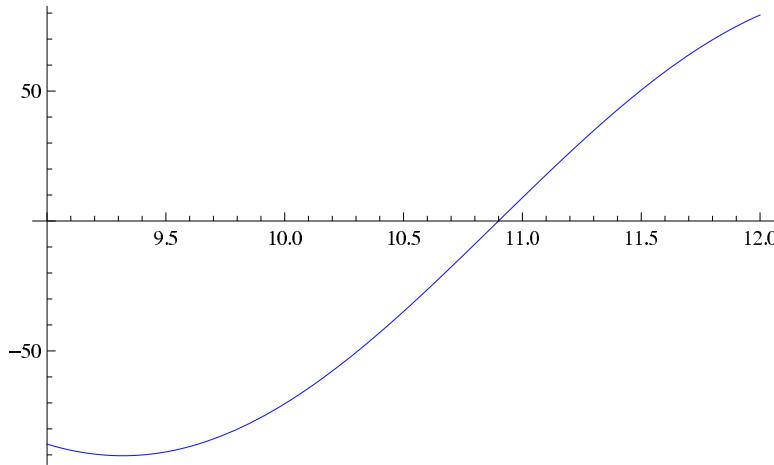


Рис. 25. Функция из соотношения (31).

дующее уравнение (см. Рис. 25)

$$9\pi^2 \cos \alpha - 3\pi \sin \alpha - e^{1 - \frac{\alpha}{3\pi}} = 0. \quad (31)$$

Мы ищем решение из интервала $(3\pi, \frac{7}{2}\pi)$, которое будет $\alpha = \gamma_3 \approx 10.89944 \approx 3\pi + 1.47466 \approx \frac{7}{2}\pi - 0.09613$. Итак, уравнение (30) задаёт функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ при $\alpha \in [\beta_3, \gamma_3]$.

Суммируя сведения об эволюции при $\alpha \in [\beta_3, \gamma_3]$, можно сделать вывод, что при $\varepsilon < \pi$ у нас простая картинка: два неподвижных уголка в точках $u = \pm\pi$, два других, стартовавших из точек $u = \pm 3\pi$ и разбегающихся, и луночки, симметрично растущие вокруг точек $c_0 = 0$ и $c_{\pm 1} = \pm 2\pi$. В момент $\varepsilon = \pi$ все эти три луночки соприкасаются, порождая мультилунку. Эта мультилунка продолжает свою эволюцию независимо от двух оставшихся уголков, которые продолжают своё убегание до момента $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$. В этот момент они касаются бесконечных мультилунок, образуя мультитроллейбусы, которые в свою очередь моментально распадаются, и у нас остаётся только область правых касательных справа от мультилунки и симметричная область левых касательных слева. Наконец, в момент $\varepsilon = 3\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, оставаясь при больших ε стабильной замкнутой мультилункой, над которой начинает симметрично расти область хорд.

Итак, у нас те же самые три критических точки эволюции, но они расположены в другом порядке:

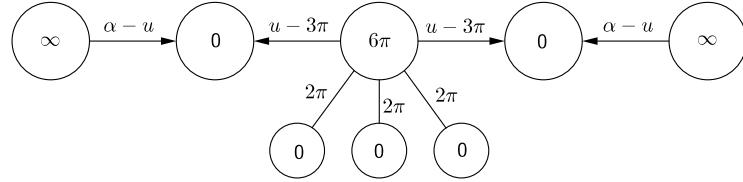
- при $\varepsilon = \pi$ все три лунки касаются своих соседей, а два уголка между ними превращаются в мультилунку;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки убегают на бесконечность;
- при $\varepsilon = 3\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, порождая составную лунку.

Фолиация между этими критическими точками описывается следующими графиками:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 26 при $\varepsilon \in (\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 21, где $\delta_1 = \pi$, $\ell_0(\delta_1) = 2\pi$ и $\eta_0 = 3\pi$, при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, 3\pi)$;
- Рис. 22 с теми же параметрами $\delta_1 = \pi$, $\ell_0(\delta_1) = 2\pi$ и $\eta_0 = 3\pi$ при $\varepsilon \in (3\pi, \infty)$.

4.3. $\gamma_3 < \alpha < \alpha_3$. Теперь, при $\varepsilon > 3\pi$, правая сила сложной лунки равна $F_{0R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon)$, а уравнение баланса принимает вид

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{u}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \sin u = 0. \quad (32)$$

Рис. 26. Фолиация при $\pi < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Итак, значение ε , при котором u достигает точки α (т.е. значение функции $\varepsilon_1(\alpha)$), можно найти из уравнения

$$\varepsilon^2 \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\varepsilon} \right] + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{\alpha}{\varepsilon}} = 0. \quad (33)$$

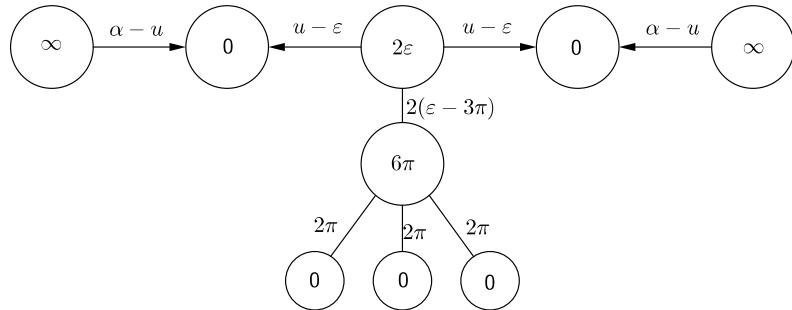
Таким образом, у нас те же три критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \pi$ все три лунки касаются своих соседей, а два уголка между ними превращаются в мультилунку;
- при $\varepsilon = 3\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, порождая составную лунку;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки убегают на бесконечность.

Фолиация между этими критическими точками описывается следующими графиками:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 26 при $\varepsilon \in (\pi, 3\pi)$;
- Рис. 27 при $\varepsilon \in (3\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 22, где $\delta_1 = \pi$, $\ell_0(\delta_1) = 2\pi$ и $\eta_0 = 3\pi$ при $\varepsilon \in (3\pi, \infty)$.

Мы завершили исследование эволюции при $\alpha < \alpha_3$. Мы можем сделать вывод, что два уголка (самый правый и симметричный ему на отрицательной полуоси) не взаимодействуют с остальной частью картинки при таких α . Они монотонно расходятся, убегая на бесконечность в момент $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$. Три луночки развиваются независимо, в момент $\varepsilon = \pi$ они образуют мультилунку, развивающуюся до $\varepsilon = 3\pi$,

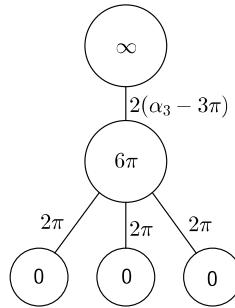
Рис. 27. Фолиация при $3\pi < \varepsilon < \varepsilon_1$.

после чего замкнутая мультилунка стабильна, а над ней до бесконечности растёт область хорд, слева и справа от которой бесконечные области касательных.

4.4. $\alpha = \alpha_3$. Как и в случае $\alpha = \alpha_1$, при $\alpha = \alpha_3$ ситуация отличается от предыдущего описания тем, что растущая лунка захватывает уголки в последний момент их убегания на бесконечность, то есть в момент, когда они образуют бесконечные области линейности. Таким образом, образуется область линейности над хордой длины $2\alpha_3$, которая является стабильной бесконечной мультилункой. Это означает, что при $\varepsilon > \alpha_3$ функция Беллмана больше не меняется, лишь увеличивается её область определения.

Итак, до момента $\varepsilon = \alpha = \alpha_3$ эволюция точно такая, как в предыдущем подпараграфе. Отличие наступает при $\varepsilon > \varepsilon_1 = \alpha_3$. Соответствующая фолиация представлена графом на Рис. 28.

4.5. $\alpha_3 < \alpha \leq \frac{7}{2}\pi$. При таких значениях параметра α вершина угла достигает крайне правого положения (теперь оно меньше, чем α) и поворачивает назад, убывая до момента столкновения с лункой. Этот момент снова будет обозначаться символом $\varepsilon_1(\alpha)$, и ясно, что это произойдёт, когда $\varepsilon = u$. Уравнение баланса будет то же самое, что и уравнение (16), поскольку у нас опять одна лунка (теперь составная), симметричная относительно нуля, и та же сила приходит с бесконечности. Следовательно, уравнение, задающее функцию ε_1 , совпадает с

Рис. 28. Фолиация при $\varepsilon > \alpha_3$.

уравнением (18), то есть величина $\varepsilon = \varepsilon_1$ удовлетворяет уравнению

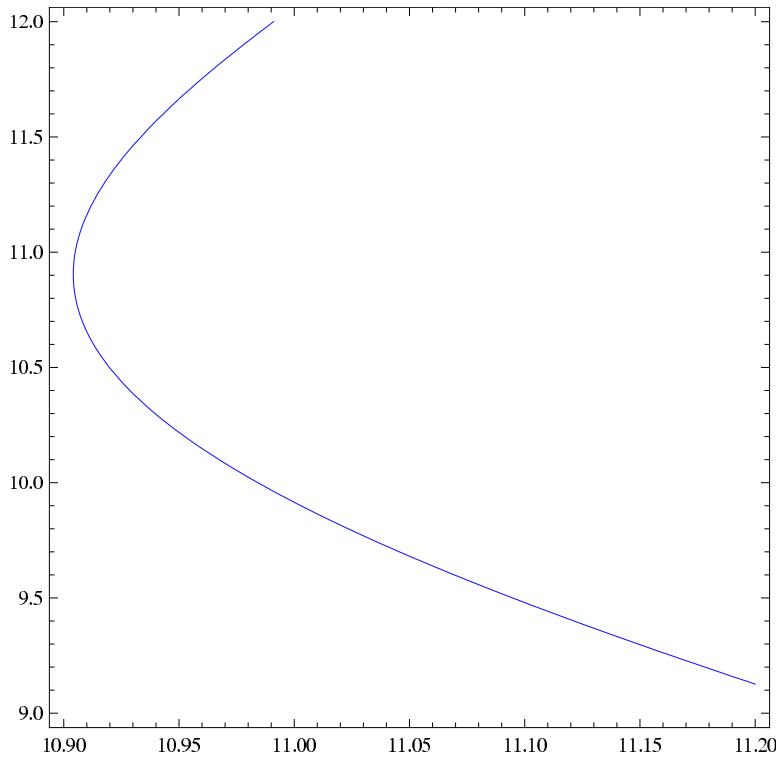
$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{1-\frac{\alpha}{\varepsilon}} + \cos \varepsilon - \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\sin \varepsilon = 0, \quad (34)$$

но теперь нам надо взять ту ветвь решения, которая начинается в точке (α_3, α_3) , а не (α_1, α_1) , как это было при определении функции $\varepsilon_1(\alpha)$ при $\alpha \in (\alpha_1, 2\pi]$.

График решения уравнения (34) приведён на Рис. 29. Область, где функция $\varepsilon_1(\alpha)$ задаётся уравнением (34), начинается в точке $\alpha = \alpha_3$ (самая левая точка графика имеет координаты $(\alpha, \varepsilon) = (\alpha_3, \alpha_3)$, и касательная к графику в ней вертикальна). Поскольку уравнение (34) предполагает, что первая координата правого конца лунки не меньше 3π (т.е. у нас составная лунка), оно определяет функцию ε_1 до того момента, пока она не опустится до уровня $\varepsilon = 3\pi$. Это даёт нам максимальное значение величины α , при котором для определения функции ε_1 ещё можно использовать уравнение (34). Если в уравнение (34) подставить $\varepsilon = 3\pi$, мы получим:

$$(9\pi^2 \cos \alpha + 3\pi \sin \alpha)e^{1-\frac{\alpha}{3\pi}} = 1. \quad (35)$$

Нам нужен единственный корень этого уравнения из промежутка $\alpha \in (\frac{7}{2}\pi, 4\pi)$. По определению (см. (14)), этим корнем будет $\alpha = \lambda_3$. Приблизительное значение $\lambda_3 \approx 11.1147 \approx \frac{7}{2}\pi + 0.1191$ получим, численно решая уравнение $\varepsilon_1(\lambda_3) = 3\pi$. Итак, уравнение (34) задаёт функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ на промежутке $[\alpha_3, \lambda_3]$.

Рис. 29. График функции $\varepsilon_1(\alpha)$.

В момент $\varepsilon_1(\alpha)$, когда уголок касается луночки (в силу симметрии левый и правый уголки это делают одновременно), мы получаем воланчик. Последний сужается при возрастании ε . Положение правого конца луночки может быть найдено из уравнения

$$F_{0R}(u, 2u, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0,$$

то есть

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \left[(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} - \sin u - \varepsilon \cos u \right] + \cos u - \frac{\sin u}{u} = 0. \quad (36)$$

При наших ограничениях на α решение u всегда больше, чем 3π , т.е. под нашим воланчиком всегда присутствует нетривиальная область

хорд. Действительно, если мы положим $u = 3\pi$ в уравнении (36), мы получим следующее уравнение:

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{3\pi-\alpha}{\varepsilon}} = 1. \quad (37)$$

Однако, если $\alpha \in [3\pi, \frac{7}{2}\pi]$, то левая часть всегда отрицательна, то есть уравнение не имеет решений при таких α . Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow \infty$ в уравнении (36), мы получим уравнение

$$\frac{\sin u}{u} = \cos \alpha.$$

Оно имеет единственное решение $u_\infty(\alpha) \in [3\pi, \alpha_3]$ при $\alpha \in [\alpha_3, \frac{7}{2}\pi]$, которое задаёт функцию от α , убывающую от $u_\infty(\alpha_3) = \alpha_3$ до значения $u_\infty(\frac{7}{2}\pi) = 3\pi$. Величина $u_\infty(\alpha)$ показывает, до какого предела сжимается воланчик при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

В результате у нас опять три критические точки эволюции:

- при $\varepsilon = \pi$ все три лунки образуют мультилунку;
- при $\varepsilon = 3\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, появляется составная лунка;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки соприкасаются с составной лункой, превращаясь в воланчик.

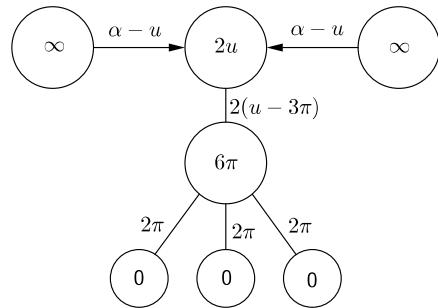
Фолиация остаётся той же, что была, до последней критической точки:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 26 при $\varepsilon \in (\pi, 3\pi)$;
- Рис. 27 при $\varepsilon \in (3\pi, \varepsilon_1)$.

А при $\varepsilon > \varepsilon_1$ у нас теперь сужающийся воланчик на центральной составной лунке и две стабильных мультилунки на толстых корнях $c_{-2} = (-\infty, -\alpha]$ и $c_2 = [\alpha, +\infty)$.

- Рис. 30 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \infty)$.

4.6. $\frac{7}{2}\pi < \alpha < \lambda_3$. При α из предыдущего подпараграфа у нас было три критические точки эволюции: в момент $\varepsilon = \pi$ появлялась мультилунка, которая завершала свою эволюцию при $\varepsilon = 3\pi$, когда поверх мультилунки начинала расти область хорд, последняя в конце концов столкнулась с двумя уголками в момент $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$, создав из них воланчик. Этот воланчик сжимался, но никогда не исчезал. Картина меняется при $\alpha > \frac{7}{2}\pi$. Пока $\varepsilon \leq \varepsilon_1(\alpha)$ (функция $\varepsilon_1(\alpha)$ была определена на промежутке $[\alpha_3, \lambda_3]$), эволюция остаётся прежней, как в предыдущем

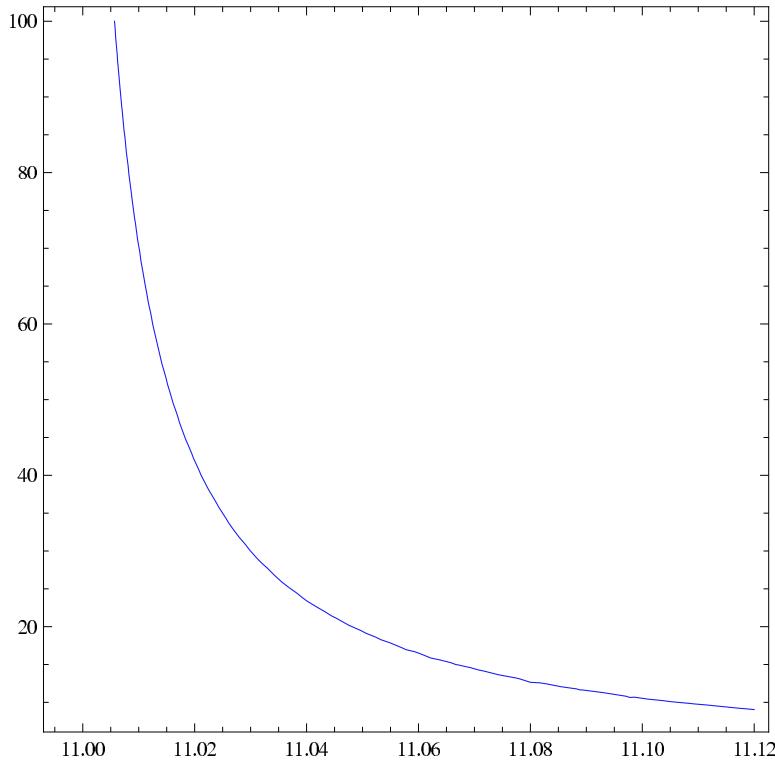
Рис. 30. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_1$.

подпараграфе, но отличается после этого. Теперь возникает четвёртая критическая точка. Это тот момент, когда основание воланчика сжимается до размера 6π и воланчик на составной лунке вместе с мультилункой объединяются в мультиволанчик. Это критическое значение ε (обозначим его символом $\varepsilon_2(\alpha)$) удовлетворяет уравнению (37). График функции $\varepsilon_2(\alpha)$ на промежутке $(\frac{7}{2}\pi, \lambda_3)$ представлен на Рис. 31. Функция $\varepsilon_2(\alpha)$ убывает от $+\infty$ до значения $\varepsilon_2(\lambda_3) = 3\pi$.

