Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 424, 2014 г.

А. Б. Александров

ОПЕРАТОРНО ЛИПШИЦЕВЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЁБИУСА

§1. Введение

Автором [1] было доказано, что класс операторно липшицевых функций замкнут относительно дробно-линейных подстановок с весом. В частности, было доказано, что если f – операторно липшицева функция, заданная на замкнутом подмножестве комплексной плоскости $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, то функция $\dfrac{f \circ \varphi}{|\varphi'|}$ тоже операторно липшицева для любого дробно-линейного преобразования φ такого, что $f(\varphi(\infty)) = 0$, причём это условие требуется только в том случае, когда оно имеет смысл, т.е. когда $\varphi(\infty)$ принадлежит области задания функции f.

В настоящей работе мы получаем многомерное обобщение этого результата. Мы доказываем, что если f – операторно липшицева функция от n вещественных переменных, то в качестве φ можно взять преобразование Мёбиуса на пространстве $\mathbb{R}^n$, т. е. суперпозицию произвольного конечного семейства инверсий пространства $\mathbb{R}^n$.

В §2 кратко изложены нужные нам понятия, связанные с преобразованиями Мёбиуса.

В §3 мы приводим определение и простейшие свойства операторно липшицевых функций нескольких переменных.

Результаты о весовой замене переменных в пространствах операторно липшицевых функций излагаются в §4.

В §5 рассматривается пространство мультипликаторов для пространства операторно липшицевых функций нескольких переменных.

Ключевые слова: операторно липшицевы функции.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 14-01-00198.

§2. Преобразования Мёбиуса пространства $\widehat{\mathbb{R}}^n$

По поводу преобразований Мёбиуса мы отсылаем читателя к монографии [5]. В этом параграфе мы приводим обозначения, относящиеся к преобразованиям Мёбиуса, которые будут использоваться в дальнейшем и которые не во всём соответствуют обозначениям монографии [5]. Группа Мёбиуса $\mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ определятся как группа преобразований пространства $\widehat{\mathbb{R}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, порождённая инверсиями. Элементы группы $\mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ называются *преобразованиями Мёбиуса*.

Положим $\mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n) : \varphi(\infty) = \infty\}$. Каждое преобразование $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$ допускает представление в виде $\varphi(x) = \alpha Hx + a$, где $a = \varphi(0)$, $\alpha > 0$, H – ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$.

Символом ϕ мы обозначаем инверсию относительно единичной сферы $S^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, т. е. $\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x|^{-2}x$.

Преобразование Мёбиуса $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n) \setminus \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$ представимо в виде $\varphi(x) = a + \alpha\phi(H(x-b))$, где $a = \varphi(\infty)$, $b = \varphi^{-1}(\infty)$, $\alpha > 0$, H – ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$.

Легко видеть, что каждое преобразование Мёбиуса φ является конформным (не обязательно сохраняющим ориентацию) преобразованием пространства $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Отсюда следует, что матрица Якоби $\varphi'(a)$ в каждой точке $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq \varphi^{-1}(\infty)$, представима в виде $\varphi'(a) = \alpha H$, где $\alpha > 0$, H – ортогональная матрица размеров $n \times n$. Следовательно, $\|\varphi'(a)\|^n = |\det \varphi'(a)|$, где $\|\varphi'(a)\|$ обозначает операторную норму матрицы $\varphi'(a)$. Таким образом, $\|\varphi'(a)\psi'(b)\| = \|\varphi'(a)\| \cdot \|\psi'(b)\|$, где ψ – ещё одно преобразование Мёбиуса, $b \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbf{M\ddot{o}b}_+(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ обозначает подгруппу группы $\mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, состоящую из всех преобразований Мёбиуса $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, сохраняющих ориентацию, т.е. таких, что $\det \varphi' > 0$.

При $n = 2$ группа $\mathbf{M\ddot{o}b}_+(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ отождествляется естественным образом с группой Мёбиуса дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

При $n \geqslant 3$ в силу теоремы Лиувилля каждое конформное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, где Ω – область пространства $\mathbb{R}^n$, является сужением на Ω некоторого преобразования Мёбиуса.

Отметим ещё, что при $n \geqslant 2$ пространство $\mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ совпадает с множеством всех конформных автоморфизмов пространства $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

§3. Операторно липшицевы функции нескольких переменных

Пусть $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ обозначает пространство всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathcal{B}^n$ обозначает декартово произведение n экземпляров пространства $\mathcal{B}$. Для $\mathbf{T}=(T_1,T_2,\dots,T_n)\in\mathcal{B}^n$ положим $\|\mathbf{T}\|_l\stackrel{\text{def}}{=}\|(\sum\limits_{j=1}^n T_j^*T_j)^{\frac12}\|$, $\|\mathbf{T}\|_r\stackrel{\text{def}}{=}\|(\sum\limits_{j=1}^n T_jT_j^*)^{\frac12}\|$ и $\|\mathbf{T}\|\stackrel{\text{def}}{=}\max(\|\mathbf{T}\|_l,\|\mathbf{T}\|_r)$.