В момент $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ воланчик превращается в мультиволанчик, который в свою очередь моментально распадается на три куска: центральный воланчик и два симметричных троллейбуса, а эти фигуры продолжают сжиматься при $\varepsilon \rightarrow \infty$, но никогда не исчезают. Более детальное исследование их поведения будет проведено в следующих двух подпараграфах, где эта же комбинация центрального воланчика с двумя окружающими троллейбусами будет тоже появляться при достаточно больших ε .

Как уже было сказано, у нас четыре критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \pi$ все три лунки касаются своих соседей и уголки между ними образуют мультилунку;
- при $\varepsilon = 3\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, появляется составная лунка;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки соприкасаются с составной лункой, превращаясь в воланчик;

Рис. 31. График функции $\varepsilon_2(\alpha)$.

- при $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ исчезает основание воланчика и он вместе с лежащей ниже мультилункой образует мультиволанчик, который в тот же самый момент превращается в объединение центрального воланчика и двух симметричных троллейбусов.

Фолиация снова та же самая вплоть до последней критической точки:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 26 при $\varepsilon \in (\pi, 3\pi)$;
- Рис. 27 при $\varepsilon \in (3\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 30 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Структурная перестройка, которая происходит в момент $\varepsilon = \varepsilon_2$, может быть выражена в виде уравнения *воланчик + замкнутая мультилунка = мультиволанчик = правый троллейбус + воланчик + левый троллейбус*, см. Рис. 32.

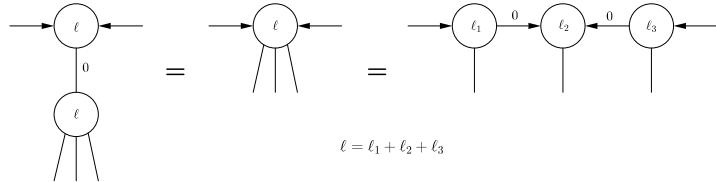


Рис. 32. Фолиационное тождество
воланчик + замкнутая мультилунка = мультиволанчик =
= правый троллейбус + воланчик + левый троллейбус.

Итак, как уже отмечалось, после момента $\varepsilon = \varepsilon_2$ у нас присутствуют центральный воланчик и два симметричных троллейбуса:

- Рис. 33 при $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \infty)$.

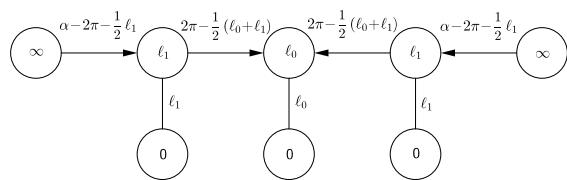


Рис. 33. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_2$.

4.7. $\lambda_3 \leq \alpha < \mu_3$. Отметим, что $\varepsilon_1(\lambda_3) = \varepsilon_2(\lambda_3) = 3\pi$, то есть в этом случае левый и правый уголки соприкасаются не с составной лункой (ещё не было времени, чтобы над мультилункой успела вырасти область хорд), а с полной мультилункой, сразу образуя мультиволанчик. Если $\alpha > \lambda_3$, то уголки входят в соприкосновение с мультилункой до завершения её эволюции, и точно так же возникает мультиволанчик. Напомним, что $\varepsilon_1(\alpha)$ – это момент, когда самый правый

уголок соприкасается с одной из соседних лунок (теперь это момент возникновения мультиволанчика). Чтобы распространить нашу функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ на значения $\alpha > \lambda_3$, нужно найти момент, когда вершина уголка возвращается к своему исходному положению $u = 3\pi$. Уравнение баланса в точке $u = 3\pi$ теперь имеет следующий вид:

$$F_{1R}(3\pi, 2\pi, \varepsilon) + F_\infty(3\pi, \varepsilon) = 0. \quad (38)$$

Поскольку $D_R(\pi, 3\pi) = D_R(-3\pi, 3\pi)$, мы получаем то же самое уравнение (37), которое определяло функцию $\varepsilon_2(\alpha)$ на промежутке $(\frac{7}{2}\pi, \lambda_3)$. Однако эту функцию мы обозначим символом $\varepsilon_1(\alpha)$. (На самом деле разумно считать, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ на этом промежутке.) Эта функция убывает от $\varepsilon_1(\lambda_3) = 3\pi$ до $\varepsilon_1(\mu_3) = \pi$, где $\mu_3 \approx 11.4912 \approx \frac{7}{2}\pi + 0.4956$ – это просто решение уравнения (37) при $\varepsilon = \pi$. График соответствующей части функции $\varepsilon_1(\alpha)$ можно увидеть на Рис. 34.

Рассмотрим теперь эволюцию при $\varepsilon > \varepsilon_1$. Наш мультиволанчик мгновенно распадается на два симметричных троллейбуса и воланчик между ними. Все они при росте ε сжимаются, но не исчезают. Действительно, уравнение

$$F_{1R}(u, 2u - 4\pi, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0, \quad (39)$$

определенное положение правого конца $u = b_1(\varepsilon)$ правого троллейбуса, в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\cos \alpha = \frac{\sin u}{u - 2\pi}. \quad (40)$$

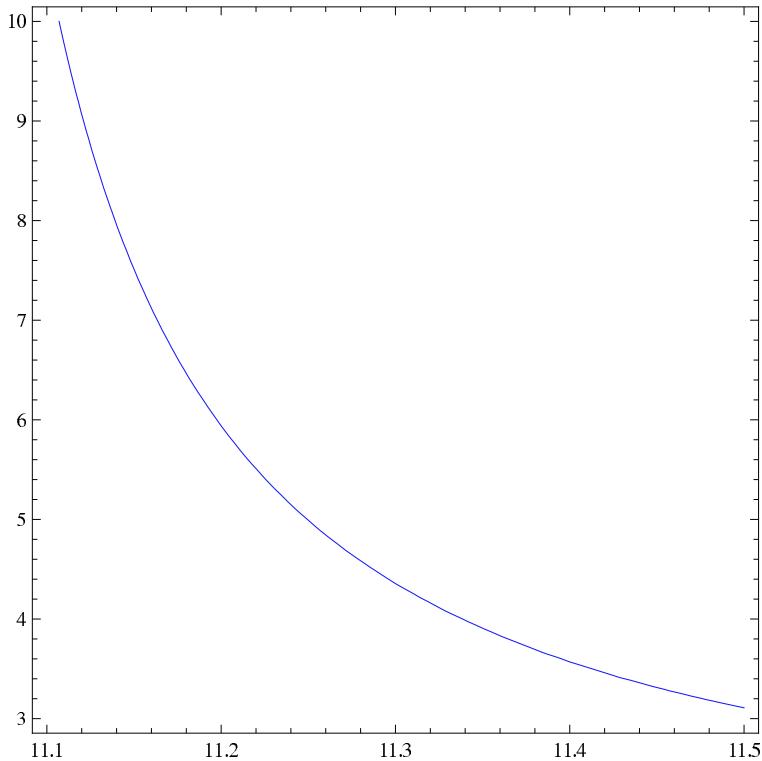
Напомним обозначение $\ell_1(\varepsilon) = b_1(\varepsilon) - a_1(\varepsilon)$ для “горизонтального размера” хорды в основании правого троллейбуса. Его предельное значение – это решение уравнения

$$\cos \alpha = \frac{2}{\ell_1(\infty)} \sin \frac{\ell_1(\infty)}{2}, \quad \ell_1(\infty) \in [0, \pi].$$

Отметим, что в центре картинки мы в пределе получим воланчик на хорде такого же размера.

Таким образом, у нас только две критические точки эволюции:

- при $\varepsilon = \pi$ все три лунки касаются своих соседей и уголки между ними образуют мультилунку;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ два оставшихся уголка соприкасаются с мультилункой, объединяясь с ней в мультиволанчик, который в тот же самый момент превращается в объединение центрального воланчика и двух симметричных троллейбусов.

Рис. 34. График функции $\varepsilon_1(\alpha)$ при $\alpha \in [\lambda_3, \mu_3]$.

Фолиация между этими критическими точками описывается следующими графиками:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 26 при $\varepsilon \in (\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 33 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \infty)$.

4.8. $\alpha = \mu_3$. Поскольку $\varepsilon_1(\mu_3) = \pi$, у нас теперь единственная критическая точка эволюции $\varepsilon = \pi$, когда все семь фигур (3 луночки и 4 уголка) встречаются вместе, и все уголки превращаются в мультиволанчик. Этот мультиволанчик сразу же распадается на симметричную

пару троллейбусов и центральный воланчик, как это было при меньших значениях параметра α . Следовательно, у нас только два вида фолиаций:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 33 при $\varepsilon \in (\pi, \infty)$.

4.9. $\mu_3 < \alpha \leqslant 4\pi$. При $\alpha > \mu_3$ уголок соприкасается с лункой в момент $\varepsilon < \pi$, то есть до формирования мультилунки, и никакого мультиволанчика в этой ситуации не возникает. Теперь мы можем распространить функцию ε_1 на значения $\alpha > \mu_3$, но это уже будет момент, когда уголок соприкасается с отдельной лункой, корень которой расположен в точке $c_1 = 2\pi$. Этот момент даётся корнем уравнения

$$F_{1R}(2\pi + \varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_\infty(2\pi + \varepsilon, \varepsilon) = 0,$$

то есть

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{2\pi - \alpha}{\varepsilon} + 1} + \cos \varepsilon - \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\sin \varepsilon = 0, \quad (41)$$

что совпадает с уравнениями (34) и (18), в которых величина α заменена на $\alpha - 2\pi$. Полученная функция $\varepsilon_1(\alpha)$ убывает от $\varepsilon_1(\mu_3) = \pi$ до $\varepsilon_1(4\pi) \approx 2.88011$.

Пока $\varepsilon < \varepsilon_1$, уголок с вершиной в точке π стабилен, а при $\varepsilon > \varepsilon_1$ на лунке с корнем в точке c_1 возникает троллейбус и лунка начинает сужаться. Следовательно, уголок с вершиной в точке π начинает движение влево до того момента $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$, когда он наткнётся на лунку с центром в нуле. В силу симметрии, в тот же самый момент с этой центральной лункой соприкоснётся и тот уголок, что находится слева, и возникнет воланчик.

Сперва нам надо найти функцию $\ell_1(\varepsilon) = \ell_1(\varepsilon, \alpha)$, которая даёт горизонтальный размер лунки с корнем в точке c_1 . Поскольку над этой лункой у нас левый троллейбус, корень уравнения баланса

$$F_{1R}(u, \ell_1(\varepsilon), \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0 \quad (42)$$

должен давать положение правого конца лунки, то есть $u = b_1(\varepsilon) = 2\pi + \frac{1}{2}\ell_1(\varepsilon)$. Если это выражение для u подставить в уравнение (42), то мы получим уравнение, решение которого, расположенное в интервале

$(0, \pi)$, даёт интересующую нас функцию ℓ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{\frac{\ell_1 + 4\pi - 2\alpha}{2\varepsilon}} \\ + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \cos \frac{\ell_1}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} + \frac{2}{\ell_1} \right) \sin \frac{\ell_1}{2} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Теперь из уравнения баланса

$$F_{0R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{1L}(u, \ell_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (44)$$

мы можем определить функцию $\varepsilon_2(\alpha)$, если положим $u = \varepsilon$, то есть

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \cos \frac{\ell_1}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} - \frac{2}{\ell_1} \right) \sin \frac{\ell_1}{2} \right] e^{\frac{\ell_1 - 4\pi}{2\varepsilon} + 1} \\ - \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \cos \varepsilon + \frac{1 + 2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

В этом уравнении нет явной зависимости от параметра α . Эта зависимость неявная, так как функция $\ell_1(\varepsilon)$, определяемая уравнением (43), зависит от α .

Итак, пара уравнений (45) и (43) неявно задаёт соотношение между ε и α . Таким способом мы получаем функцию $\varepsilon_2(\alpha)$, которая убывает от $\varepsilon_2(\mu_3) = \pi$ до $\varepsilon_2(4\pi) \approx 3.132754$.

Теперь исследуем асимптотическое поведение троллейбуса и воланчика. Прежде всего отметим, что троллейбус никогда не исчезает. Действительно, если мы попытаемся найти те значения α и ε , при которых уравнение (43) имеет решение $\ell_1 = 0$, т.е. если положим $\ell_1 = 0$ в уравнении (43), то получим в левой части выражение

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{\frac{2\pi - \alpha}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \\ < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} [\sin \alpha + \varepsilon(\cos \alpha - 1)] e^{\frac{2\pi - \alpha}{\varepsilon}} < 0. \end{aligned}$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ уравнение баланса (43) принимает вид

$$\cos \alpha - \frac{2}{\ell_1} \sin \frac{\ell_1}{2} = 0,$$

чьё решение из промежутка $[0, \pi]$ и даёт нам предельный размер троллейбуса $\ell_1(\infty)$. Мы видим, что $\ell_1(\infty) \rightarrow 0$, когда $\alpha \rightarrow 4\pi$, то есть этот троллейбус никогда не исчезает, даже в пределе он сжимается до нуля лишь при $\alpha = 4\pi$.

Аналогично и центральный воланчик никогда не сужается до угла, и предельный размер центральной лунки совпадает с предельным размером лунки под троллейбусом. Чтобы это проверить, выпишем уравнение баланса

$$F_{0R}(u, \ell_0(\varepsilon), \varepsilon) + F_{1L}(u, \ell_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (46)$$

Мы знаем, что в случае воланчика точка баланса — это конец лунки, то есть равенство должно выполняться при $u = \frac{1}{2}\ell_0$. Подставляя это значение u в уравнение (46), получаем:

$$\begin{aligned} -\left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos \frac{\ell_1}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} - \frac{2}{\ell_1}\right) \sin \frac{\ell_1}{2}\right] e^{\frac{\ell_1+\ell_0-4\pi}{2\varepsilon}} \\ + \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos \frac{\ell_0}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{2}{\ell_0}\right) \sin \frac{\ell_0}{2}\right] = 0. \end{aligned}$$

Можно проверить, что у нас опять нет решения $\ell_0 = 0$, а в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ мы получаем соотношение

$$\frac{2}{\ell_1} \sin \frac{\ell_1}{2} - \frac{2}{\ell_0} \sin \frac{\ell_0}{2} = 0,$$

т.е. $\ell_0(\infty) = \ell_1(\infty)$.

Итак, у нас лишь две критические точки эволюции:

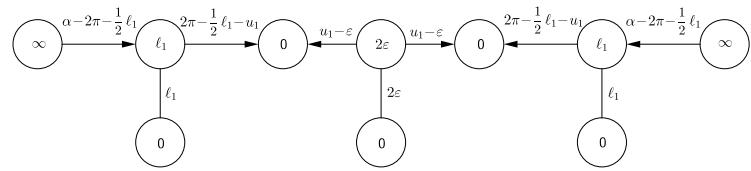
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки сталкиваются с соседними лунками, образуя два троллейбуса: левый с правой стороны и правый с левой стороны;
- при $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ два оставшихся уголка натыкаются на центральную лунку, образуя воланчик.

Для промежуточных значений ε фолиация имеет следующий вид:

- Рис. 23 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 35 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 33 при $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \infty)$.

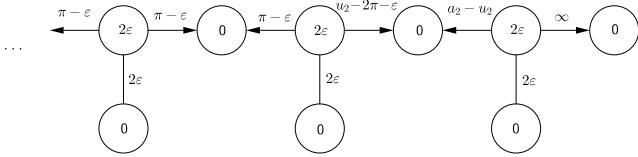
§5. $4\pi < \alpha \leqslant 5\pi$

5.1. $4\pi < \alpha \leqslant \alpha_{2,1}$. Теперь начинается история о пяти лунках. Пока $\varepsilon \in (0, \alpha - 4\pi]$, не происходит ничего интересного: у нас пять полных симметричных лунок вокруг точек $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, и четыре стабильных уголка с вершинами в точках $\pm\pi$ и $\pm 3\pi$. А после $\varepsilon = \alpha - 4\pi$ самая правая лунка начинает расти несимметрично. (Напомню, что в

Рис. 35. Фолиация при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$.

силу полной симметрии мы рассматриваем то, что происходит на положительной полуоси. Более того, граф фолиации теперь уже настолько велик, что по этой причине мы будем использовать его симметрию и приводить только правую его половину, см. Рис. 36.) Чтобы упростить обозначения, мы будем обозначать первую координату $a_2(\varepsilon)$ левого конца правой лунки просто буквой a , тогда $b_2(\varepsilon) = b = a + 2\varepsilon$ – это первая координата её правого конца. Мы знаем, что уравнение лунки даёт нам явное выражение (6) величины ε как функции координаты a , определённой на промежутке $(a_2(\infty), 8\pi - \alpha]$, где $a_2(\infty)$ – это единственное решение уравнения (7) из интервала $a \in (\frac{5}{2}\pi, 4\pi)$. Так же, как и в случае величины $a_1(\infty)$ при $\alpha \in (2\pi, \alpha_2]$, существует простая геометрическая интерпретация величины $a_2(\infty)$: это точка, где прямая, часть которой является графиком функции $f'(t)$ при $t > \alpha$, пересекает график функции $f'(t) = \sin t$ на интервале $(\frac{5}{2}\pi, 4\pi)$. Рис. 37 иллюстрирует это объяснение.

Величина $a_2(\infty)$ является предельным значением положения левого конца лунки с корнем в точке 4π , когда её правый конец стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow \infty$. График функции $a(\varepsilon)$, обратной к той, что задана выражением (6) при $\alpha = 4\pi + 1$, приведён на Рис. 38.

Рис. 36. Фолиация при $\varepsilon < \varepsilon_1$.

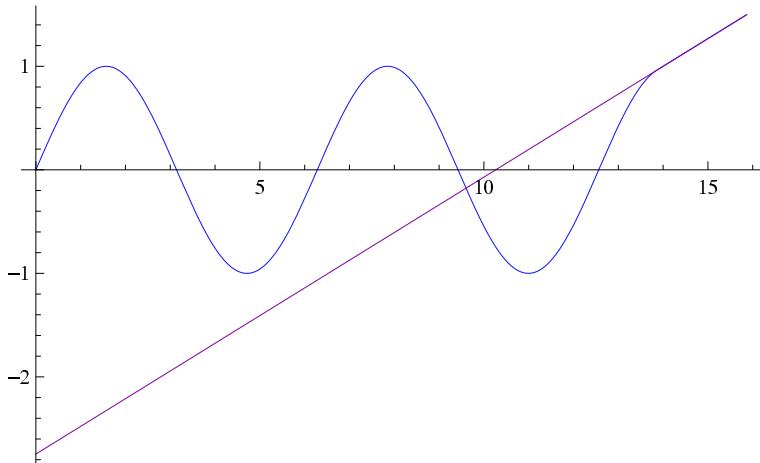


Рис. 37. График функции $f'(t)$ вместе с продолжением его линейной части.

До настоящего момента мы рассматривали изолированную правую лунку. Теперь надо исследовать, что происходит слева от неё. Левая сила полной правой лунки определяется выражением (9) с $\ell = 2\varepsilon$, то есть

$$\begin{aligned} F_{2La}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) &= \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \sin a - \cos a \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} ((a + 2\varepsilon - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha) \Big] e^{\frac{u-a}{\varepsilon}} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} (\varepsilon \cos u + \sin u). \end{aligned}$$

Мы заметили эту силу дополнительным индексом 2, который означает, что a — это конец хорды слева от корня $c_2 = 4\pi$, потому что чуть позже нам понадобится сила F_{1La} (про другой конец мы всегда предполагаем, что $b > \alpha$). Итак, решение уравнения

$$F_{1R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{2La}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad (47)$$

(точнее, та ветвь решения, которая начинается в точке $u = 3\pi$ при $\varepsilon = \alpha - 4\pi$) даёт нам функцию $u(\varepsilon)$, показывающую положение вершины уголка между самой правой лункой и её соседкой. Эта функция определена на промежутке $[\alpha - 4\pi, \varepsilon_1(\alpha)]$, где ε_1 — это тот момент,

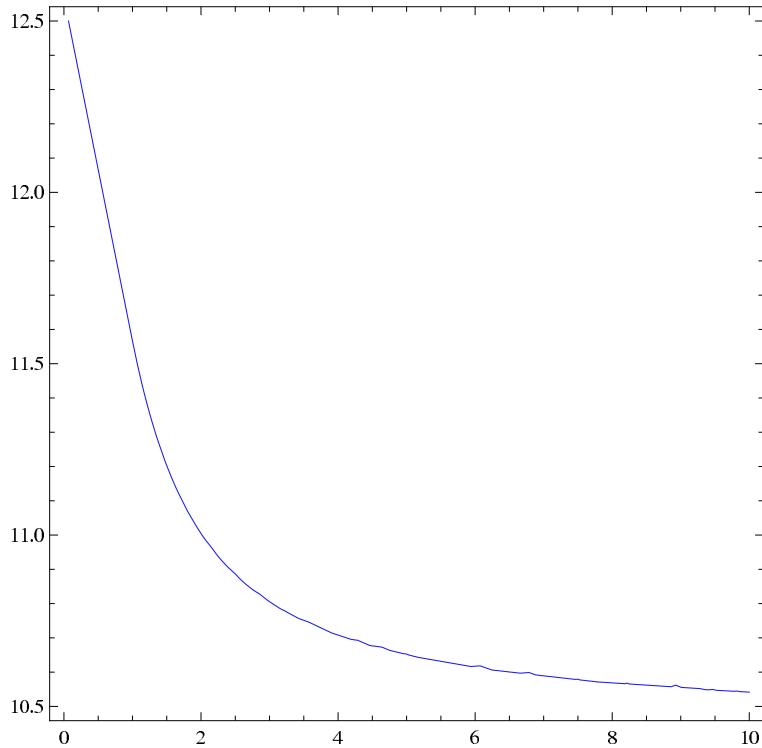
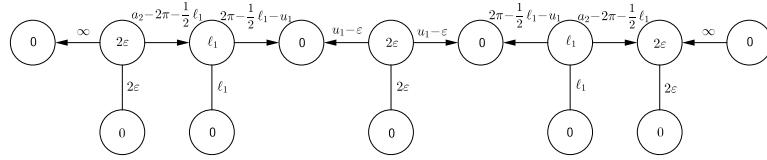


Рис. 38. Положение левого конца самой правой лунки как функция от ε , при $\alpha = 4\pi + 1$.

когда уголок сталкивается с левой лункой, то есть это такой момент, в который $u(\varepsilon_1) = 2\pi + \varepsilon_1$, и чтобы найти этот момент, нужно подставить $u = 2\pi + \varepsilon$ в уравнение (47), после чего получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \sin a - \cos a \right) + \frac{1}{2\varepsilon} ((a + 2\varepsilon - \alpha) \cos a + \sin a) \right] e^{1+\frac{2\pi-a}{\varepsilon}} \\ & + \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[\cos \varepsilon - \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\varepsilon \right) \sin \varepsilon \right] = 0. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \geq \varepsilon_1$ на лунке вокруг точки 2π появляется троллейбус (см. Рис. 39). Этот троллейбус сжимается, но никогда не исчезает, посколь-

Рис. 39. Фолиация при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$.

ку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F_{2La}(2\pi, 2\varepsilon, \varepsilon) = \cos \alpha - 1 < 0,$$

то есть хвост самой правой лунки никогда не покрывает точку 2π . Уравнение баланса для правого конца b_1 троллейбуса имеет вид

$$F_{1R}(b_1, 2(b_1 - 2\pi), \varepsilon) + F_{2La}(b_1, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0.$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow \infty$ оно превращается в уравнение

$$\frac{\sin b_1}{b_1 - 2\pi} = \cos \alpha.$$

Корень $b_1(\infty)$ этого уравнения из промежутка $[2\pi, \frac{5}{2}\pi]$ задаёт предельное положение правого конца хорды, до которого сжимается основание троллейбуса (ясно, что для левого конца имеет место выражение $a_1(\infty) = 4\pi - b_1(\infty)$).

Теперь посмотрим, что происходит левее этого троллейбуса. Уголок, который неподвижно находился в точке π до момента $\varepsilon = \varepsilon_1$, после этого начинает двигаться влево до тех пор, пока в некий момент $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ не столкнётся с центральной лункой. Положение вершины может быть найдено из уравнения (44), а чтобы найти критическое значение ε_2 , нужно решить это уравнение, положив в нём $u = \varepsilon$, то есть решить то же самое уравнение (45), как и раньше. Единственное отличие заключается в том, что теперь мы подставляем в него другую функцию $\ell_1(\varepsilon)$. Вместо того, чтобы брать решение уравнения (42) с $u = 2\pi + \frac{1}{2}\ell_1$ (или более явно – уравнение (43)), мы должны найти ℓ_1 из уравнения баланса

$$F_{1R}(u, \ell_1, \varepsilon) + F_{2La}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad (48)$$

$$\text{с } u = 2\pi + \frac{1}{2}\ell_1.$$

Таким образом, при $\varepsilon > \varepsilon_2$ у нас получается следующая фолиация: сжимающийся воланчик на симметричной лунке с корнем в нуле, два симметричных сжимающихся троллейбуса вокруг точек $\pm 2\pi$ и две симметричные бесконечно растущих лунки, внутренние концы которых стремятся к предельным точкам $\pm a_2(\infty)$, а внешние убегают на бесконечность (см. Рис. 40).

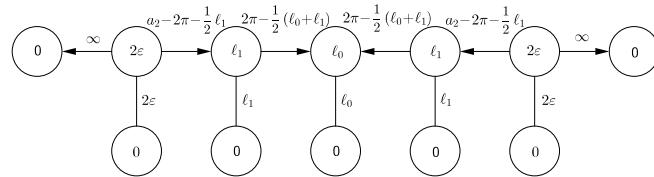


Рис. 40. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_2$.

Отметим, что предельный размер оснований у воланчика и у троллейбусов один и тот же. Действительно, предельное значение левой силы от лунки с корнем 2π равно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F_{1L}(u, \ell_1(\infty), \varepsilon) = \frac{2}{\ell_1(\infty)} \sin \frac{\ell_1(\infty)}{2} - \cos u.$$

Вместе с правой силой от лунки в нуле, равной $\cos u - \frac{\sin u}{u}$, получаем следующее уравнение баланса:

$$\frac{2}{\ell_1(\infty)} \sin \frac{\ell_1(\infty)}{2} - \frac{\sin u}{u} = 0,$$

решение которого $u = b_0(\infty) = \frac{1}{2}\ell_1(\infty) \in (0, \pi)$ даёт предельное положение правого конца основания симметричного воланчика ($a_0(\infty) = -b_0(\infty)$), то есть предельный размер этой базы $\ell_0(\infty)$ равен $b_0(\infty) - a_0(\infty) = \ell_1(\infty)$.

Однако описанная эволюция имеет место только в том случае, если самая правая лунка не настигает сжимающийся троллейбус. Покажем, что этого не случается при $\alpha \in (4\pi, \alpha_{2,1}]$.

Ситуацию, при которой такое может произойти, можно легко отыскать с помощью графика функции f' : мы должны найти такую прямую, проходящую через точку $(2\pi, 0)$, что уравнение луночки

$$\frac{f'(a) + f'(b)}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

выполняется для точек с абсциссами $a \in (\frac{5}{2}\pi, 3\pi]$ и $b \in (\frac{9}{2}\pi, \infty)$ (см. Рис. 41). Тогда точки $a = a_2(\varepsilon)$ и $b = b_2(\varepsilon)$ будут концами правой

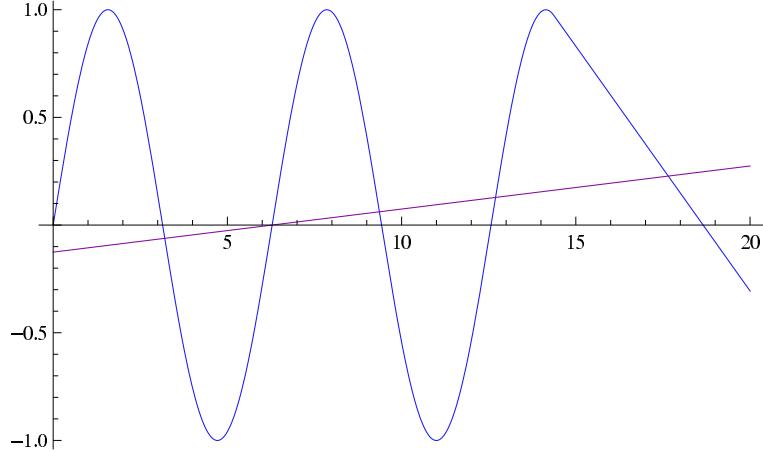


Рис. 41. Нахождение момента ε , когда появляется мультилунка.

лунки с корнем в точке $c_2 = 4\pi$, а $b_1(\varepsilon) = a$ и $a_1(\varepsilon) = 4\pi - a$ будут концами лунки с корнем $c_1 = 2\pi$.

Отметим, что описанная прямая является касательной к графику функции f' , если она касается графика в точке $t \in (4\pi, \frac{9}{2}\pi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\tan t = t - 2\pi.$$

Это – сдвинутый на 2π первый корень уравнения $\tan t = t$, то есть $\alpha_{2,1}$.

Итак, при рассматриваемых значениях параметра α эволюция будет почти такой же, как в предыдущем подпараграфе, у нас две таких же критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки сталкиваются с соседними лунками, образуя два троллейбуса: левый с правой стороны и правый с левой стороны;
- при $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно натыкаются на центральную лунку, образуя воланчик.

Ещё две лунки, появляющиеся на этой картинке (с корнями в точках $c_{\pm 2} = \pm 4\pi$), эволюционируют независимо, не взаимодействуя с

центральной частью картинки. Лишь при $\alpha = \alpha_{2,1}$ эти лунки захватывают троллейбусы в пределе: величина $b_1(\infty) = a_2(\infty)$ в этом случае является решением уравнения

$$\frac{\sin u}{u - 2\pi} = \cos \alpha_{2,1}$$

из интервала $(\frac{7}{2}\pi, 3\pi)$.

Напомним, что между критическими точками фолиация описывается следующими графами:

- Рис. 36 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 39 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 40 при $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \infty)$.

5.2. $\underline{\alpha_{2,1}} < \alpha \leqslant \alpha_4$. Теперь существует уже конечный момент ε , когда правая несимметричная лунка с корнем в точке c_2 настигает троллейбус, расположенный на лунке с корнем c_1 . В этот момент (обозначим данное значение ε символом δ_1) образуется мультилунка. Мы получаем новую фолиацию, представленную на Рис. 42.

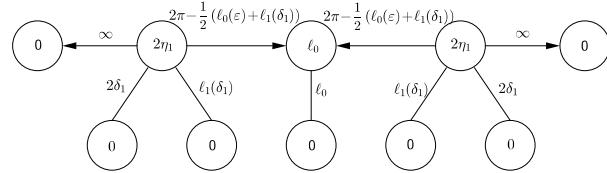


Рис. 42. Фолиация при $\delta_1 < \varepsilon < \eta_1$.

Вычислим функцию $\delta_1(\alpha)$, используя геометрическую картинку, описанную выше. Положим $a = a_2(\varepsilon)$, $b = b_2(\varepsilon) = a + 2\varepsilon$. Тогда из рисунка следует очевидная пропорция

$$\frac{f'(b)}{b - 2\pi} = \frac{f'(a)}{a - 2\pi},$$

которая даёт следующее выражение для ε :

$$\varepsilon = \frac{(a - 2\pi)[(a - a)\cos \alpha + \sin a - \sin \alpha]}{2[(a - 2\pi)\cos \alpha - \sin a]}.$$

Сравнение его с формулой (6) неявно определяет функцию $a(\alpha)$, возрастающую от $a_2(\infty)$ до 3π , когда α пробегает значения от $\alpha_{2,1}$ до 5π . После чего, используя либо приведённое выше выражение, либо формулу (6), мы получаем ε как функцию параметра α , что и является искомой функцией $\delta_1(\alpha)$, убывающей от бесконечности до π . Мы видим, что функция δ_1 , является 2π -периодической, то есть можно взять ту функцию δ_1 , что мы нашли на промежутке $(\alpha_2, 3\pi]$, и сдвинуть её на промежуток $(\alpha_{2,1}, 5\pi]$. Действительно, уравнение, определяющее функцию δ_1 является 2π -периодическим, или более точно, мы должны заменить α на $\alpha - 2\pi$ и a на $a - 2\pi$, если мы хотим перейти от уравнения для $\alpha \in (\alpha_2, 3\pi]$ к $\alpha \in (\alpha_{2,1}, 5\pi]$.

При $\varepsilon > \delta_1(\alpha)$ вплоть до момента $\eta_1(\alpha) = \frac{1}{2}\ell_1((\delta_1(\alpha))) + \delta_1(\alpha)$ у нас есть открытая мультилунка, которая превращается в замкнутую в момент $\varepsilon = \eta_1$. В этот момент над ней возникает область хорд, которая продолжает расти до бесконечности, то есть мы получаем составную лунку и соответствующая фолиация представлена на Рис. 43.

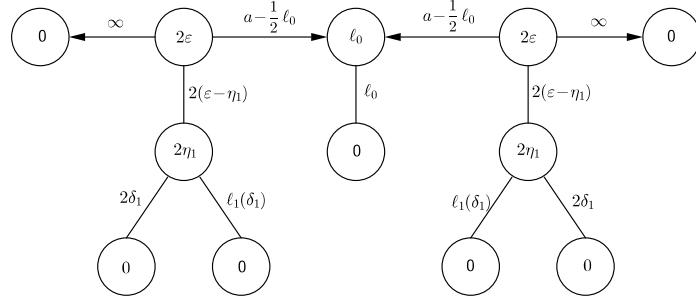


Рис. 43. Фолиация при $\varepsilon > \eta_1$.

Функция η_1 определена на том же интервале $(\alpha_{2,1}, 5\pi)$, что и δ_1 , она убывает от ∞ до 2π при $\varepsilon \rightarrow 5\pi_-$. Таким образом, мы могли бы положить $\eta_1(5\pi) = 2\pi$, но мы будем задавать эту функцию только на открытом промежутке. Причины для этого станут ясны при рассмотрении случая $\alpha = 5\pi$.

После момента $\varepsilon = \eta_1$ возможны два сценария: эта составная лунка в процессе роста либо наталкивается на троллейбус слева, либо нет. Если $\alpha \leq \alpha_4$, то осуществляется первый сценарий: эта лунка растёт

до бесконечности так, что её правый конец уходит на бесконечность, а левый стремится к предельному значению $a_1(\infty)$, которое является корнем уравнения (7). Единственное отличие от случая, рассмотренного в предыдущем подпараграфе, заключается в том, что теперь мы ищем решение a из промежутка $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Как уже было в случае величины $\alpha_{2,1}$, значение параметра α_4 таково, что растущая лунка сталкивается с центральным воланчиком в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$, то есть α_4 – это решение уравнения

$$\tan \alpha = \alpha, \quad \alpha \in (4\pi, 5\pi).$$

В результате для рассматриваемых значений α у нас четыре критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки сталкиваются с соседними лунками, образуя два троллейбуса: левый с правой стороны и правый с левой стороны;
- при $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно натыкаются на центральную лунку, образуя воланчик;
- при $\varepsilon = \delta_1(\alpha)$ самая левая и самая правая лунки сталкиваются с соседними троллейбусами, преобразуя их в мультилунки;
- при $\varepsilon = \eta_1(\alpha)$ эти две мультилунки завершают свою эволюцию, порождая две составные лунки.

В промежутках между критическими точками фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 36 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 39 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 40 при $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \delta_1)$;
- Рис. 42 при $\varepsilon \in (\delta_1, \eta_1)$;
- Рис. 43 при $\varepsilon \in (\eta_1, \infty)$.

Таким образом, после $\varepsilon = \eta_1$ две составные лунки и центральный воланчик продолжают свою независимую эволюцию. Воланчик сжимается до предельной ширины $\ell_0(\infty)$, определяемой, как и раньше, решением предельного уравнения

$$\frac{2}{\ell_0} \sin \frac{\ell_0}{2} = \cos \alpha$$

из промежутка $(0, \pi)$. У бесконечно растущих составных лунок один из концов верхней хорды стремится к предельному значению (поскольку эта хорда не задевает центральный воланчик). Так, левый конец

правой лунки стремится к значению $a_1(\infty)$, которое является единственным решением $a \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ уравнения (8).