Пусть $H=\{h_{jk}\}$ – унитарная матрица размеров $n\times n$. Тогда матрица H задаёт оператор $W_H:\mathcal{B}^n\to\mathcal{B}^n$ следующим образом:

$$(W_H\mathbf{T})_j\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^n h_{jk}T_k\quad\text{для}\quad j\in\{1,2,\dots,n\}.$$

Легко видеть, что $\|W_H\mathbf{T}\|_l=\|\mathbf{T}\|_l$, $\|W_H\mathbf{T}\|_r=\|\mathbf{T}\|_r$ и $\|W_H\mathbf{T}\|=\|\mathbf{T}\|$.

Ясно, что $\|\mathbf{T}^*\|_r=\|\mathbf{T}\|_l$, где $\mathbf{T}^*\stackrel{\text{def}}{=}(T_1^*,T_2^*,\dots,T_n^*)$. Следовательно, $\|\mathbf{T}^*\|=\|\mathbf{T}\|$. Следует отметить, что, вообще говоря, $\|\mathbf{T}^*\|_l\ne\|\mathbf{T}\|_l$ и $\|\mathbf{T}^*\|_r\ne\|\mathbf{T}\|_r$.

Положим $|\mathbf{T}|\stackrel{\text{def}}{=}(\sum\limits_{j=1}^n T_j^2)^{\frac12}$, если набор $\mathbf{T}$ состоит из самосопряжённых операторов. Заметим, что $|\mathbf{T}|=|W_H\mathbf{T}|$, если H – ортогональная матрица размеров $n\times n$ и $\mathbf{T}^*=\mathbf{T}$.

Пусть $R\in\mathcal{B}$. Положим

$$R\mathbf{T}\stackrel{\text{def}}{=}(RT_1,RT_2,\dots,RT_n)\quad\text{и}\quad\mathbf{T}R\stackrel{\text{def}}{=}(T_1R,T_2R,\dots,T_nR).$$

Легко видеть, что $\|R\mathbf{T}\|_l\leqslant\|R\|\cdot\|\mathbf{T}\|_l$ и $\|\mathbf{T}R\|_l\leqslant\|\mathbf{T}\|_l\cdot\|R\|$. Аналогичные неравенства имеют место для норм $\|\cdot\|_r$ и $\|\cdot\|$ на пространстве $\mathcal{B}^n$.

Обозначим через $\mathcal{B}^n_{sa}$ множество всех $\mathbf{A}=(A_1,A_2,\dots,A_n)\in\mathcal{B}^n$ таких, что $A_j^*=A_j$ и $A_jA_k=A_kA_j$ для всех j и k. Следует отметить, что множество $\mathcal{B}^n_{sa}$ не является линейным при $n\geqslant2$. Вещественно линейная оболочка множества $\mathcal{B}^n_{sa}$ совпадает с множеством всех наборов операторов $\mathbf{T}=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ таких, что $\mathbf{T}^*=\mathbf{T}$.

Пусть $E_{\mathbf{A}}$ обозначает совместную спектральную меру набора операторов $\mathbf{A}\in\mathcal{B}^n_{sa}(\mathfrak{H})$. Совместный спектр $\sigma(\mathbf{A})=\operatorname{supp}E_{\mathbf{A}}$ набора операторов $\mathbf{A}\in\mathcal{B}^n_{sa}(\mathfrak{H})$ совпадает с множеством всех $\lambda\in\mathbb{R}^n$ таких, что оператор $\sum\limits_{j=1}^{n}(A_j-\lambda_j I)^2$ необратим. Здесь и далее I обозначает тождественный оператор. Все нужные нам сведения, относящиеся к совместной спектральной мере и совместному спектру, могут быть найдены, например, в монографии [6].

Для любой ограниченной борелевской функции f на совместном спектре $\sigma(\mathbf{A})$ набора операторов $\mathbf{A}\in\mathcal{B}_{sa}^n$ мы полагаем $f(\mathbf{A})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int f\,dE_{\mathbf{A}}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Символом $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ мы обозначаем пространство всех функций $f:\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих *условию Липшица*:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|,\quad x,y\in\mathfrak{F}. \tag{3.1}$$

Наименьшую из констант C, удовлетворяющих условию (3.1), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$. Положим $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}\stackrel{\mathrm{def}}{=}+\infty$, если $f\notin\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$.

Нам понадобятся следующие две элементарные и хорошо известные леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $f\in\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\|f(\mathbf{A})-f(\mathbf{B})\|\leqslant\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \tag{3.2}$$

для любых $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{B}_{sa}^n$ таких, что $\sigma(\mathbf{A}),\sigma(\mathbf{B})\subset\mathfrak{F}$ и $A_jB_k=B_kA_j$ для всех $j,k\in\{1,2,\dots,n\}$.