5.3. $\alpha_4 < \alpha < 5\pi$. Если $\alpha > \alpha_4$, то у нас присутствуют все шаги эволюции, описанные в предыдущем подпараграфе. Однако теперь после $\varepsilon = \eta_1$ в некоторый момент $\varepsilon = \delta_2(\alpha)$ составная лунка столкнётся с центральным воланчиком. В тот же самый момент вторая составная лунка ударяется в центральный воланчик слева и появляется мультилунка, основанная на трёх лунках – двух составных и третьей простой. Соответствующая фолиация приведена на Рис. 44.

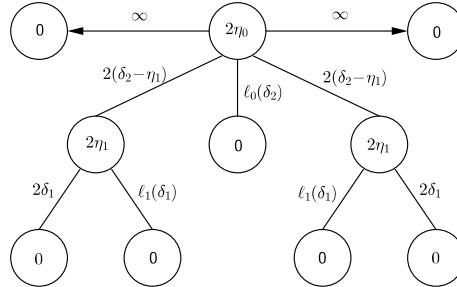


Рис. 44. Фолиация при $\delta_2 < \varepsilon < \eta_0$.

Чтобы найти функцию $\delta_2(\alpha)$, нужно решить уравнение

$$F_{0R}(\tfrac{1}{2}\ell_0(\varepsilon), \ell_0(\varepsilon), \varepsilon) + F_{1La}(\tfrac{1}{2}\ell_0(\varepsilon), 2\varepsilon, \varepsilon) = 0,$$

где функция F_{1La} задаётся выражением (9), а функция $a = a(\varepsilon)$ – это корень уравнения (6). Но теперь нам нужен не самый правый корень (из промежутка $(\frac{5}{2}\pi, \alpha)$), а самый левый, то есть корень из промежутка $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Такое решение ε есть по определению значение функции $\delta_2(\alpha)$ на промежутке $(\alpha_4, 5\pi)$. Эта функция убывает от ∞ до 2π . Как и η_1 , функция δ_2 определена на открытом интервале и не определена в точке 5π , несмотря на то, что она может быть непрерывно продолжена в эту точку.

При $\varepsilon > \delta_2$ эволюция уже проста: у нас есть одна открытая мультилунка, которая завершает свою эволюцию в момент $\varepsilon = \eta_0(\alpha) = b_0(\delta_2(\alpha)) + 2\delta_2(\alpha)$, порождая составную лунку, которая продолжает

свой рост до бесконечности. Соответствующая фолиация приведена на Рис. 45.

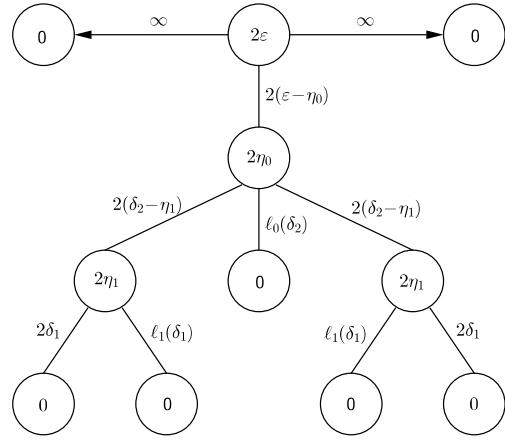


Рис. 45. Фолиация при $\varepsilon > \eta_0$.

Функция $\eta_0(\alpha)$ определена на промежутке $(\alpha_4, 5\pi]$ и убывает от ∞ до $\eta_0(5\pi) = 5\pi$.

В итоге мы делаем вывод, что при рассматриваемых значениях параметра α у нас шесть критических точек эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки сталкиваются с соседними лунками, образуя два троллейбуса: левый с правой стороны и правый с левой стороны;
- при $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно натыкаются на центральную лунку, превращаясь в воланчик;
- при $\varepsilon = \delta_1(\alpha)$ самая левая и самая правая лунки сталкиваются с соседними троллейбусами, преобразуя их в мультилунки;
- при $\varepsilon = \eta_1(\alpha)$ эти две мультилунки завершают свою эволюцию, порождая две составные лунки;
- при $\varepsilon = \delta_2(\alpha)$ две составные лунки натыкаются на центральный воланчик, преобразуя его в мультилунку;
- при $\varepsilon = \eta_0(\alpha)$ эта мультилунка завершает свою эволюцию, порождая составную лунку.

В промежутках между критическими точками фолиация описывается следующими графами:

- Рис. 36 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 39 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 40 при $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \delta_1)$;
- Рис. 42 при $\varepsilon \in (\delta_1, \eta_1)$;
- Рис. 43 при $\varepsilon \in (\eta_1, \infty)$;
- Рис. 44 при $\varepsilon \in (\delta_2, \eta_0)$;
- Рис. 45 при $\varepsilon \in (\eta_0, \infty)$.

5.4. $\alpha = 5\pi$. При $\alpha = 5\pi$, как и в случае $\alpha = 3\pi$, у нас только две критические точки эволюции. Такое происходит не только из-за многократных столкновений в момент $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_1 = \pi$, но и благодаря исчезновению критических точек $\eta_1 = \delta_2 = 2\pi$ (по данной причине мы и не определяли эти функции в точке $\alpha = 5\pi$). Итак, после момента $\varepsilon = \pi$ у нас одна общая мультилунка (см. Рис. 46). И остаётся ещё

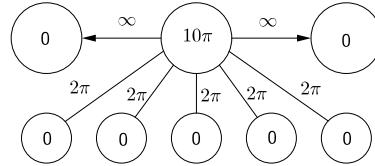


Рис. 46. Фолиация при $\pi < \varepsilon < 5\pi$.

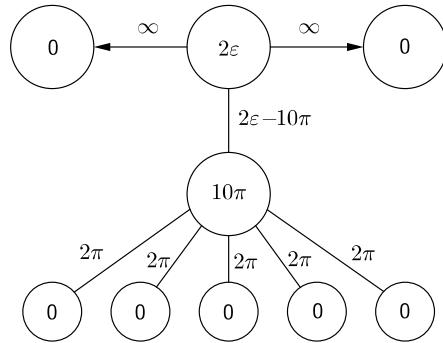
одна критическая точка, а именно, $\eta_0(5\pi) = 5\pi$, когда мультилунка завершает свою эволюцию (см. Рис. 47).

Таким образом, у нас только две критические точки:

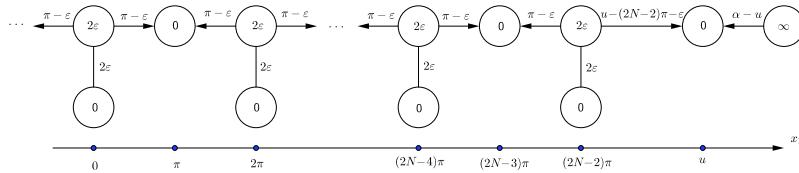
- при $\varepsilon = \pi$ все пять лунок объединяются, превращая четыре уголка между ними в общую мультилунку;
- при $\varepsilon = 5\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию и возникает составная лунка.

В промежутках фолиация описывается следующими графами:

- Рис. 36 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 46 при $\varepsilon \in (\pi, 5\pi)$;
- Рис. 47 при $\varepsilon \in (5\pi, \infty)$.

Рис. 47. Фолиация при $\varepsilon > 5\pi$.§6. $(2N - 1)\pi < \alpha \leqslant 2N\pi$

6.1. $(2N - 1)\pi < \alpha \leqslant \beta_{2N-1}$. При малых ε на положительной полуоси у нас N полных лунок с корнями в точках $2n\pi$, $0 \leq n \leq N - 1$, и мультилунка на толстом корне $c_N = [\alpha, +\infty)$. Ясно, что N уголков появляются в точках $(2n + 1)\pi$. Первые $N - 1$ из них стабильны, а самый правый уголок начинает двигаться вправо. Граф этой фолиации (правая половина этого симметричного графа) представлен на Рис. 48. Чтобы пояснить положение каждого элемента фолиации, под графиком приведена ось x_1 , на которой отмечены первые координаты вершин уголков и корней лунок. Положение вершины правого уголка

Рис. 48. Фолиация при $\varepsilon < \varepsilon_1$.

определяется уравнением

$$F_\infty(u, \varepsilon) + F_{(N-1)R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0,$$

где сила $F_\infty = F_{NL}$ задаётся той же самой формулой (10), как это было для $F_\infty = F_{1L}$, и $F_{nR}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) = F_{0R}(u - 2n\pi, 2\varepsilon, \varepsilon)$. Другими словами, мы получим уравнение баланса, если в уравнение (16) подставим $u - 2(N-1)\pi$ вместо u и $\alpha - 2(N-1)\pi$ вместо α :

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{u-2(N-1)\pi}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \sin u = 0. \quad (49)$$

Непрерывная ветвь $u(\varepsilon)$ решения этого уравнения, выходящая из точки $u(0) = (2N-1)\pi$, монотонно возрастает, пока не достигнет значения $u = \alpha$. Мы получим уравнение для того момента, когда уголок натолкнётся на правую мультилунку (то есть $u(\varepsilon) = \alpha$), если в уравнение (49) подставим $u = \alpha$:

$$\varepsilon^2 \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\varepsilon} \right] + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{\alpha-2(N-1)\pi}{\varepsilon}} = 0. \quad (50)$$

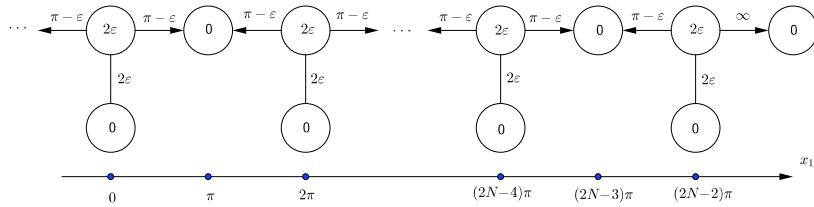
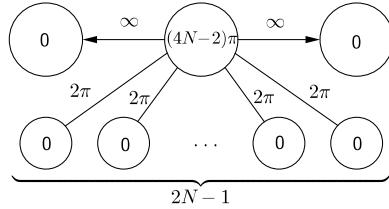
Корень этого уравнения даёт нам значение функции $\varepsilon_1(\alpha)$. Отметим, что это уравнение может быть получено из уравнения (16) путём замены α на $\alpha - 2(N-1)\pi$, следовательно, $\varepsilon_1(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha - 2(N-1)\pi)$. Это означает, что функция ε_1 является 2π -периодичной на семействе промежутков $[(2n-1)\pi, \beta_{2n-1}]$, $1 \leq n \leq N$. Подставляя $\varepsilon = \pi$ в уравнение (50), получаем:

$$\pi^2 \cos \alpha - \pi \sin \alpha - e^{2N-1-\frac{\alpha}{\pi}} = 0. \quad (51)$$

Напомним (см. (12)), что единственное решение этого уравнения, расположеннное в интервале $((2N-1)\pi, (2N-\frac{1}{2})\pi)$, было обозначено символом β_{2N-1} .

При $\varepsilon > \varepsilon_1(\alpha)$ эволюция тривиальна: после того, как самый правый (так же как и самый левый) уголок убежал в момент ε_1 на бесконечность (если говорить более строго, он дошёл до точки α , превратив бесконечную мультилунку в мультитроллейбус, который тут же распался), все лунки (в количестве $2N-1$) продолжают расти симметрично относительно своих корней в точках $c_n = 2n\pi$, $-N < n < N$, между ними $2N-2$ уголка сохраняют своё стабильное положение в точках $v_n = (2n-1)\pi$, $-N \leq n < N$. Соответствующая фолиация описывается графиком на Рис. 49.

В момент $\varepsilon = \pi$ все уголки образуют общую мультилунку, которая растёт до момента $\varepsilon = (2N-1)\pi$ (см. Рис. 50), после чего она становится стабильной замкнутой лункой, а над ней начинает расти область

Рис. 49. Фолиация при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \pi$.Рис. 50. Фолиация при $\pi < \varepsilon < (2N-1)\pi$.

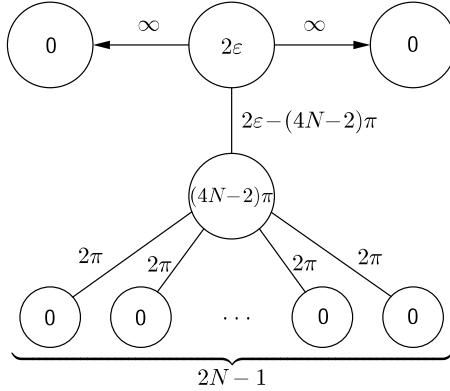
хорд. Получившаяся составная лунка продолжает расти до бесконечности, поглощая бесконечные области касательных слева и справа от неё (см. Рис. 51).

Итак, подводя итоги, можно сказать, что у нас три критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(a)$ самый левый и самый правый уголки убегают на бесконечность;
- при $\varepsilon = \pi$ все лунки (их $2N - 1$) соприкасаются со своими соседями и $2N - 2$ уголка между ними образуют общую мультилунку;
- при $\varepsilon = (2N - 1)\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию и возникает составная лунка.

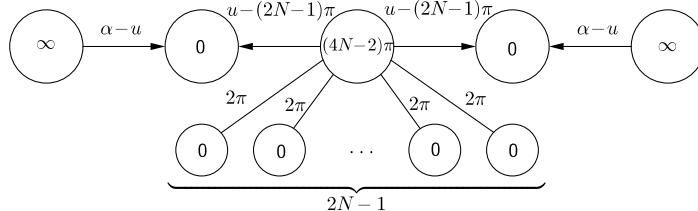
В промежутках между критическими точками фолиации описываются следующими графами

- Рис. 48 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 49 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \pi)$;

Рис. 51. Фолиация при $\varepsilon > (2N - 1)\pi$.

- Рис. 50 при $\varepsilon \in (\pi, (2N - 1)\pi)$;
- Рис. 51 при $\varepsilon \in ((2N - 1)\pi, \infty)$.

6.2. $\beta_{2N-1} < \alpha \leq \gamma_{2N-1}$. При таких α мультилунка появляется раньше, чем самый правый уголок достигает точки α , но всё же он это делает до того, как мультилунка завершит свою эволюцию. Следовательно, при $\varepsilon < \pi$ у нас та же фолиация, что на Рис. 48, но в дальнейшем у нас есть и мультилунка, и убегающий уголок, см. Рис. 52.

Рис. 52. Фолиация при $\pi < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Теперь при $\varepsilon > \pi$ уравнение баланса уже отличается от уравнения (49). В этой ситуации уравнением баланса будет следующее уравнение:

$$F_{0R}(u, (4N - 2)\pi, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0,$$

то есть

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} - e^{\frac{(2N-1)\pi-u}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \sin u = 0. \quad (52)$$

Чтобы получить функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ на выбранном промежутке значений параметра α , нужно в этом уравнении положить $u = \alpha$. В результате получим

$$\varepsilon^2 \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\varepsilon} \right] - e^{\frac{(2N-1)\pi-\alpha}{\varepsilon}} = 0. \quad (53)$$

Это уравнение определяет функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ до того момента, когда её значение станет равно $(2N - 1)\pi$, когда мультилунка завершает свою эволюцию. Это ещё раз меняет уравнение баланса. Такое случается (т.е. $\varepsilon_1 = (2N - 1)\pi$) при $\alpha = \gamma_{2N-1}$. Действительно, подставляя $\varepsilon = (2N - 1)\pi$ в уравнение (53), получим

$$(2N - 1)^2 \pi^2 \cos \alpha - (2N - 1)\pi \sin \alpha - e^{1 - \frac{\alpha}{(2N-1)\pi}} = 0. \quad (54)$$

По определению (см. формулу (13)), единственное решение этого уравнения из промежутка $((2N - 1)\pi, (2N - \frac{1}{2})\pi)$ как раз и является величиной γ_{2N-1} . Отметим, что значения γ_{2n-1} становятся всё ближе и ближе к $(2n - \frac{1}{2})\pi$ при $n \rightarrow \infty$.

Ещё одно замечание о “локальной 2π -периодичности” функции $\varepsilon_1(\alpha)$. Взглянув на уравнение (53), мы видим, что

$$\varepsilon_1(\alpha)|_{[\beta_{2n-1}, \gamma_{2n-1}]} = \varepsilon_1(\alpha + 2\pi)|_{[\beta_{2n+1}, \gamma_{2n-1} + 2\pi]}.$$

Итак, у нас те же самые три критических точки эволюции, но в другом порядке:

- при $\varepsilon = \pi$ все лунки (их $2N - 1$) соприкасаются со своими соседями и $2N - 2$ уголка между ними образуют общую мультилунку;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки убегают на бесконечность;
- при $\varepsilon = (2N - 1)\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию и возникает составная лунка.

Между этими значениями фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 48 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 52 при $\varepsilon \in (\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 50 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, (2N-1)\pi)$;
- Рис. 51 при $\varepsilon \in ((2N-1)\pi, \infty)$.

6.3. $\gamma_{2N-1} < \alpha < \alpha_{2N-1}$. Теперь мультилунка завершает свою эволюцию до того, как самая правая лунка достигает точки α , и после момента $\varepsilon = (2N-1)\pi$ у нас будет новая фолиация (см. Рис. 53).

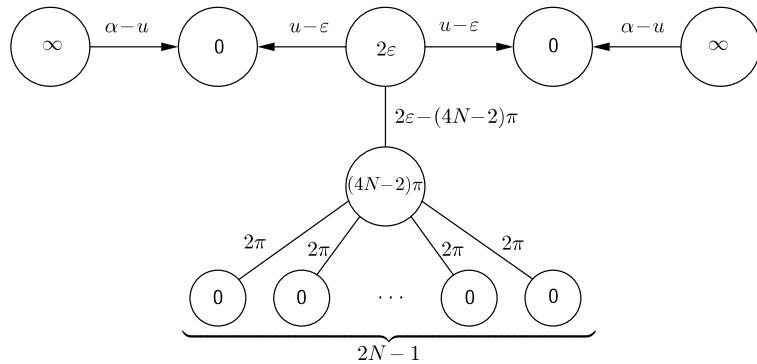


Рис. 53. Фолиация при $(2N-1)\pi < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Уравнение баланса теперь принимает вид

$$F_{0R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0, \quad (55)$$

то есть мы возвращаемся к уравнению (32):

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{u}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \sin u = 0. \quad (56)$$

Однако теперь мы ищем решение u из промежутка $u \in [(2N-1)\pi, \alpha]$. Опять же, значение ε , при котором величина u достигает значения α (то есть функция $\varepsilon_1(\alpha)$), может быть определено из уравнения (33):

$$\varepsilon^2 \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\varepsilon} \right] + \left[\cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right] e^{1-\frac{\alpha}{\varepsilon}} = 0. \quad (57)$$

Здесь нас интересует решение $\varepsilon \in [(2N - 1)\pi, \alpha_{2N-1}]$. Отметим, что решение уравнения (53) непрерывно продолжается решением уравнения (57): если в любом из них положить $\varepsilon = (2N - 1)\pi$, мы получим уравнение (54), которое нам даёт точку $\alpha = \gamma_{2N-1}$, однако на этом интервале функция $\varepsilon_1(\alpha)$ теряет свойство 2π -периодичности.

В результате у нас опять те же три критические точки эволюции, только в ином порядке:

- при $\varepsilon = \pi$ все лунки (в количестве $2N - 1$) соприкасаются со своими соседями, и $2N - 2$ уголка между ними образуют общую мультилунку;
- при $\varepsilon = (2N - 1)\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию и возникает составная лунка;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки убегают на бесконечность.

Между этими значениями фолиация описывается следующими графами:

- Рис. 48 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 52 при $\varepsilon \in (\pi, (2N - 1)\pi)$;
- Рис. 53 при $\varepsilon \in ((2N - 1)\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 51 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \infty)$.

Мы завершили исследование эволюции, для тех α , которые попадают в интервал $\alpha \in ((2N - 1)\pi, \alpha_{2N-1})$. Можно сделать вывод, что при таких значениях параметра α два крайних уголка (самый правый и симметричный ему уголок на отрицательной полуоси) не взаимодействуют с остальной частью картины, они монотонно расходятся, убегая на бесконечность в момент $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$. Все лунки (напомним, их $2N - 1$) эволюционируют независимо, $2N - 2$ уголка между ними остаются неподвижными и превращаются в мультилунку в момент $\varepsilon = \pi$. До момента $\varepsilon = (2N - 1)\pi$ у нас развивается мультилунка, после чего возникает составная лунка при двух областях касательных, левой и правой, и эта симметричная лунка уже растёт до бесконечности.

6.4. $\alpha = \alpha_{2N-1}$. Случай $\alpha = \alpha_{2N-1}$ отличается от описанного выше тем, что растущая лунка захватывает уголки в последний момент их убегания на бесконечность, то есть в момент, когда они образуют области линейности вплоть до бесконечности. Так что область линейности сформировалась над хордой длины $2\alpha_{2N-1}$, и она является стабильной бесконечной мультилункой. Это означает, что после

$\varepsilon > \alpha_{2N-1}$ функция Беллмана уже не меняется, лишь происходит увеличение её области определения.

Следовательно, в этом случае все критические точки те же, что и в предыдущем подпараграфе, и единственное отличие заключается в том, что после момента $\varepsilon = \varepsilon_1 = \alpha_{2N-1}$ фолиация теперь описывается графом на Рис. 54.

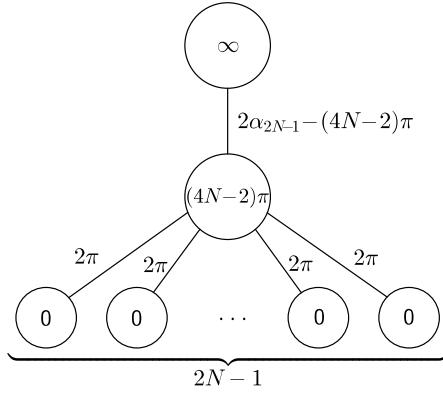


Рис. 54. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_1 = \alpha_{2N-1}$.

6.5. $\alpha_{2N-1} < \alpha \leqslant (2N - \frac{1}{2})\pi$. При таких α вершина уголка достигает своего крайне правого положения (оно теперь меньше, чем α) и поворачивает назад, убывая до момента столкновения с составной лункой. Как и раньше, положение этого уголка определяется уравнением баланса (55) (или (56) в явной записи). Итак, чтобы определить момент столкновения уголка с лункой, нужно положить $\varepsilon = u$. Следовательно, этот момент (обозначаемый, как и раньше, символом $\varepsilon_1(\alpha)$) можно найти, решая уравнение

$$\varepsilon (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{1 - \frac{\alpha}{\varepsilon}} + \cos \varepsilon - \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin \varepsilon = 0. \quad (58)$$

Поскольку наше уравнение предполагает, что первая координата правого конца лунки не меньше, чем $(2N - 1)\pi$, мы должны отсечь

функцию ε_1 по уровню $\varepsilon = (2N - 1)\pi$. Это даёт нам максимальное значение параметра α , при котором можно использовать уравнение (58) для определения функции ε_1 . Если в уравнение (58) подставить $\varepsilon = (2N - 1)\pi$, получим

$$((2N - 1)^2 \pi^2 \cos \alpha + (2N - 1)\pi \sin \alpha) e^{1 - \frac{\alpha}{(2N - 1)\pi}} - 1 = 0. \quad (59)$$

Нам нужен единственный корень этого уравнения из промежутка $\alpha \in ((2N - \frac{1}{2})\pi, 2N\pi)$. По определению (см. (14)), этим корнем является $\alpha = \lambda_{2N-1}$. Таким образом, уравнение (58) задаёт функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ на промежутке $[\alpha_{2N-1}, \lambda_{2N-1}]$, убывающую от $\varepsilon_1(\alpha_{2N-1}) = \alpha_{2N-1}$ до $\varepsilon_1(\lambda_{2N-1}) = (2N - 1)\pi$. Отметим, что так как мы сейчас всё рассматриваем при $\alpha \leq (2N - \frac{1}{2})\pi < \lambda_{2N-1}$, то $\varepsilon_1(\alpha) > (2N - 1)\pi$.

В момент $\varepsilon_1(\alpha)$, когда уголок наталкивается на лунку (благодаря симметрии левый и правый уголок делают это одновременно), у нас получается воланчик. Он сужается при возрастании ε . Соответствующая фолиация описывается рисунком 55.

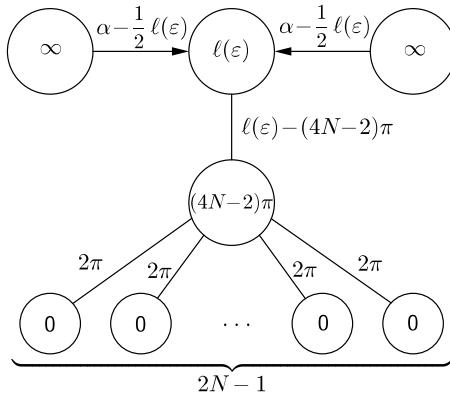


Рис. 55. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Положение правого конца лунки можно найти, решая уравнение

$$F_{0R}(u, 2u, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0,$$

то есть

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \left[(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{\frac{u-\alpha}{\varepsilon}} - \sin u - \varepsilon \cos u \right] + \cos u - \frac{\sin u}{u} = 0. \quad (60)$$

При росте ε воланчик сужается, то есть решение $u(\varepsilon)$ этого уравнения является убывающей функцией. Отметим, что мы можем использовать данное уравнение только до того момента, когда воланчик на составной лунке превратится в мультиволанчик. Покажем, что этого никогда не случится, если $\alpha \leq (2N - \frac{1}{2})\pi$. Подставляя $u = (2N - 1)\pi$ в уравнение (60), мы получаем следующее равенство:

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{(2N-1)\pi-\alpha}{\varepsilon}} = 1, \quad (61)$$

что невозможно при рассматриваемых значениях параметра α , поскольку $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha \leq 0$. Следовательно, $u = (2N - 1)\pi$ не удовлетворяет уравнению (60) ни при каких ε .

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow \infty$ в уравнении (60), мы получаем уравнение

$$\frac{\sin u}{u} = \cos \alpha.$$

При $\alpha \in [\alpha_{2N-1}, (2N - \frac{1}{2})\pi]$ это уравнение имеет единственное решение u_∞ , убывающее от $u_\infty(\alpha_{2N-1}) = \alpha_{2N-1}$ до $u_\infty((2N - \frac{1}{2})\pi) = (2N - 1)\pi$. Величина u_∞ определяет то, до какого предела сжимается воланчик, когда $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Итак, у нас три следующие критические точки эволюции:

- при $\varepsilon = \pi$ все лунки (в количестве $2N - 1$) соприкасаются со своими соседями и $2N - 2$ уголка между ними образуют общую мультилунку;
- при $\varepsilon = (2N - 1)\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию и возникает составная лунка;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки натыкаются на составную лунку, превращаясь в воланчик.

Между этими значениями фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 48 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 52 при $\varepsilon \in (\pi, (2N - 1)\pi)$;
- Рис. 53 при $\varepsilon \in ((2N - 1)\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 55 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \infty)$.

6.6. $(2N - \frac{1}{2})\pi < \alpha < \lambda_{2N-1}$. Пока $\varepsilon \leq \varepsilon_1(\alpha)$, эволюция та же самая, что и в предыдущем подпараграфе (функция $\varepsilon_1(\alpha)$ была определена

на интервале $[\alpha_{2N-1}, \lambda_{2N-1}]$), однако после этого момента она отличается. Теперь у нас есть ещё четвёртая критическая точка, а именно, момент, когда база воланчика сжимается до размера $(4N-2)\pi$, и когда воланчик на составной лунке превращается в мультиволанчик. Это критическое значение величины ε (обозначаемое символом $\varepsilon_2(\alpha)$) удовлетворяет уравнению (61). Действительно, нам надо найти такое ε , при котором точка $u = (2N-1)\pi$ является корнем уравнения баланса (60). А как раз таким способом мы получили уравнение (61). Функция $\varepsilon_2(\alpha)$ убывает от $+\infty$ до значения $\varepsilon_2(\lambda_{2N-1}) = (2N-1)\pi$.

Отметим, что уравнение (61) инвариантно относительно замены α на $\alpha+2\pi$ (и соответственно, N на $N+1$), следовательно, ε_2 является 2π -периодической функцией, заданной на промежутках $((2n-\frac{1}{2})\pi, \lambda_{2n-1}]$, которые становятся короче и короче с возрастанием номера n .

В момент $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ воланчик на составной лунке превращается в мультиволанчик, который немедленно распадается на $2N-1$ кусков: центральный воланчик и $N-1$ пару симметричных троллейбусов, эти фигуры сужаются при $\varepsilon \rightarrow \infty$, но никогда не исчезают. Мы получаем фолиацию, правая половина которой представлена на Рис. 56.

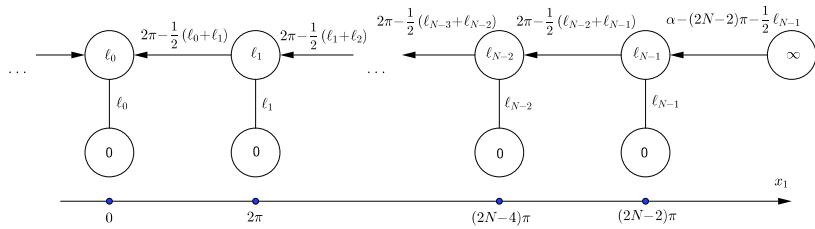


Рис. 56. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_2$.

Более подробное исследование их поведения проведено в двух последующих подпараграфах, где эта комбинация центрального воланчика и двух симметричных семейств троллейбусов также возникает при достаточно больших ε .

Как было уже сказано, у нас теперь четыре критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \pi$ все лунки (в количестве $2N-1$) соприкасаются со своими соседями и $2N-2$ уголка между ними образуют общую мультилунку;

- при $\varepsilon = (2N - 1)\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию и возникает составная лунка;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки натыкаются на составную лунку, превращаясь в воланчик;
- при $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ исчезает база воланчика и он вместе с лежащей ниже мультилункой образуют мультиволанчик, который в тот же самый момент превращается в объединение центрального воланчика и $N - 1$ пары симметричных троллейбусов.

В промежутках фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 48 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 52 при $\varepsilon \in (\pi, (2N - 1)\pi)$;
- Рис. 53 при $\varepsilon \in ((2N - 1)\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 55 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 56 при $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \infty)$.

6.7. $\lambda_{2N-1} \leq \alpha < \mu_{2N-1}$. Отметим, что

$$\varepsilon_1(\lambda_{2N-1}) = \varepsilon_2(\lambda_{2N-1}) = (2N - 1)\pi,$$

то есть в этот момент левый и правый уголки соприкасаются не с составной лункой (область хорд ещё не успела вырасти над мультилункой), а с полной мультилункой, образуя мультиволанчик. Если $\alpha > \lambda_{2N-1}$, то уголки соприкасаются с мультилункой ещё до завершения её эволюции, и точно так же возникает мультиволанчик.

Напомним, что символом $\varepsilon_1(\alpha)$ мы обозначали момент соприкосновения самого правого уголка с одной из соседних лунок (сейчас это момент возникновения мультиволанчика). Чтобы нашу функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ распространить на значения аргумента $\alpha > \lambda_{2N-1}$, нужно найти момент, когда вершина уголка вернётся в своё исходное положение $u = (2N - 1)\pi$. Уравнение баланса в точке $u = (2N - 1)\pi$ имеет следующий вид:

$$F_{1R}((2N - 1)\pi, 2\pi, \varepsilon) + F_\infty((2N - 1)\pi, \varepsilon) = 0. \quad (62)$$

Поскольку $D_R((2N - 3)\pi, (2N - 1)\pi) = D_R(-(2N - 1)\pi, (2N - 1)\pi)$, мы получаем то же уравнение (61), что определяло функцию $\varepsilon_2(\alpha)$ на промежутке $((2N - \frac{1}{2})\pi, \lambda_{2N-1}]$. Но теперь мы обозначим эту функцию через $\varepsilon_1(\alpha)$. На самом деле разумно считать, что $\varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N$ на предыдущем интервале изменения параметра α и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N$ на данном промежутке, поскольку это как раз тот момент, когда каждый уголок “объединяется” с соседней лункой и появляется $N - 1$

пара троллейбусов и центральный воланчик. Мы увидим, что при $\alpha > \mu_{2N-1}$ они будут возникать в разные моменты времени. Поскольку уравнение (37) инвариантно относительно сдвига на 2π , эта функция 2π -периодична. На рассматриваемом промежутке она убывает от $\varepsilon_1(\lambda_{2N-1}) = (2N-1)\pi$ до $\varepsilon_1(\mu_{2N-1}) = \pi$.

Рассмотрим теперь эволюцию при $\varepsilon > \varepsilon_1$. Наш мультиволанчик сразу же распадается на $N-1$ пару симметричных троллейбусов и центральный воланчик. Все они сжимаются при росте ε , но никогда не исчезают. Действительно, уравнение

$$F_{(N-1)R}(u, 2u - 4(N-1)\pi, \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0, \quad (63)$$

определенное положение правого конца $u = b_{N-1}(\varepsilon)$ правого троллейбуса, в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\cos \alpha = \frac{\sin u}{u - 2(N-1)\pi}. \quad (64)$$

Напомню обозначение $\ell_n(\varepsilon) = b_n(\varepsilon) - a_n(\varepsilon)$ для “горизонтального размера” базовой хорды n -го троллейбуса. Тогда $b_n = 2n\pi + \frac{1}{2}\ell_n$, и мы можем найти значение $\ell_{N-1}(\infty)$, решив уравнение

$$\cos \alpha = \frac{2}{\ell_{N-1}(\infty)} \sin \frac{\ell_{N-1}(\infty)}{2}, \quad \ell_{N-1}(\infty) \in [0, \pi].$$

Заметим, что все другие троллейбусы, равно как и воланчик в центре картинки, в пределе имеют в своём основании хорду точно такой же длины. Действительно, уравнение баланса в точке $u = b_{n-1}(\varepsilon)$

$$F_{(n-1)R}(u, \ell_{n-1}, \varepsilon) + F_{nL}(u, \ell_n, \varepsilon) = 0,$$

в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ превращается в

$$\frac{2}{\ell_{n-1}(\infty)} \sin \frac{\ell_{n-1}(\infty)}{2} = \frac{2}{\ell_n(\infty)} \sin \frac{\ell_n(\infty)}{2},$$

откуда $\ell_{n-1}(\infty) = \ell_n(\infty)$.

Заключаем, что у нас только две критических точки эволюции:

- при $\varepsilon = \pi$ все лунки (в количестве $2N-1$) соприкасаются со своими соседями и $2N-2$ уголка между ними образуют общую мультилунку;
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ два оставшихся уголка натыкаются на мультилунку, объединяясь с ней в мультиволанчик, который в тот же самый момент превращается в объединение центрального воланчика и $N-1$ пары симметричных троллейбусов.

В промежутках фолиация описывается следующими графами:

- Рис. 48 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 52 при $\varepsilon \in (\pi, \varepsilon_1)$;
- Рис. 56 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \infty)$.

6.8. $\alpha = \mu_{2N-1}$. Поскольку $\varepsilon_1(\mu_{2N-1}) = \pi$, у нас лишь одна критическая точка эволюции $\varepsilon = \pi$, когда все $4N - 1$ фигуры ($2N - 1$ лунка и $2N$ уголков) соприкасаются друг с другом, и все уголки превращаются в один общий мультиволанчик. Этот мультиволанчик тут же распадается на центральный воланчик и $N - 1$ пару симметричных троллейбусов, как это было при меньших значениях параметра α . Таким образом, при $\varepsilon < \pi$ у нас имеет место фолиация, показанная на Рис. 48, а при $\varepsilon > \pi$ сразу возникает фолиация с Рис. 56.

6.9. $\mu_{2N-1} < \alpha \leq 2N\pi$. При $\alpha > \mu_{2N-1}$ уголок натыкается на лунку в момент $\varepsilon < \pi$ до образования мультилунки, то есть никакого мультиволанчика не образуется в этой ситуации. Мы можем распространить функцию ε_1 на значения параметра $\alpha > \mu_{2N-1}$, но теперь это будет момент, когда уголок сталкивается с изолированной лункой с корнем в точке $c_{N-1} = 2(N-1)\pi$. Этот момент даётся корнем уравнения

$$F_{(N-1)R}(c_{N-1} + \varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_\infty(c_{N-1} + \varepsilon, \varepsilon) = 0,$$

то есть

$$\varepsilon(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)e^{\frac{2(N-1)\pi-\alpha}{\varepsilon}+1} + \cos \varepsilon - \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin \varepsilon = 0, \quad (65)$$

которое опять инвариантно относительно сдвига $\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi$, т.е. функция ε_1 на промежутках $[\mu_{2n-1}, 2n\pi]$ является 2π -периодической.