Доказательство. Пусть $E_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ обозначает совместную спектральную меру набора попарно коммутирующих самосопряжённых операторов $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathcal{B}_{sa}^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned}f(\mathbf{A})-f(\mathbf{B})&=\int\limits_{\sigma(\mathbf{A})}f(x)\,dE_{\mathbf{A}}(x)-\int\limits_{\sigma(\mathbf{B})}f(y)\,dE_{\mathbf{B}}(y)\\&=\int_{\sigma(\mathbf{A},\mathbf{B})}\big(f(x)-f(y)\big)\,dE_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(x,y).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{A})-f(\mathbf{B})\|&=\sup\{|f(x)-f(y)|:(x,y)\in\sigma(\mathbf{A},\mathbf{B})\}\\&\leqslant\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}\sup\{|x-y|:(x,y)\in\sigma(\mathbf{A},\mathbf{B})\}.\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что

$$\sup\{|x-y|^2 : (x,y) \in \sigma(\mathbf{A},\mathbf{B})\} = \left\| \int\limits_{\sigma(\mathbf{A},\mathbf{B})} |x-y|^2 \, dE_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(x,y) \right\|$$
$$= \left\| \sum_{j=1}^n (A_j - B_j)^2 \right\| = \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2. \quad \square$$

Лемма 3.2. *Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{B}_{sa}^n$. Предположим, что множество Λ, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, является ε-сетью совместного спектра $\sigma(\mathbf{A})$ набора операторов $\mathbf{A}$, т. е. для любой точки $\zeta \in \sigma(\mathbf{A})$ существует точка $\lambda \in \Lambda$ такая, что $|\lambda - \zeta| < \varepsilon$. Тогда существует набор операторов $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_{sa}^n$ такой, что $A_jB_k = B_kA_j$ для всех $j,k \in \{1,2,\dots,n\}$, $\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| < \varepsilon$ и $\sigma(\mathbf{B})$ – конечное подмножество множества Λ.*

Доказательство. В силу компактности совместного спектра $\sigma(\mathbf{A})$ набора операторов $\mathbf{A}$ существует конечная ε-сеть Λ_0 множества $\sigma(\mathbf{A})$ такая, что $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Тогда мы можем найти борелевскую функцию $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) : \sigma(\mathbf{A}) \to \Lambda_0$ такую, что $\sup\{|\zeta - \eta(\zeta)| : \zeta \in \sigma(\mathbf{A})\} < \varepsilon$. Остаётся положить $\mathbf{B} = \eta(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} (\eta_1(\mathbf{A}), \eta_2(\mathbf{A}), \dots, \eta_n(\mathbf{A}))$. $\square$

Комплексную непрерывную функцию f, заданную на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^n$, будем называть *операторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\| \leqslant C\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \tag{3.3}$$

для любых $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathcal{B}_{sa}^n$ с совместными спектрами $\sigma(\mathbf{A})$ и $\sigma(\mathbf{B})$, лежащими в $\mathfrak{F}$.

Множество всех операторно липшицевых функций, заданных на $\mathfrak{F}$, обозначим через $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$. Наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (3.3), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$. Положим $\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} = +\infty$, если $f \notin \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$.

Легко видеть, что функционал $\|\cdot\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$ является полунормой на $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} = 0$ в том и только в том случае, когда функция f постоянна.

С каждой точкой $a \in \mathfrak{F}$ свяжем пространство $\mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}) : f(a) = 0\}$. Пространство $\mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F})$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$ является банаховым пространством.

Если функция f задана на более широком множестве $\Lambda \supset \mathfrak{F}$, то для краткости мы будем обычно писать $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$ вместо $f|\mathfrak{F} \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ и $\|f|\mathfrak{F}\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$. Это же соглашение будет применяться и для других функциональных пространств.

Легко видеть, что $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$ для любой функции $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$.

Отметим ещё, что из леммы 3.2 и неравенства (3.2) следует, что

$$\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} = \sup\big\{\|f\|_{\mathrm{OLip}(\Lambda)} : \Lambda \subset \mathfrak{F},\ \ \Lambda \text{ – конечно}\big\}. \tag{3.4}$$

Для непрерывной на $\mathfrak{F}$ функции f имеет место более сильное утверждение:

$$\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} = \sup\big\{\|f\|_{\mathrm{OLip}(\Lambda)} : \Lambda \subset \mathfrak{F}_0,\ \ \Lambda \text{ – конечно}\big\}, \tag{3.5}$$

где $\mathfrak{F}_0$ – всюду плотное подмножество множества $\mathfrak{F}$.

Операторно липшицевы функции на пространстве $\mathbb{R}^n$ исследовались в работах Ф. Л. Назарова и В. В. Пеллера [9],[10].

В отличие от работ [9] и [10], мы рассматриваем только *ограниченные* самосопряжённые операторы, хотя можно доказать, что пространство $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ и полунорма $\|\cdot\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$ не претерпели бы изменений, если бы мы допустили рассмотрение неограниченных[1] самосопряжённых операторов.

Хорошо известно, что если $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}$, то любая функция $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ дифференцируема в каждой неизолированной точке множества $\mathfrak{F}$, см. [7] и [8]. Аналогично для неограниченного множества $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}$ можно утверждать, что любая функция $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ имеет конечную производную в бесконечности, если положить $f'(\infty) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{|t|\to+\infty} t^{-1}f(t)$, см. также теорему 4.16 статьи [2].