При $\varepsilon < \varepsilon_1$ уголки с вершинами в точках $(2n-1)\pi$, $1 \leq n \leq N-1$, стабильны, а при $\varepsilon > \varepsilon_1$ появляется троллейбус на лунке с вершиной в точке c_{N-1} , и мы получаем фолиацию, представленную на Рис. 57.

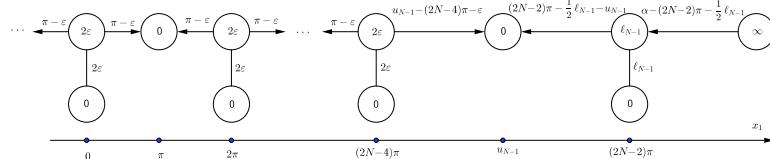


Рис. 57. Фолиация при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$.

Лунка под троллейбусом начинает сужаться, и поэтому уголок с вершиной в точке $(2N-3)\pi$ начинает двигаться влево до того момента $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$, когда он натолкнётся на лунку с корнем в точке $c_{N-2} = (2N-4)\pi$ и появится вторая пара троллейбусов (см. Рис. 58).

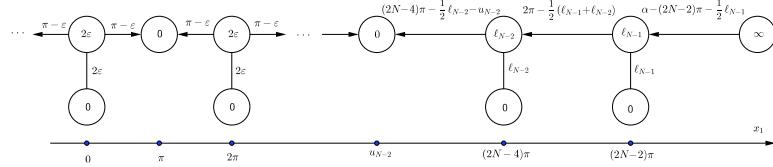


Рис. 58. Фолиация при $\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3$.

Чтобы определить тот момент, когда это произойдёт, нам сперва надо найти функцию $\ell_{N-1}(\varepsilon) = \ell_{N-1}(\varepsilon, \alpha)$, дающую горизонтальный размер лунки с корнем в точке c_{N-1} . Поскольку у нас на этой лунке левый троллейбус, корень уравнения баланса

$$F_{(N-1)R}(u, \ell_{N-1}(\varepsilon), \varepsilon) + F_\infty(u, \varepsilon) = 0 \quad (66)$$

должен располагаться в правом конце лунки, то есть в точке $u = b_{N-1}(\varepsilon) = 2(N-1)\pi + \frac{1}{2}\ell_{N-1}(\varepsilon)$. Если подставить это выражение для u в уравнение (66), мы получим уравнение, решение которого, попадающее в интервал $(0, \pi)$, и даёт нам требуемую функцию ℓ_{N-1} :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) e^{\frac{\ell_{N-1}+4(N-1)\pi-2\alpha}{2\varepsilon}} \\ & + \frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos \frac{\ell_{N-1}}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{2}{\ell_{N-1}} \right) \sin \frac{\ell_{N-1}}{2} = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Между прочим, мы видим, что функция ℓ_{N-1} инвариантна относительно сдвигов параметра α на 2π , или более точно, $\ell_{N-1}(\varepsilon, \alpha) = \ell_N(\varepsilon, \alpha + 2\pi)$, что вполне естественно, поскольку размер любого левого троллейбуса определяется только поведением функции f справа от него.

Теперь мы можем определить функцию $\varepsilon_2(\alpha)$ из уравнения баланса

$$F_{(N-2)R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{(N-1)L}(u, \ell_{N-1}(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad (68)$$

если положим $u = c_{N-2} + \varepsilon$, т.е.,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos \frac{\ell_{N-1}}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} - \frac{2}{\ell_{N-1}} \right) \sin \frac{\ell_{N-1}}{2} \right] e^{\frac{\ell_{N-1}-4\pi}{2\varepsilon}+1} \\ & - \frac{1}{1+\varepsilon^2} \cos \varepsilon + \frac{1+2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

В этом уравнении нет явной зависимости от α . Эта зависимость является неявной, потому что функция $\ell_{N-1}(\varepsilon)$, задаваемая уравнением (67), зависит от параметра α . А условие 2π -периодичности функции ℓ_{N-1} влечёт такое же свойство функции ℓ_{N-2} , или более точно, $\ell_{N-2}(\varepsilon, \alpha) = \ell_{N-1}(\varepsilon, \alpha + 2\pi)$.

Итак, два уравнения (69) и (67) дают нам неявное соотношение между ε и α . Таким способом мы получаем функцию $\varepsilon_2(\alpha)$, убывающую от $\varepsilon_2(\mu_{2N-1}) = \pi$ до $\varepsilon_2(2N\pi)$.

Можно продолжать таким же образом и определить все функции $\varepsilon_n(\alpha)$, $1 \leq n \leq N$, задающие моменты образования n -го троллейбуса. Структура промежуточной фолиации (когда у нас $2k$ уголков перемещаются с $2k-1$ полной лункой и ещё есть $N-k$ симметричных пар лунок с троллейбусами над ними) показана на Рис. 59.

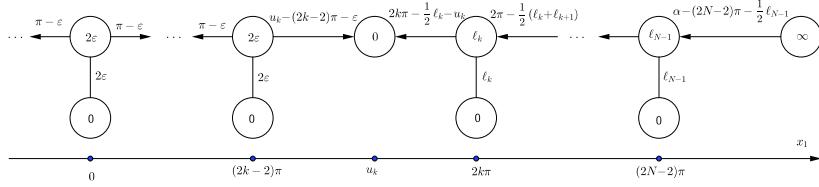


Рис. 59. Фолиация при $\varepsilon_{N-k} < \varepsilon < \varepsilon_{N-k+1}$.

Функция ε_n является решением уравнения

$$F_{(N-n)R}(c_{N-n} + \varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{(N-n+1)L}(c_{N-n} + \varepsilon, \ell_{N-n+1}(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad (70)$$

где каждую функцию ℓ_k следует находить, решая семейство уравнений баланса для всех троллейбусов, расположенных справа:

$$F_{kR}(c_k + \frac{1}{2}\ell_k, \ell_k, \varepsilon) + F_{(k+1)L}(c_k + \frac{1}{2}\ell_k, \ell_{k+1}, \varepsilon) = 0, \quad N-n+1 \leq k \leq N-1. \quad (71)$$

Здесь мы предполагаем, что $F_{NL} = F_\infty$.

Мы получаем N убывающих функций на промежутке $[\mu_{2N-1}, 2N\pi]$. Все они являются 2π -периодическими. Мы можем тут добавить, что эта система уравнений даёт нам семейство функций ε_n не только на промежутке $[\mu_{2N-1}, 2N\pi]$, но сразу на $[\mu_{2N-1}, (2N+1)\pi]$. Они все также 2π -периодические, только на промежутке $[2N\pi, (2N+1)\pi]$ функции являются возрастающими, все они возвращаются к исходному значению, равному π : $\varepsilon_n(\mu_{2k-1}) = \varepsilon_n((2N+1)\pi) = \pi$ для всех $n < k$.

Как и раньше, мы можем исследовать асимптотическое поведение троллейбусов и центрального воланчика и сделать вывод, что предельный размер всех лунок одинаковый, и его можно найти, решая уравнение

$$\frac{2}{\ell_k} \sin \frac{\ell_k}{2} = \cos \alpha. \quad (72)$$

Действительно, в пределе при $\varepsilon \rightarrow \infty$ уравнение баланса (71) принимает вид

$$\frac{2}{\ell_k} \sin \frac{\ell_k}{2} - \frac{2}{\ell_{k+1}} \sin \frac{\ell_{k+1}}{2} = 0,$$

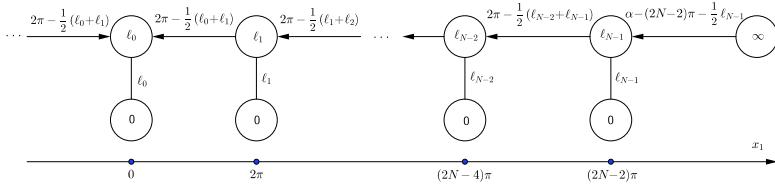
то есть предельный размер лунок одинаков: $\ell_k = \ell_{k+1}$. Чтобы этот предел найти, мы перейдём к пределу $\varepsilon \rightarrow \infty$ в первом уравнении баланса (66) и получим уравнение (72), решение которого из промежутка $[0, \pi]$ и даёт нам предельный размер $\ell_k(\infty)$ всех троллейбусов и центрального воланчика.

Таким образом, у нас N критических точек эволюции:

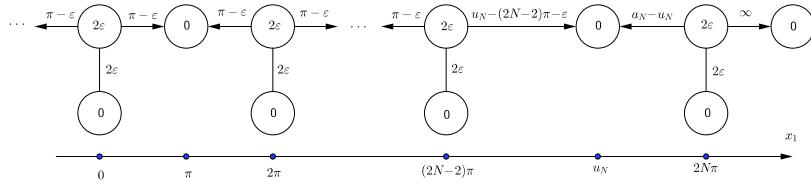
- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки наталкиваются на соседние лунки, образуя два троллейбуса: левый троллейбус справа и правый – слева;
- при $\varepsilon = \varepsilon_k(\alpha)$ уголки, живущие в промежутках $2(N-k)\pi < |u| < 2(N-k+1)\pi$, наталкиваются на соседние лунки, корни которых $c_{\pm(N-k)}$, и порождают пару троллейбусов;
- при $\varepsilon = \varepsilon_N(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно соприкасаются с центральной лункой, образуя воланчик.

В промежутках фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 48 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 57 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 59 при $\varepsilon \in (\varepsilon_{N-k}, \varepsilon_{N-k+1})$, $1 \leq k \leq N-2$;
- Рис. 60 при $\varepsilon \in (\varepsilon_N, \infty)$.

Рис. 60. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_N$.§7. $2N\pi < \alpha \leq (2N+1)\pi$

7.1. $2N\pi < \alpha < \alpha_{2,N-1}$. При малых ε (точнее, при $\varepsilon \in (0, \alpha - 2N\pi]$) не происходит ничего интересного: у нас $2N+1$ полная симметричная лунка с корнем в точке $c_k = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, и $2N$ стабильных уголков с вершинами в точках $\pm\pi, \dots, \pm(2N-1)\pi$. После момента $\varepsilon = \alpha - 2N\pi$ самая правая лунка начинает расти несимметрично. В любом случае мы имеем фолиацию, представленную на Рис. 61. Напомню, что благодаря общей симметрии мы можем рассматривать только то, что происходит на положительной полуоси.

Рис. 61. Фолиация при $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Как и раньше, для простоты первую координату левого конца $a_N(\varepsilon)$ этой несимметричной лунки мы будем обозначать просто символом a , тогда $b_N(\varepsilon) = b = a + 2\varepsilon$ – первая координата её правого конца. Мы знаем, что уравнение лунки даёт нам явное выражение (6) для ε как функции от a , заданной на промежутке $(a_N(\infty), 4N\pi - a]$, где $a_N(\infty)$ – единственное решение уравнения (7) из промежутка $a \in [(2N-1)\pi, 2N\pi]$. Как и раньше, у нас есть та же самая интерпретация значения величины $a_N(\infty)$: это первая координата точки,

где прямая линия, часть которой совпадает с графиком функции $f'(t)$ для $t > \alpha$, пересекает график функции $f'(t) = \sin t$ на промежутке $[(2N - \frac{3}{2})\pi, 2N\pi]$.

Посмотрим, сколько точек пересечения у прямой, которая содержит линейную часть графика функции $f'(t)$, с графиком функции $\sin t$. При $\alpha \in (2N\pi, (2N-1)\pi + \alpha_1)$ у нас только одна точка пересечения – это наша $a_N(\infty, \alpha)$, убывающая от $2N\pi$ до $(2N-1)\pi$. При $\alpha = (2N-1)\pi + \alpha_1$ у этой линии есть ещё одна точка касания $t = (2N-1)\pi - \alpha_1$, и при слегка больших значениях параметра α у нас уже три точки пересечения, но нам нужна самая правая, которая непрерывно продолжает ветвь функции $a_N(\infty, \alpha)$, убывающей от $(2N-1)\pi$ до $a_N(\infty, \alpha_{2,N-1})$. При $\alpha = (2N-2)\pi + \alpha_2 = \alpha_{2,N-1}$ у нашей прямой появляется вторая точка касания $t = (2N-2)\pi - \alpha_2$, и у нас пока ещё три точки пересечения: одна из них – это $t = (2N-2)\pi$, а две другие – значения функции $a(\infty, \alpha)$. Правая – это последнее значение функции $a = a_N$, заданной на промежутке $(2N\pi, \alpha_{2,N-1}]$, а левая – это начальное значение функции $a = a_{N-1}$, заданной на промежутке $[\alpha_{2,N-1}, \alpha_{4,N-2}]$. Последняя функция является решением уравнения (7), содержащемся в промежутке $\alpha \in ((2N - \frac{7}{2})\pi, (2N - \frac{5}{2})\pi)$. Это всегда будет третьей справа точкой пересечения, в то время как всего у нас будет либо пять точек пересечения при $\alpha \in ((2N-2)\pi + \alpha_2, (2N-3)\pi + \alpha_3)$, либо семь – при $\alpha \in ((2N-3)\pi + \alpha_3, (2N-4)\pi + \alpha_4)$.

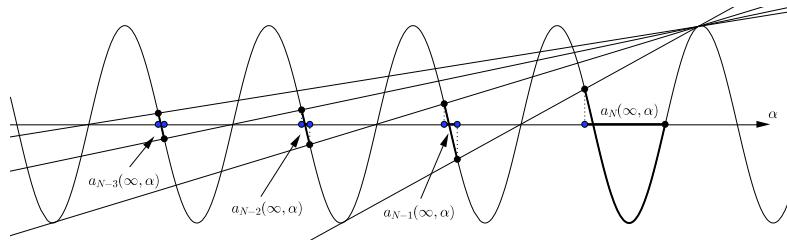
Продолжая, мы можем сказать, что при

$$\alpha \in ((2N-k)\pi + \alpha_k, (2N-k-1)\pi + \alpha_{k+1})$$

у нас $2k+1$ точка пересечения. При $\alpha \in (\alpha_{2n,N-n}, \alpha_{2n+2,N-n-1})$ функция $a_{N-n}(\infty, \alpha)$ является ветвью решения уравнения (7), заданной на промежутке $((2N-2n-\frac{3}{2})\pi, (2N-2n-\frac{1}{2})\pi)$. Графически это $(2n-1)$ -я справа точка пересечения графика функции $\sin t$ с вышеупомянутой прямой линией. Соответствующая иллюстрация представлена на Рис. 62.

Для рассматриваемых значений параметра α эволюция лунки с корнем c_N не зависит от происходящего слева от неё: она растёт до бесконечности так, что $a_N(\varepsilon, \alpha) = a(\varepsilon, \alpha) \rightarrow a(\infty, \alpha)$ и $b_N(\varepsilon, \alpha) = a(\varepsilon, \alpha) + 2\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Теперь мы вернёмся к описанию того, что происходит слева от самой правой лунки. На самом деле эволюция происходит так же, как и в предыдущем подпараграфе, только роль бесконечной мультилунки

Рис. 62. Области значений функций $a_n(\infty, \alpha)$.

теперь играет самая правая лунка. Как и раньше, левая сила полной правой лунки определяется выражением (9) с $\ell = 2\varepsilon$, то есть

$$\begin{aligned} F_{NLa}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) &= \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \sin u - \cos u \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} ((a + 2\varepsilon - \alpha) \cos u + \sin u) \Big] e^{\frac{u-a}{\varepsilon}} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} (\varepsilon \cos u + \sin u). \end{aligned}$$

Мы помечаем эту силу дополнительным индексом N , чтобы отметить, что ветвь $a = a_N$ выбрана из решений уравнения (6). Итак, решение уравнения

$$F_{(N-1)R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{NLa}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad (73)$$

(точнее, та ветвь решения, которая начинается в точке $u = (2N-1)\pi$ при $\varepsilon = \alpha - 2N\pi$) даёт функцию $u(\varepsilon)$, показывающую позицию вершины уголка между самой правой лункой и её соседкой. Эта функция определена на промежутке $[\alpha - 2N\pi, \varepsilon_1(\alpha)]$, где ε_1 – это тот момент, когда уголок натыкается на лунку слева, т.е. такой момент, когда $u(\varepsilon_1) = (2N-2)\pi + \varepsilon_1$. Чтобы найти это число ε_1 , нам нужно подставить $u = (2N-2)\pi + \varepsilon$ в уравнение (73), в результате чего получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \sin u - \cos u \right) + \frac{1}{2\varepsilon} ((a + 2\varepsilon - \alpha) \cos u + \sin u) \right] e^{1 + \frac{(2N-2)\pi - a}{\varepsilon}} \\ + \frac{1}{1+\varepsilon^2} [\cos \varepsilon - \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\varepsilon \right) \sin \varepsilon] = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Это уравнение задаёт функцию $\varepsilon_1(\alpha)$ на всём промежутке $[2N\pi, (2N+1)\pi]$, где она возрастает от минимального значения $\varepsilon_1(2N\pi) \approx$

2.88011 до $\varepsilon_1((2N+1)\pi) = \pi$. Заметим, что функция эта 2π -периодична: если подставить $a - (2N-2)\pi$ и $\alpha - (2N-2)\pi$ вместо a и α в уравнение (22), получится уравнение (74).

При $\varepsilon \geq \varepsilon_1$ над лункой, которая вокруг корня $2(N-1)\pi$, живёт троллейбус (фолиация описывается графом на Рис. 63). Этот троллейбус

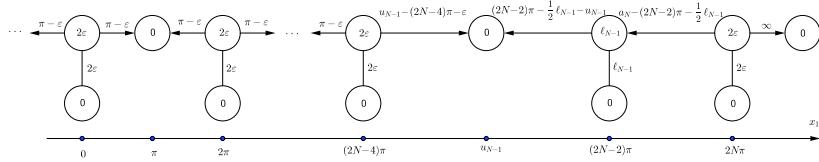


Рис. 63. Фолиация при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$.