Результат о дифференцируемости операторно липшицевой функции вещественной переменной приводит к следующему утверждению для операторно липшицевой функции нескольких переменных.

Если $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^n$, то для любой прямой $l \subset \mathbb{R}^n$ сужение $f|(l\cap\mathfrak{F})$ имеет конечную производную в каждой неизолированной точке множества $l\cap\mathfrak{F}$ и в бесконечности, если множество $l\cap\mathfrak{F}$ неограничено.

[1] Из условия $\sigma(\mathbf{A}), \sigma(\mathbf{B}) \subset \mathfrak{F}$ видно, что неограниченные самосопряжённые операторы могли бы участвовать в определениях пространства $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ и полунормы $\|\cdot\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$ только в случае неограниченного множества $\mathfrak{F}$.

В частности, функция $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ должна иметь конечные производные по всем направлениям в каждой внутренней точке множества $\mathfrak{F}$. Тем не менее, уже при $n = 2$ функция $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ не обязана быть дифференцируемой как функция двух вещественных переменных в каждой (внутренней) точке множества $\mathfrak{F}$, см., например, теорему 3.5 в [3] или следствие 4.3 в [1].

Следующее утверждение является аналогом теоремы 3.1 статьи [3] для наборов коммутирующих самосопряжённых операторов.

Теорема 3.3. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Следующие утверждения равносильны*:

(i) $\|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\| \leqslant \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ *для всех* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ *таких, что* $\sigma(\mathbf{A}), \sigma(\mathbf{B}) \subset \mathfrak{F}$;

(ii) $\|f(\mathbf{A})U - Uf(\mathbf{A})\| \leqslant \|\mathbf{A}U - U\mathbf{A}\|$ *для всех унитарных операторов* U *и всех* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ *таких, что* $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathfrak{F}$;

(iii) $\|f(\mathbf{A})R - Rf(\mathbf{A})\| \leqslant \|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|$ *для всех самосопряжённых операторов* R *и всех* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ *таких, что* $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathfrak{F}$;

(iv) $\|f(\mathbf{A})P - Pf(\mathbf{A})\| \leqslant \|\mathbf{A}P - P\mathbf{A}\|$ *для всех ортогональных проекторов* P *и всех* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ *таких, что* $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathfrak{F}$;

(v) $\|f(\mathbf{A})R - Rf(\mathbf{A})\| \leqslant \|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|$ *для всех* $R \in \mathcal{B}$ *и всех* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ *таких, что* $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathfrak{F}$;

(vi) $\|f(\mathbf{A})R - Rf(\mathbf{B})\| \leqslant \|\mathbf{A}R - R\mathbf{B}\|$ *для всех* $R \in \mathcal{B}$ *и всех* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ *таких, что* $\sigma(\mathbf{A}), \sigma(\mathbf{B}) \subset \mathfrak{F}$.

Доказательство. Импликации (vi)$\Longrightarrow$(i) и (iii)$\Longrightarrow$(iv) тривиальны. Таким образом, достаточно убедиться в справедливости импликаций (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(v)$\Longrightarrow$(vi) и (iv)$\Longrightarrow$(i).

Чтобы доказать импликацию (i)$\Longrightarrow$(ii), достаточно положить $\mathbf{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} U\mathbf{A}U^*$.

Докажем, что (ii)$\Longrightarrow$(iii). Применяя (ii) для $U = \exp(\mathrm{i}tR)$, получаем:

$$\big\|f(\mathbf{A}) - \exp(\mathrm{i}tR)f(\mathbf{A})\exp(-\mathrm{i}tR)\big\| \leqslant \big\|\mathbf{A} - \exp(\mathrm{i}tR)\mathbf{A}\exp(-\mathrm{i}tR)\big\|$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Чтобы получить отсюда (iii), достаточно заметить, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|\mathbf{T} - \exp(\mathrm{i}tR)\mathbf{T}\exp(-\mathrm{i}tR)\|}{|t|} = \|R\mathbf{T} - \mathbf{T}R\|$$

для любого $\mathbf{T} \in \mathcal{B}^n$.

Докажем теперь, что (iii)$\Longrightarrow$(v). Положим

$$D_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} A_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_j \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & R \\ R^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$, $\sigma(\mathbf{D}) = \sigma(\mathbf{A})$, где $\mathbf{D} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (D_1, D_2, \dots, D_n)$,

$$f(\mathbf{D})\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & f(\mathbf{A})R \\ f(\mathbf{A})R^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}f(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & Rf(\mathbf{A}) \\ R^*f(\mathbf{A}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\|f(\mathbf{D})\mathcal{R} - \mathcal{R}f(\mathbf{D})\| = \max\big\{\|f(\mathbf{A})R - Rf(\mathbf{A})\|,\ \|f(\mathbf{A})R^* - R^*f(\mathbf{A})\|\big\}$$

и

$$\|\mathbf{D}\mathcal{R} - \mathcal{R}\mathbf{D}\| = \|\mathbf{D}\mathcal{R} - \mathcal{R}\mathbf{D}\|_l = \max\big\{\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|_l, \\ \|\mathbf{A}R^* - R^*\mathbf{A}\|_l\big\} = \|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.$$