сжимается, но никогда не исчезает, потому что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F_{NLa}(2\pi, 2\varepsilon, \varepsilon) = \cos \alpha - 1 < 0,$$

т.е. хвост самой правой лунки никогда не покрывает точку $2(N-1)\pi$. Уравнение баланса для правого конца b_{N-1} этого троллейбуса имеет вид

$$F_{(N-1)R}(b_{N-1}, 2(b_{N-1} - 2(N-1)\pi), \varepsilon) + F_{NLa}(b_{N-1}, 2\varepsilon, \varepsilon) = 0. \quad (75)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} F_{nR}(2n\pi + \frac{\ell_n}{2}, \ell_n, \varepsilon) &\rightarrow \cos \frac{\ell_n}{2} - \frac{2}{\ell_n} \sin \frac{\ell_n}{2}, \\ F_{2La}(2n\pi + \frac{\ell_n}{2}, 2\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \cos \alpha - \cos \frac{\ell_n}{2}, \end{aligned}$$

пределная форма уравнения (75) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ будет

$$\frac{\sin b_{N-1}}{b_{N-1} - 2(N-1)\pi} = \cos \alpha.$$

Корень $b_{N-1}(\infty)$ этого уравнения из промежутка $[2(N-1)\pi, (2N-\frac{1}{2})\pi]$ определяет положение правого конца предельной хорды, до которой стягивается основание троллейбуса (ясно, что для левого конца мы получим выражение $a_{N-1}(\infty) = 4(N-1)\pi - b_{N-1}(\infty)$).

Теперь посмотрим, что происходит левее этого троллейбуса. Уголок, бывший при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ неподвижным в точке $(2N-3)\pi$, начинает

после этого момента двигаться влево. Его положение можно найти из уравнения баланса

$$F_{(N-2)R}(u, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{(N-1)L}(u, \ell_{N-1}, \varepsilon) = 0, \quad (76)$$

где величина $\ell_{N-1} = b_{N-1} - a_{N-1} = 2b_{N-1} - 4(N-1)\pi$ известна, после того как было решено уравнение (75). В некоторый момент $\varepsilon = \varepsilon_2(\alpha)$ уголок натыкается на лунку с корнем $c_{N-2} = 2(N-2)\pi$ и возникает второй троллейбус. Чтобы найти это критическое значение ε_2 , нужно решить уравнение (76) с $u = 2(N-2)\pi + \varepsilon$. Так же, как и в случае функции $\varepsilon_1(\alpha)$, уравнение (76) задаёт функцию $\varepsilon_2(\alpha)$ сразу на всём промежутке $[2N\pi, (2N+1)\pi]$, где она возрастает от своего минимального значения $\varepsilon_2(2N\pi) \approx 3.132754$ до $\varepsilon_2((2N+1)\pi) = \pi$. Разумеется, эта функция также 2π -периодична.

Действуя таким же способом дальше, мы получим все функции $\varepsilon_n(\alpha)$, $1 \leq n \leq N-1$, решая уравнения (70), где подставлены значения ℓ_k , найденные из уравнений (71). Все эти функции возрастают от своего минимального значения $\varepsilon_n(2N\pi)$ до $\varepsilon_n((2N+1)\pi) = \pi$. Все они могут быть получены сдвигом аргумента на 2π с предыдущего периода, однако здесь у нас появляется одна дополнительная функция $\varepsilon_N(\alpha)$, которая задаёт тот момент, когда последний уголок, стартующий из точки π , натыкается на центральную лунку. По симметрии уголок, стартующий из точки $-\pi$, в тот же момент натыкается на центральную лунку слева, и появляется воланчик. Для вычисления функции ε_N нам нужно найти все базы ℓ_k предыдущих троллейбусов, решая уравнения (71), и, наконец, решить уравнение

$$F_{0R}(\varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon) + F_{1L}(\varepsilon, \ell_1, \varepsilon) = 0. \quad (77)$$

Промежуточная фолиация, когда $\varepsilon_{N-k} < \varepsilon < \varepsilon_{N-k+1}$, показана на Рис. 64.

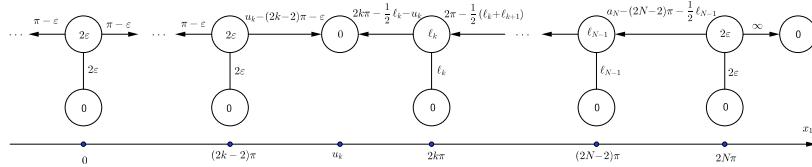


Рис. 64. Фолиация при $\varepsilon_{N-k} < \varepsilon < \varepsilon_{N-k+1}$.

При $\varepsilon > \varepsilon_N$ у нас следующая фолиация (см. Рис. 65): сужающийся

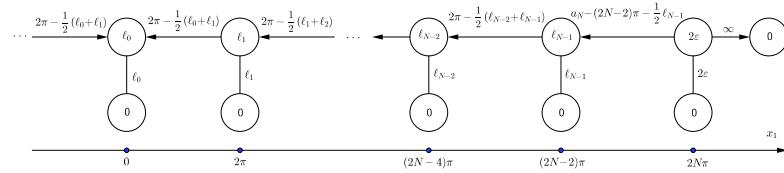


Рис. 65. Фолиация при $\varepsilon > \varepsilon_N$.

воланчик на симметричной лунке с центром в нуле, $N - 1$ пара симметричных сжимающихся троллейбусов около точек $\pm 2n\pi$ и две несимметрично бесконечно растущих лунки (но одна симметрична другой относительно оси x_2), внутренние концы которых стремятся к конечным пределам $\pm a_N(\infty)$, а внешние убегают на бесконечность.

Предельный размер основания как воланчика, так и всех троллейбусов одинаков и определяется решением уравнения

$$\frac{2}{\ell_n(\infty)} \sin \frac{\ell_n(\infty)}{2} = \cos \alpha .$$

Описанная эволюция имеет место, если самая правая лунка не заставляет сжимающийся троллейбус на лунке с корнем в точке c_{N-1} . Покажем, что этого не происходит при $\alpha \in (2N\pi, \alpha_{2,N-1}]$.

Ситуацию, когда это может произойти, легко найти, рассматривая график функции f' : нужно найти такую прямую, проходящую через точку $(2(N-1)\pi, 0)$, что уравнение лунки выполняется для абсцисс точек пересечения этой прямой с графиком. Читатель может взглянуть на Рис. 41, продолжив синус на картинке периодически влево: вместо точки 2π , где прямая пересекает график синуса, надо представить точку $2(N-1)\pi$.

Заметим, что такая прямая касается графика функции f' , если точка касания $t \in (2N\pi, (2N + \frac{1}{2})\pi)$ удовлетворяет уравнению

$$\tan t = t - 2(N-1)\pi .$$

Это — сдвинутый на $2(N-1)\pi$ второй корень уравнения $\tan t = t$, т.е. $\alpha_{2,N-1}$.

Итак, при рассматриваемых значениях параметра α эволюция почти такая же, как и в предыдущем подпараграфе, у нас те же N критических точек эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки наталкиваются на соседние лунки, образуя два троллейбуса: левый троллейбус справа и правый – слева;
- при $\varepsilon = \varepsilon_k(\alpha)$ уголки, живущие в промежутках $2(N-k)\pi < |u| < 2(N-k+1)\pi$, наталкиваются на соседние лунки, корни которых суть $c_{\pm(N-k)}$, и порождают пару троллейбусов;
- при $\varepsilon = \varepsilon_N(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно соприкасаются с центральной лункой, образуя воланчик.

В промежутках фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 61 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 63 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 64 при $\varepsilon \in (\varepsilon_{N-k}, \varepsilon_{N-k+1})$, $1 \leq k \leq N-2$;
- Рис. 65 при $\varepsilon \in (\varepsilon_N, \infty)$.

У ещё двух лунок (с корнями $c_{\pm N} = \pm 2N\pi$), возникающих на этой картинке в сравнении с предыдущим подпараграфом, эволюция независимая – они не взаимодействуют с центральной частью картинки. Только лишь при $\alpha = \alpha_{2,N-1}$ лунка сталкивается с троллейбусом в бесконечности: величина $b_{N-1}(\infty) = a_N(\infty)$ является решением уравнения

$$\frac{\sin u}{u - 2(N-1)\pi} = \cos \alpha_{2,N-1},$$

попадающим в интервал $((2N - \frac{3}{2})\pi, (2N - 1)\pi)$.

7.2. $\alpha_{2,N-1} < \alpha \leq \alpha_{4,N-2}$. А вот теперь существует уже конечный момент ε , когда правая несимметричная лунка с корнем c_N натыкается на троллейбус, расположенный над лункой с корнем c_{N-1} . В этот момент (обозначим это значение величины ε символом δ_1) троллейбус превращается в мультилунку. Подсчитаем значение функции $\delta_1(\alpha)$, используя приведённую выше геометрическую картинку (см. Рис. 41). Пусть $a = a_N(\varepsilon)$, $b = b_N(\varepsilon) = a + 2\varepsilon$. Тогда из рисунка вытекает очевидная пропорция

$$\frac{f'(b)}{b - 2(N-1)\pi} = \frac{f'(a)}{a - 2(N-1)\pi},$$

что даёт следующее выражение для ε :

$$\varepsilon = \frac{(a - 2(N-1)\pi)[(\alpha - a) \cos \alpha + \sin a - \sin a]}{2[(a - 2(N-1)\pi) \cos \alpha - \sin a]}.$$

Сравнение этого выражения с формулой (6) неявно задаёт функцию $a(\alpha)$, возрастающую от $a_N(\infty)$ до $(2N-1)\pi$, когда α пробегает от $\alpha_{2,N-1}$ до $(2N+1)\pi$. Тогда, используя либо приведённое выше выражение, либо формулу (6), мы получим ε как функцию параметра α , что и является искомой функцией $\delta_1(\alpha)$, убывающей от ∞ до π . Мы видим, что функция δ_1 является 2π -периодической, то есть мы можем взять функцию δ_1 , найденную на промежутке $(\alpha_2, 3\pi]$, и сдвинуть её на промежуток $(\alpha_{2,N-1}, (2N+1)\pi]$. Действительно, уравнение, определяющее функцию δ_1 , является 2π -периодическим, или, более точно, мы должны заменить α на $\alpha - 2\pi$ и a на $a - 2\pi$, если мы хотим перейти от уравнения для $\alpha \in (\alpha_{2,n-1}, (2n+1)\pi]$ к $\alpha \in (\alpha_{2,n}, (2n+3)\pi]$.

При $\varepsilon > \delta_1(\alpha)$ вплоть до момента $\eta_1(\alpha) = \frac{1}{2}\ell_{N-1}((\delta_1(\alpha))) + \delta_1(\alpha)$ у нас есть открытая мультилунка (фолиацию см. на Рис. 66), которая

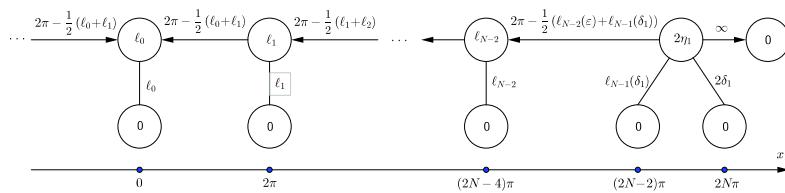
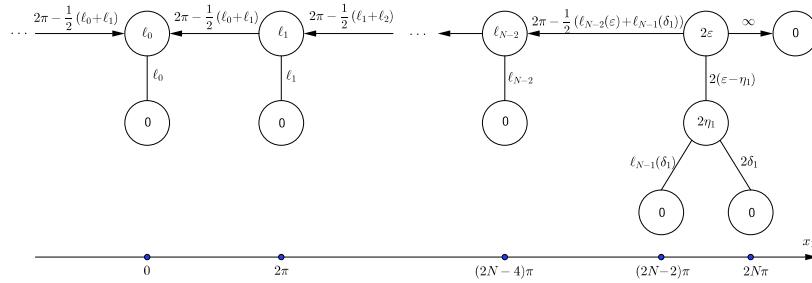


Рис. 66. Фолиация при $\delta_1 < \varepsilon < \eta_1$.

в момент $\varepsilon = \eta_1$ завершает свою эволюцию и над ней начинает расти область хорд (соответствующая фолиация представлена на Рис. 67). Получившаяся составная лунка уже продолжает расти до бесконечности. Функция η_1 задана на открытом интервале $(\alpha_{2,N-1}, (2N+1)\pi)$. Она убывает от ∞ до 2π .

После момента $\varepsilon = \eta_1$ возможны два сценария: эта составная лунка в процессе роста либо наталкивается на троллейбус слева, либо нет. Если $\alpha \leq \alpha_{4,N-2}$, осуществляется первый сценарий: эта лунка бесконечно увеличивается так, что её правый конец уходит на бесконечность, а левый стремится к предельному значению $a_{N-1}(\infty)$, которое является корнем всего того же уравнения (7). Единственное отличие от

Рис. 67. Фолиация при $\varepsilon > \eta_1$.

рассмотренного ранее случая $N = 2$ в том, что при каждом N мы ищем решение a в своём промежутке $((2N - \frac{7}{2})\pi, (2N - \frac{5}{2})\pi)$ (см. детальное объяснение в начале этого параграфа).

При $\alpha = \alpha_{4,N-2}$ растущая составная лунка асимптотически касается троллейбуса на бесконечности: значение $b_{N-2}(\infty) = a_{N-1}(\infty)$ является решением уравнения

$$\frac{\sin u}{u - 2(N-2)\pi} = \cos \alpha_{4,N-2},$$

попадающего в интервал $((2N - \frac{7}{2})\pi, (2N - 3)\pi)$.

В результате для рассматриваемых значений параметра α мы получаем $N+2$ критические точки эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки наталкиваются на соседние лунки, образуя два троллейбуса: левый троллейбус справа и правый – слева;
- при $\varepsilon = \varepsilon_k(\alpha)$ уголки, живущие в промежутках $2(N-k)\pi < |u| < 2(N-k+1)\pi$, наталкиваются на соседние лунки, корни которых суть $c_{\pm(N-k)}$, и порождают пару троллейбусов;
- при $\varepsilon = \varepsilon_N(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно соприкасаются с центральной лункой, образуя воланчик;
- при $\varepsilon = \delta_1(\alpha)$ самая левая и самая правая лунки догоняют соседние троллейбусы, преобразуя их в мультилунки;
- при $\varepsilon = \eta_1(\alpha)$ эти две мультилунки завершают свою эволюцию, порождая две составные лунки.

В промежутках фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 61 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 63 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 64 при $\varepsilon \in (\varepsilon_{N-k}, \varepsilon_{N-k+1})$, $1 \leq k \leq N-2$;
- Рис. 65 при $\varepsilon \in (\varepsilon_N, \delta_1)$;
- Рис. 66 при $\varepsilon \in (\delta_1, \eta_1)$;
- Рис. 67 при $\varepsilon \in (\eta_1, \infty)$.

После момента $\varepsilon = \eta_1$ образовавшиеся две составные лунки, $N-2$ пары троллейбусов и центральный воланчик продолжают свою эволюцию независимо друг от друга. Воланчик и троллейбусы сжимаются до общего предельного размера $\ell(\infty)$, определяемого, как и раньше, предельным уравнением

$$\frac{2}{\ell} \sin \frac{\ell}{2} = \cos \alpha.$$

У верхней хорды бесконечно растущих составных лунок один конец имеет конечный предел: левый конец правой лунки стремится к значению $a_{N-1}(\infty)$, которое является единственным решением a уравнения (8), попадающего в интервал $((2N - \frac{7}{2})\pi, (2N - \frac{5}{2})\pi)$.

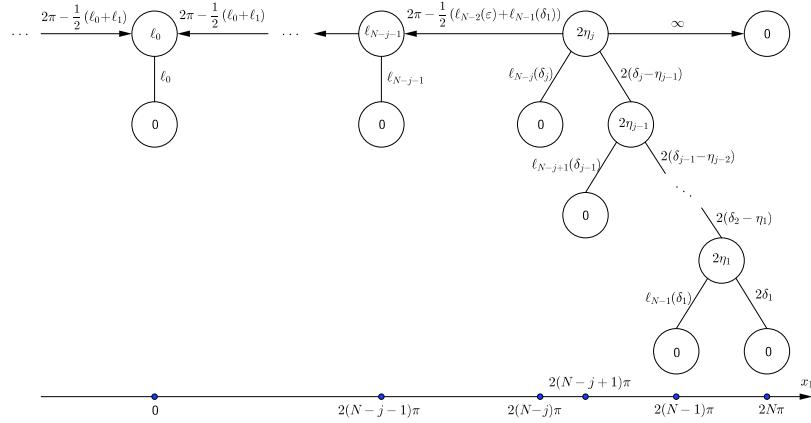
7.3. $\alpha_{2k, N-k} < \alpha \leq \alpha_{2(k+1), N-k-1}$. Будем рассматривать ситуацию по индукции, предполагая, что до момента $\eta_{k-1}(\alpha)$ эволюция уже известна, и у нас определены все предыдущие критические точки, в результате чего мы получили центральный воланчик, $N-k$ симметричных пар троллейбусов над лунками, корни которых расположены в точках $c_{\pm j}$, $1 \leq j \leq N-k$, и пару сложных лунок, возникших в момент $\eta_{k-1}(\alpha)$. Но теперь это – не последняя точка эволюции, теперь левый конец верхней хорды (его первая координата опять будет обозначаться символом a) в некоторый момент $\delta_k(\alpha)$ натыкается на соседний троллейбус, расположенный на лунке вокруг точки c_{N-k} . После этого мы получаем фолиацию, представленную на Рис. 68, где $j = k$.