Следовательно,

$$\|f(\mathbf{A})R - Rf(\mathbf{A})\| \leqslant \|f(\mathbf{D})\mathcal{R} - \mathcal{R}f(\mathbf{D})\| \leqslant \|\mathbf{D}\mathcal{R} - \mathcal{R}\mathbf{D}\| = \|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.$$

Докажем теперь, что (v)$\Longrightarrow$(vi). Положим

$$D_j = \begin{pmatrix} A_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_j \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & R \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma(\mathbf{D}) = \sigma(\mathbf{A}) \cup \sigma(\mathbf{B}) \subset \mathfrak{F}$, где $\mathbf{D} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (D_1, D_2, \dots, D_n)$,

$$f(\mathbf{D})\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & f(\mathbf{A})R \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}f(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & Rf(\mathbf{B}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\|f(\mathbf{A})R - Rf(\mathbf{B})\| = \|f(\mathbf{D})\mathcal{R} - \mathcal{R}f(\mathbf{D})\| \leqslant \|\mathbf{D}\mathcal{R} - \mathcal{R}\mathbf{D}\| = \|\mathbf{A}R - R\mathbf{B}\|.$$

Чтобы завершить доказательство, остаётся показать, что (iv)$\Longrightarrow$(i).

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{B}_{sa}^n$, причём $\sigma(\mathbf{A}), \sigma(\mathbf{B}) \subset \mathfrak{F}$. Положим

$$D_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} A_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_j \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\sigma(\mathbf{D}) = \sigma(\mathbf{A}) \cup \sigma(\mathbf{B}) \subset \mathfrak{F}$, где $\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} (D_1, D_2, \dots, D_n)$,

$$f(\mathbf{D})P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(\mathbf{A}) & f(\mathbf{A}) \\ f(\mathbf{B}) & f(\mathbf{B}) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Pf(\mathbf{D}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(\mathbf{A}) & f(\mathbf{B}) \\ f(\mathbf{A}) & f(\mathbf{B}) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\|f(\mathbf{D})P - Pf(\mathbf{D})\| = \frac{1}{2}\|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\|$$

и

$$\|\mathbf{D}P - P\mathbf{D}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|.$$

Следовательно,

$$\|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\| = 2\|f(\mathbf{D})P - Pf(\mathbf{D})\| \leqslant 2\|\mathbf{D}P - P\mathbf{D}\| = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|. \quad \square$$

3.1. Оценки операторно липшицевой нормы продолженной функции.

Пусть $B(a,r)$ обозначает замкнутый шар радиуса r, $r \geqslant 0$, с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$, т. е. $B(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leqslant r\}$.

Лемма 3.4. *Пусть $f \in \operatorname{OLip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, и $a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathfrak{F}$. Положим*

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \mathfrak{F}, \\ 0, & \text{если } x \in B(a,r), \end{cases}$$

где $r = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(a, \mathfrak{F})$. Тогда $F \in \operatorname{OLip}(\mathfrak{F} \cup B(a,r))$ и

$$\max\left(\|f\|_{\operatorname{OLip}(\mathfrak{F})}, \sup_{x\in\mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x-a|}\right) \leqslant \|F\|_{\operatorname{OLip}(\mathfrak{F}\cup B(a,r))} \leqslant \|f\|_{\operatorname{OLip}(\mathfrak{F})} + c_n \sup_{x\in\mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x-a|},$$

где число c_n зависит только от n.

Доказательство. Можно считать, что $a = 0$. Чтобы получить оценку снизу, достаточно заметить, что

$$\sup_{x\in\mathfrak{F}} |x|^{-1}|f(x)| \leqslant \|F\|_{\operatorname{Lip}(\mathfrak{F}\cup B(a,r))} \leqslant \|F\|_{\operatorname{OLip}(\mathfrak{F}\cup B(a,r))}.$$

Переходим к оценке сверху. В силу теоремы 3.3 нам достаточно доказать следующее неравенство:

$$\|F(\mathbf{A})R - RF(\mathbf{A})\| \leqslant \Big(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + c_n \sup_{x\in\mathfrak{F}} |x|^{-1}|f(x)|\Big)\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|$$