Чтобы найти функцию δ_k , нам нужно следовать уже рассмотренному образцу. А именно, из пропорции

$$\frac{f'(b)}{b - 2(N-k)\pi} = \frac{f'(a)}{a - 2(N-k)\pi},$$

где $b = a + 2\varepsilon$, мы получаем следующее уравнение на ε :

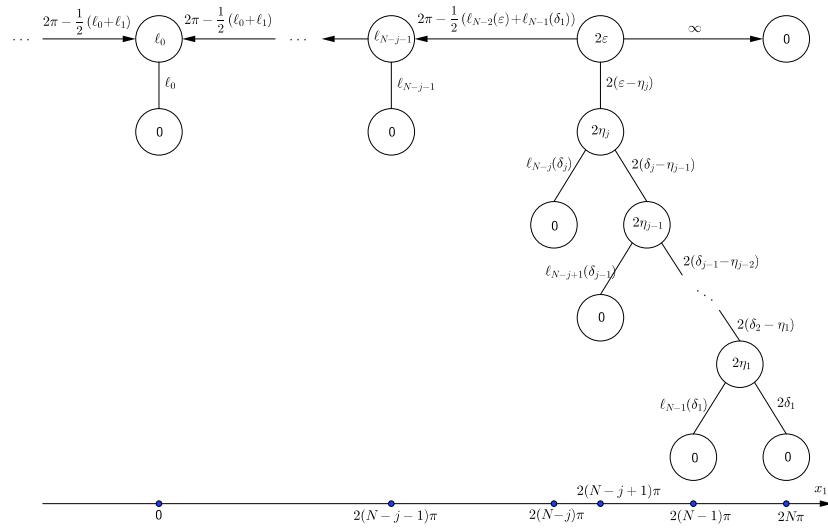
$$\varepsilon = \frac{(a - 2(N-k)\pi)[(\alpha - a) \cos \alpha + \sin a - \sin \alpha]}{2[(a - 2(N-k)\pi) \cos \alpha - \sin a]}.$$

Рис. 68. Фолиация при $\delta_j < \varepsilon < \eta_j$.

Сравнение этого выражения с выражением (6) неявно задаёт функцию $a(\alpha)$, возрастающую от $a_{N-k+1}(\infty)$ до $(2N-2k+1)\pi$, когда α изменяется от $\alpha_{2k, N-k}$ до $(2N+1)\pi$. После чего, используя или приведённое выше выражение, или формулу (6), получаем ε как функцию параметра α , которая и является искомой функцией $\delta_k(\alpha)$, убывающей от ∞ до $k\pi$. Функция δ_k является 2π -периодической, то есть мы можем взять ту функцию δ_k , что была определена на промежутке $(\alpha_{2k}, (2k+1)\pi)$, и сдвинуть её на промежуток $(\alpha_{2k, N-k}, (2N+1)\pi)$.

Если $\varepsilon > \delta_k(\alpha)$, то вплоть до момента $\eta_k(\alpha) = \frac{1}{2}\ell_{N-k}(\delta_k(\alpha)) + \delta_k(\alpha)$ у нас есть открытая мультилунка, которая завершает свою эволюцию как раз в момент $\varepsilon = \eta_k$, когда над ней появляется область хорд. Образовавшаяся сложная лунка продолжает свой рост, и, следовательно, граф фолиации будет таким, как изображено на Рис. 69, где нужно положить $j = k$. Функция η_k задана на том же открытом промежутке $(\alpha_{2k, N-k}, (2N+1)\pi)$, что и δ_k , она убывает на нём от ∞ до $(k+1)\pi$.

После момента $\varepsilon = \eta_k$ возможны два сценария: эта составная лунка в процессе роста либо наталкивается на троллейбус слева, либо нет. Если $\alpha > \alpha_{2(k+1), N-k-1}$, осуществляется второй сценарий: в некоторый момент δ_{k+1} растущая составная лунка натыкается на соседний троллейбус, и мы повторяем процедуру, описанную в данном подпараграфе, заменив k на $k+1$. Если же $\alpha \leq \alpha_{2(k+1), N-k-1}$, то

Рис. 69. Фолиация при $\eta_j < \varepsilon < \delta_{j+1}$.

осуществляется первый сценарий: у нас больше нет критических точек эволюции, и эта лунка бесконечно увеличивается так, что её правый конец уходит на бесконечность, а левый стремится к предельному значению $a_{N-k}(\infty)$, которое является корнем всего того же уравнения (7). Единственное отличие от рассмотренного ранее случая $N = 2$ в том, что при каждом N и k мы ищем решение a в своём промежутке $((2N - 2k - \frac{3}{2})\pi, (2N - 2k - \frac{1}{2})\pi)$ (см. детальное объяснение в начале этого параграфа).

При $\alpha = \alpha_{2(k+1), N-k-1}$ растущая составная лунка соприкасается с троллейбусом асимптотически на бесконечности: величина $b_{N-k-1}(\infty) = a_{N-k}(\infty)$ является решением уравнения

$$\frac{\sin u}{u - 2(N - k - 1)\pi} = \cos \alpha_{2(k+1), N-k-1},$$

попадающим в промежуток $((2N - 2k - \frac{3}{2})\pi, (2N - 2k - 1)\pi)$.

В результате при рассматриваемых значениях параметра α у нас присутствуют $N + 2k$ критических точек эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки наталкиваются на соседние лунки, образуя два троллейбуса: левый троллейбус справа и правый – слева;
- при $\varepsilon = \varepsilon_j(\alpha)$ уголки, живущие в промежутках $2(N-j)\pi < |u| < 2(N-j+1)\pi$, наталкиваются на соседние лунки, корни которых суть $c_{\pm(N-j)}$, и порождают пару троллейбусов; $2 \leq j \leq (N-1)$;
- при $\varepsilon = \varepsilon_N(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно соприкасаются с центральной лункой, образуя воланчик;
- при $\varepsilon = \delta_1(\alpha)$ самая левая и самая правая лунки догоняют соседние троллейбусы, преобразуя их в мультилунки;
- при $\varepsilon = \eta_1(\alpha)$ эти две мультилунки завершают свою эволюцию, порождая две составные лунки;
- при $\varepsilon = \delta_j(\alpha)$ две (левая и правая) составные лунки догоняют соседние троллейбусы, преобразуя их в мультилунки;
- при $\varepsilon = \eta_j(\alpha)$ эти две мультилунки завершают свою эволюцию, порождая две составные лунки, $2 \leq j \leq k$.

В промежутках фолиация описывается следующими графиками:

- Рис. 61 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 63 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 64 при $\varepsilon \in (\varepsilon_{N-k}, \varepsilon_{N-k+1})$, $1 \leq k \leq N-2$;
- Рис. 65 при $\varepsilon \in (\varepsilon_N, \delta_1)$;
- Рис. 66 при $\varepsilon \in (\delta_1, \eta_1)$;
- Рис. 67 при $\varepsilon \in (\eta_1, \delta_2)$;
- Рис. 68 при $\varepsilon \in (\delta_j, \eta_j)$, $2 \leq j \leq k$;
- Рис. 69 при $\varepsilon \in (\eta_j, \delta_{j+1})$, $2 \leq j \leq k-1$, и при $\varepsilon \in (\eta_k, \infty)$.

Итак, после момента $\varepsilon = \eta_k$ образовавшиеся две составные лунки, $N-k$ пар троллейбусов и центральный воланчик продолжают свою эволюцию независимо друг от друга. Воланчик и троллейбусы сжимаются до общего предельного размера $\ell(\infty)$, определяемого, как и раньше, предельным уравнением

$$\frac{2}{\ell} \sin \frac{\ell}{2} = \cos \alpha.$$

У верхней хорды бесконечно растущих составных лунок один конец имеет конечный предел: левый конец правой лунки стремится к значению $a_{N-k}(\infty)$, которое является единственным решением a уравнения (8) из интервала $((2N-2k-\frac{3}{2})\pi, (2N-2k-\frac{1}{2})\pi)$.

7.4. $\alpha_{2N} < \alpha < (2N + 1)\pi$. Если $\alpha > \alpha_{2N}$, то у нас присутствуют все этапы эволюции, описанные в предыдущем подпараграфе. Но теперь после момента $\varepsilon = \eta_{N-1}$ составная лунка в некий момент $\varepsilon = \delta_N(\alpha)$ соприкасается с центральным воланчиком. В этот же самый момент вторая составная лунка соприкасается с воланчиком с левой стороны, и появляется мультилунка, в основе которой лежат центральная лунка и обе составные лунки (см. Рис. 70).

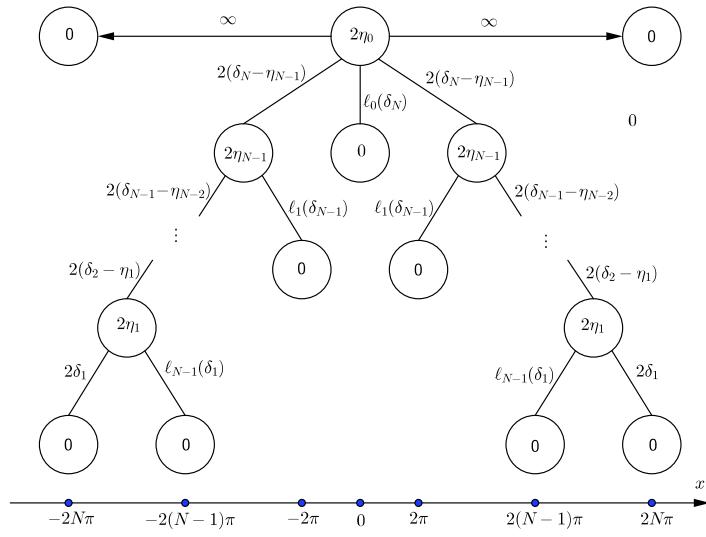


Рис. 70. Фолиация при $\delta_N < \varepsilon < \eta_0$.

Чтобы найти функцию $\delta_N(\alpha)$, нам надо решить уравнение

$$F_{0R}(\tfrac{1}{2}\ell_0(\varepsilon), \ell_0(\varepsilon), \varepsilon) + F_{1La}(\tfrac{1}{2}\ell_0(\varepsilon), 2\varepsilon, \varepsilon) = 0,$$

где функция F_{1La} определена формулой (9), а функция $a = a(\varepsilon)$ является корнем уравнения (6). Но теперь нам нужен самый левый корень из промежутка $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Такое решение ε есть по определению значение функции $\delta_N(\alpha)$ на интервале $(\alpha_{2N}, (2N + 1)\pi)$. Эта функция убывает от ∞ до $N\pi$.

При $\varepsilon > \delta_N$ эволюция уже становится простой: у нас есть мультилунка, которая завершает свою эволюцию в момент $\varepsilon = \eta_0(\alpha) =$

$b_0(\delta_N(\alpha)) + 2\delta_N(\alpha)$, после чего над ней появляется область хорд и эта объединившая всё составная лунка продолжает свой рост до бесконечности (см. Рис. 71).

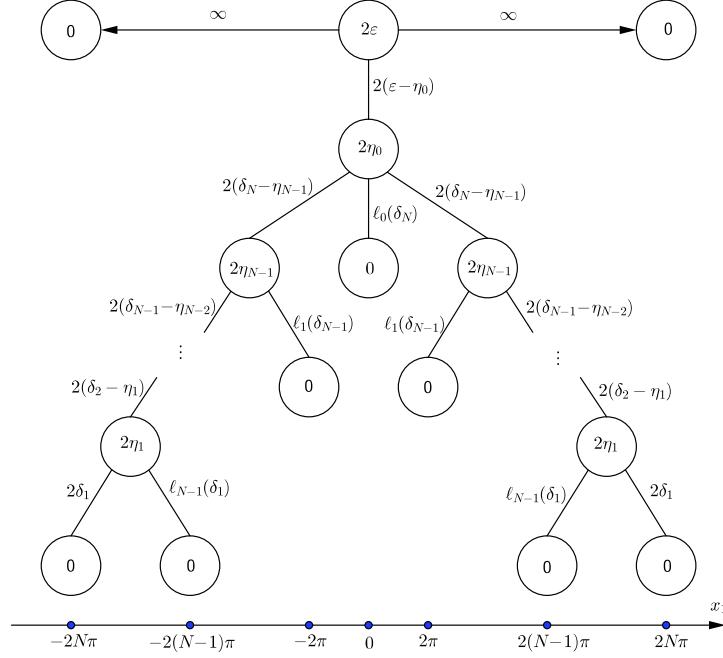


Рис. 71. Фолиация при $\varepsilon > \eta_0$.

Функция $\eta_0(\alpha)$ задана на промежутке $(\alpha_{2N}, (2N+1)\pi]$, где она убывает от ∞ до $\eta_0((2N+1)\pi) = (2N+1)\pi$.

В результате при рассматриваемых значениях параметра α у нас $3N$ критических точек эволюции:

- при $\varepsilon = \varepsilon_1(\alpha)$ самый левый и самый правый уголки наталкиваются на соседние лунки, образуя два троллейбуса: левый троллейбус справа и правый – слева;
- при $\varepsilon = \varepsilon_j(\alpha)$ уголки, живущие в промежутках $2(N-j)\pi < |u| < 2(N-j+1)\pi$, наталкиваются на соседние лунки, корни

которых суть $c_{\pm(N-j)}$, и порождают пару троллейбусов; $2 \leq j \leq (N-1)$;

- при $\varepsilon = \varepsilon_N(\alpha)$ два оставшихся уголка одновременно соприкасаются с центральной лункой, образуя воланчик;
- при $\varepsilon = \delta_1(\alpha)$ самая левая и самая правая лунки догоняют соседние троллейбусы, преобразуя их в мультилунки;
- при $\varepsilon = \eta_1(\alpha)$ эти две мультилунки завершают свою эволюцию, порождая две составные лунки;
- при $\varepsilon = \delta_j(\alpha)$ две (левая и правая) составные лунки догоняют соседние троллейбусы, преобразуя их в мультилунки;
- при $\varepsilon = \eta_j(\alpha)$ эти две мультилунки завершают свою эволюцию, порождая две составные лунки, $2 \leq j \leq N-1$;
- при $\varepsilon = \delta_N(\alpha)$ две оставшиеся составные лунки одновременно соприкасаются с центральным воланчиком, преобразуя его в мультилунку;
- при $\varepsilon = \eta_0(\alpha)$ эта мультилунка завершает свою эволюцию, порождая одну общую составную лунку.

В промежутках фолиация описывается следующими графами:

- Рис. 61 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$;
- Рис. 63 при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- Рис. 64 при $\varepsilon \in (\varepsilon_{N-k}, \varepsilon_{N-k+1})$, $1 \leq k \leq N-2$;
- Рис. 65 при $\varepsilon \in (\varepsilon_N, \delta_1)$;
- Рис. 66 при $\varepsilon \in (\delta_1, \eta_1)$;
- Рис. 67 при $\varepsilon \in (\eta_1, \delta_2)$;
- Рис. 68 при $\varepsilon \in (\delta_j, \eta_j)$, $2 \leq j \leq N-1$;
- Рис. 69 при $\varepsilon \in (\eta_j, \delta_{j+1})$, $2 \leq j \leq N-1$;
- Рис. 70 при $\varepsilon \in (\delta_N, \eta_0)$;
- Рис. 71 при $\varepsilon \in (\eta_0, \infty)$.

7.5. $\underline{\alpha = (2N+1)\pi}$. Так же, как и в случаях $\alpha = 3\pi$ и $\alpha = 5\pi$, эволюция у нас имеет лишь две критических точки при $\alpha = (2N+1)\pi$. Это происходит не только благодаря множественным столкновениям в этот момент $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = \delta_1 = \pi$, но и из-за того, что исчезают критические точки $\eta_{k-1} = \delta_k = k\pi$, $2 \leq k \leq N$ (по этой причине мы и не определяли эти функции в точке $\alpha = (2N+1)\pi$). Итак, остаётся ещё только одна точка, а именно, $\eta_0((2N+1)\pi) = (2N+1)\pi$, когда мультилунка завершает свою эволюцию.

- при $\varepsilon = \pi$ все $2N + 1$ лунки сталкиваются, объединяя $2N$ угловков между ними в общую мультилунку;
- при $\varepsilon = (2N + 1)\pi$ мультилунка завершает свою эволюцию, порождая составную лунку.

В промежутках фолиация описывается следующими графами:

- Рис. 61 при $\varepsilon \in (0, \pi)$;
- Рис. 72 при $\varepsilon \in (\pi, (2N + 1)\pi)$;
- Рис. 73 при $\varepsilon \in ((2N + 1)\pi, \infty)$.

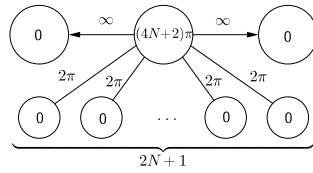


Рис. 72. Фолиация при $\pi < \varepsilon < (2N + 1)\pi$.

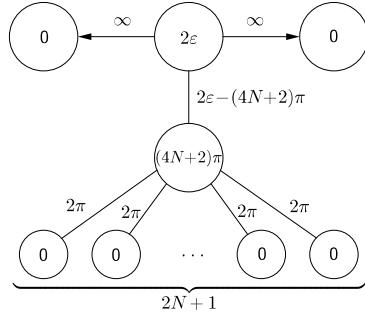


Рис. 73. Фолиация при $\varepsilon > (2N + 1)\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Ivanishvili, N. Osipov, D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *On Bellman function for extremal problems in BMO*. — Comptes Rendus Mathematique, **350** (2012), 561–564. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.06.011>)
2. P. Ivanishvili, N. Osipov, D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO*. — to appear in Transactions of the Amer. Math. Soc.

3. В. И. Васюнин, П. Б. Затицкий, П. Иванишвили, Н. Н. Осипов, Д. М. Столяров, *Функция Беллмана в пространстве BMO*. — Препринт ПОМИ, №. 19 (2011), 1–101. (<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2011/rus-2011.html>)
4. В. И. Васюнин, П. Б. Затицкий, П. Иванишвили, Н. Н. Осипов, Д. М. Столяров, *Добавление к препринту ПОМИ 19/2011 “Функция Беллмана в пространстве BMO”*, препринт ПОМИ, №. 10 (2012), 1–15. (<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2012/rus-2012.html>)
5. P. Ivanishvili, N. Osipov, D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO*, arXiv:1205.7018v3, 1–91, 2012. <http://arxiv.org/abs/1205.7018>
6. P. Ivanishvili, D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO: evolution*, in preparation.

Vasyunin V. I. An example of constructing the Bellman function for extremal problems in BMO.

An example of solution of a boundary value problem for a homogeneous Monge–Ampère equation is given, which produces a Bellman function for an extremal problem on the space BMO. The paper contains a step-by-step instruction for calculation of this function. The cases of a rather complicated foliation are considered. This illustrates the technique elaborated in a paper by Ivanishvili, Stoyanov, Vasyunin, and Zatitsky.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург, Россия
E-mail: vasyunin@pdmi.ras.ru

Поступило 7 июня 2014 г.