для любого самосопряжённого оператора R и для любого $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ такого, что $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathfrak{F} \cup B(0,r)$. Положим $P \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_{\mathbf{A}}(\mathfrak{F})$ и $Q \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_{\mathbf{A}}(B(0,r))$. Ясно, что P и Q – ортогональные проекторы, причём $P + Q = I$. Положим $\mathcal{H}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker Q$ и $\mathbf{A}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{A}|\mathcal{H}_0$. Тогда $\sigma(\mathbf{A}_0) \subset \mathfrak{F}$. Ясно, что $QF(\mathbf{A}) = F(\mathbf{A})Q = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}F(\mathbf{A})R - RF(\mathbf{A}) &= P(F(\mathbf{A})RP - PRF(\mathbf{A}))P + P(F(\mathbf{A})RQ - PRF(\mathbf{A}))Q\\ &\quad+Q(F(\mathbf{A})RP - QRF(\mathbf{A}))P + Q(F(\mathbf{A})RQ - QRF(\mathbf{A}))Q\\ &= PF(\mathbf{A})PRP - PRPF(\mathbf{A})P + PF(\mathbf{A})RQ - QRF(\mathbf{A})P,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}&\|F(\mathbf{A})R - RF(\mathbf{A})\|\\ &\leqslant \|PF(\mathbf{A})PRP - PRPF(\mathbf{A})P\| + \|PF(\mathbf{A})RQ\| + \|QRF(\mathbf{A})P\|\\ &\leqslant \|PF(\mathbf{A})PRP - PRPF(\mathbf{A})P\| + \|F(\mathbf{A})RQ\| + \|QRF(\mathbf{A})\|.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\|PF(\mathbf{A})PRP - PRPF(\mathbf{A})P\| = \|f(\mathbf{A}_0)PRP - PRPf(\mathbf{A}_0)\|\\ &\leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A}_0PRP - PRP\mathbf{A}_0\| = \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|P(\mathbf{A}R - R\mathbf{A})P\|\\ &\qquad\leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.\end{aligned}$$

Теперь остаётся доказать, что

$$\|F(\mathbf{A})RQ\| + \|QRF(\mathbf{A})\| \leqslant c_n \left(\sup_{x\in\mathfrak{F}} |x|^{-1}|f(x)|\right) \|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.$$

Возьмём функцию $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\lambda(x) = 1$, если $|x| \leqslant 1$, и $\lambda(x) = 0$, если $|x| \geqslant 2$. Известно, см. [9] и [10], что любая бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем является операторно липшицевой. В частности, $x_k\lambda(x) \in \mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)$ при всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, откуда $x_k(1 - \lambda(x)) \in \mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что $\|w\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)} = \|rw(x/r)\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}$ для любой функции $w \in \mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\|x_k(1-\lambda(x))\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)} = \|x_k(1-\lambda(x/r))\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}$. Представим функцию F в виде $F = \sum\limits_{k=1}^n g_kh_k$, где $g_k(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_k(1 - \lambda(x/r))$, $h_k(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_k|x|^{-2}F(x)$, $h_k(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$. Заметим, что $\sup\{|h_k(x)| : x \in$

$\mathfrak{F} \cup B(0,r)\} = \sup\{|h_k(x)| : x \in \mathfrak{F}\} \leqslant \sup\{|x|^{-1}|f(x)| : x \in \mathfrak{F}\}$. Следовательно,

$$\|F(\mathbf{A})RQ\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|h_k(\mathbf{A})\| \cdot \|g_k(\mathbf{A})RQ\| \leqslant \sup_{x\in\mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x|} \sum_{k=1}^{n} \|g_k(\mathbf{A})RQ\|.$$

Оценим теперь каждое слагаемое последней суммы:

$$\begin{aligned}\|g_k(\mathbf{A})RQ\| = \|g_k(\mathbf{A})RQ - RQg_k(\mathbf{A})\| &\leqslant \|g_k\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{A}RQ - RQ\mathbf{A}\| \\ &= \|x_k(1-\lambda(x))\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\|(\mathbf{A}R - R\mathbf{A})Q\| \\ &\leqslant \|x_k(1-\lambda(x))\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|F(\mathbf{A})RQ\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k(1-\lambda(x))\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\right) \|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\|QRF(\mathbf{A})\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k(1-\lambda(x))\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\right) \|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|. \quad \square$$

Следствие 3.5. *Пусть выполнены условия леммы* 3.4. *Тогда*

$$\begin{aligned}&c_n^{-1}\left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x\in\mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x-a|}\right) \\ &\leqslant \|F\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}\cup B(a,t))} \leqslant c_n\left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x\in\mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x-a|}\right)\end{aligned}$$

для всех $t \in [0,r]$, *где число* c_n *зависит только от* n.

Нам понадобится также аналог леммы 3.4 для $a = \infty$.

Лемма 3.6. *Пусть* $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, *где* $\mathfrak{F}$ – *компактное подмножество пространство* $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{F} \not\subset \{0\}$. *Положим*

$$F(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \textit{если } x \in \mathfrak{F}, \\ 0, & \textit{если } |x| \geqslant r, \end{cases}$$

где $r \geqslant 2\max_{x\in\mathfrak{F}}|x|$. *Тогда* $F \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}^{[r]})$, *где* $\mathfrak{F}^{[r]} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \mathfrak{F}$ *или* $|x| \geqslant r\}$, *и*

$$\max\Big(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}, r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\Big) \leqslant \|F\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}^{[r]})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + c_n r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|,$$

где число c_n *зависит только от* n.

Доказательство. Рассуждаем аналогично доказательству леммы 3.4. Мы остановимся только на оценке сверху. В силу теоремы 3.3 достаточно доказать следующее неравенство:

$$\|F(\mathbf{A})R - RF(\mathbf{A})\| \leqslant \Big(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + c_n r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\Big)\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|$$

для любого самосопряжённого оператора R и для любого $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n_{sa}$ такого, что $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathfrak{F}^{[r]}$. Положим $P \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_{\mathbf{A}}(\mathfrak{F})$ и $Q \stackrel{\mathrm{def}}{=} I - P$. Пусть $\mathcal{H}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker Q$ и $\mathbf{A}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{A}|\mathcal{H}_0$. Тогда $\sigma(\mathbf{A}_0) \subset \mathfrak{F}$. Так же, как в доказательстве леммы 3.4, получаем

$$\|F(\mathbf{A})R - RF(\mathbf{A})\| \leqslant \|PF(\mathbf{A})PRP - PRPF(\mathbf{A})P\| + \|F(\mathbf{A})RQ\| + \|QRF(\mathbf{A})\|$$

и

$$\|PF(\mathbf{A})PRP - PRPF(\mathbf{A})P\| \leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.$$

Теперь остаётся доказать, что

$$\|F(\mathbf{A})RQ\| + \|QRF(\mathbf{A})\| \leqslant c_n r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.$$

Используя функцию λ, введённую в доказательстве леммы 3.4, представим функцию F в виде $F = gh$, где $g(x) = \frac{1}{2}r\lambda(2x/r)$ и

$$h(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 2r^{-1}F(x)(\lambda(2x/r))^{-1}, & \text{если } x \in \mathfrak{F}, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant r. \end{cases}$$

Ясно, что $\|g\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)} = \|\lambda\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}$ и $\sup_{x\in\mathfrak{F}^{[r]}}|h(x)| = \max_{x\in\mathfrak{F}}|h(x)| = 2r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|$. Имеем:

$$\begin{aligned}\|F(\mathbf{A})RQ\| &\leqslant \|h(\mathbf{A})\|\cdot\|g(\mathbf{A})RQ\| \\ &\leqslant 2\left(r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\right)\|g(\mathbf{A})RQ - RQg(\mathbf{A})\| \\ &\leqslant 2\left(r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\right)\|g\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{A}RQ - RQ\mathbf{A}\| \\ &= 2\left(r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\right)\|\lambda\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\|(\mathbf{A}R - R\mathbf{A})Q\| \\ &\leqslant 2\left(r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\right)\|\lambda\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\|QRF(\mathbf{A})\| \leqslant 2\left(r^{-1}\max_{x\in\mathfrak{F}}|f(x)|\right)\|\lambda\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{A}R - R\mathbf{A}\|. \quad \square$$

3.2. Операторно липшицевы функции двух вещественных переменных и операторно липшицевы функции комплексной переменной. Пусть f – непрерывная функция на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Положим

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{\frac{\|f(M) - f(N)\|}{\|M - N\|} : M, N \in \mathcal{B},\ M^*M = MM^*,\ N^*N = NN^*,\ M \neq N\right\}.$$

Обозначим через $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ пространство всех непрерывных функций $f : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ таких, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} < +\infty$. Именно это пространство операторно липшицевых функций (точнее, именно с такой полунормой) рассматривалось в работах [4], [3] и [1].

Теорема 3.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Тогда $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и*

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \tag{3.6}$$

для всех $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$.

Докажем сначала лемму.

Лемма 3.8. *Пусть $\mathbf{A} = (A_1, A_2) \in \mathcal{B}^2$. Предположим, что $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, т. е. операторы A_1 и A_2 самосопряжённые. Тогда $\|\mathbf{A}\| \leqslant \|A_1 + \mathrm{i}A_2\| \leqslant \sqrt{2}\|\mathbf{A}\|$.*

Доказательство. Используя тождество

$$2A_1^2 + 2A_2^2 = (A_1 + \mathrm{i}A_2)^*(A_1 + \mathrm{i}A_2) + (A_1 + \mathrm{i}A_2)(A_1 + \mathrm{i}A_2)^*, \qquad (3.7)$$

получаем:

$$2\|\mathbf{A}\|^2 \leqslant \|A_1 + \mathrm{i}A_2\|^2 + \|A_1 + \mathrm{i}A_2\|^2 = 2\|A_1 + \mathrm{i}A_2\|^2.$$

Чтобы доказать оценку сверху, достаточно заметить, что

$$(A_1 + \mathrm{i}A_2)^*(A_1 + \mathrm{i}A_2) \leqslant (A_1 + \mathrm{i}A_2)^*(A_1 + \mathrm{i}A_2) + (A_1 + \mathrm{i}A_2)(A_1 + \mathrm{i}A_2)^*$$

и воспользоваться тождеством (3.7). □

Доказательство теоремы 3.7. Достаточно доказать неравенства (3.6) для любой непрерывной на $\mathfrak{F}$ функции f. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{B}_{sa}^2$. Тогда

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\| &= \|f(A_1 + \mathrm{i}A_2) - f(B_1 + \mathrm{i}B_2)\| \\ &\leqslant \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|(A_1 - B_1) + \mathrm{i}(A_2 - B_2)\| \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Чтобы доказать неравенство $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$, заметим, что

$$\begin{aligned}\|f(A_1 + \mathrm{i}A_2) - f(B_1 + \mathrm{i}B_2)\| &= \|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\| \\ &\leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| \leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|(A_1 - B_1) + \mathrm{i}(A_2 - B_2)\|. \quad \square\end{aligned}$$

Замечание 1. Если $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}$, то $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$. Это доказывает точность первого неравенства в (3.6). Второе неравенство в (3.6) тоже, вообще говоря, неулучшаемо.

Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что для функции $f(x) = x_1 + \mathrm{i}x_2$ имеют место следующие равенства: $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = 1$ и $\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} = \sqrt{2}$, если множество $\mathfrak{F}$ содержит вершины квадрата. Первое равенство очевидно для любого множества $\mathfrak{F}$, содержащего по крайней мере две точки. Чтобы доказать второе равенство, будем считать для определённости, что множество $\mathfrak{F}$ содержит вершины квадрата $\{|x_1| + |x_2| \leqslant 1\}$. Положим $A_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{0}$, $B_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{0}$,

$$A_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (A_1, A_2)$, $\mathbf{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (B_1, B_2)$. Тогда $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{2}$ и $\|(A_1 - B_1) + \mathrm{i}(A_2 - B_2)\| = \|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\| = 2$.

Замечание 2. Можно доказать, что если $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, где $a, b \in \mathbb{C}$, то

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} = \frac{1}{2}(|a + \mathrm{i}b| + |a - \mathrm{i}b|) = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2)}$$

и

$$\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \|\widehat{f}\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{C}^2)},$$

где $\widehat{f}(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$.

§4. Операторно липшицевы функции на замкнутых подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$ и преобразования Мёбиуса

Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Положим $\mathfrak{F}_\varphi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^n \cap \varphi^{-1}(\mathfrak{F} \cup \{\infty\})$.

Легко видеть, что $\mathfrak{F}_\varphi$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Если $\mathfrak{F} = \mathbb{R}^n$, то $\mathfrak{F}_\varphi = \mathfrak{F} = \mathbb{R}^n$. Ясно, что $\mathfrak{F}_\varphi = \varphi^{-1}(\mathfrak{F})$, если $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$. Если же $\varphi \notin \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi^{-1}(\infty) \in \mathfrak{F}_\varphi$ и $\mathfrak{F}_\varphi \ne \varphi^{-1}(\mathfrak{F})$.

С каждой функцией f на множестве $\mathfrak{F}$ мы связываем функцию $T_\varphi f$, заданную на множестве $\mathfrak{F}_\varphi$ следующим образом:

$$(T_\varphi f)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(\varphi(x))}{\|\varphi'(x)\|}, & \text{если } x \in \mathfrak{F}_\varphi \text{ и } \varphi(x) \ne \infty, \\ 0, & \text{если } \varphi(x) = \infty \text{ и } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Если $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$, то $(T_\varphi f)(x) = \dfrac{f(\varphi(x))}{\|\varphi'(x)\|} = \dfrac{f(\varphi(x))}{\|\varphi'(0)\|}$ при всех $x \in \mathfrak{F}_\varphi = \varphi^{-1}(\mathfrak{F})$.

Теорема 4.1. *Пусть $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $T_\varphi(\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})) = \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\varphi)$ и $\|T_\varphi f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\varphi)} = \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$ для всех $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Заметим, что $T_{\psi\circ\varphi} f = T_\psi(T_\varphi f)$ для любых $\varphi, \psi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, достаточно рассмотреть следующие частные случаи: φ – параллельный перенос, φ – растяжение с центром в нуле, φ – ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$. В каждом из этих частных случаев теорема очевидна. $\square$

Прежде чем рассматривать случай произвольного преобразования $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)\setminus\mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$, мы рассмотрим случай, когда $\varphi(x) = \phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x|^{-2}x$.

В этом случае $\mathfrak{F}_\phi = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \in \mathfrak{F}\}$. Кроме того, $(\mathfrak{F}_\phi)_\phi = \{0\} \cup \mathfrak{F}$. Отметим ещё, что $T_\phi(T_\phi f) = f$, если $0 \in \mathfrak{F}$ и $f(0) = 0$.

Теорема 4.2. *Пусть $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, причём $\mathfrak{F} \ni 0$. Положим*

$$g_{jk}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j x_k (f(|x|^{-2}x) - f(0)), & \text{если } x \in \mathfrak{F}_\phi \text{ и } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $g_{jk} \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)$ и

$$\|g_{jk}\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)} \leqslant c_n \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$$

для всех $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, где число c_n зависит только от n.

Доказательство. Отметим сначала, что функции g_{jk} непрерывны. Непрерывность вне нуля очевидна. Непрерывность в нуле легко следует из того, что $f \in \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$.

Нам нужно доказать, что

$$\|g_{jk}(\mathbf{A}) - g_{jk}(\mathbf{B})\| \leqslant c_n \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| \tag{4.1}$$

для всех $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{B}_{sa}^n$ таких, что $\sigma(\mathbf{A}) \cup \sigma(\mathbf{B}) \subset \mathfrak{F}_\phi$. Сначала мы рассмотрим случай, когда множество $\mathfrak{F}$ неограничено. В этом случае 0 является предельной точкой множества $\mathfrak{F}_\phi$, поэтому в силу равенства (3.5) при доказательстве неравенства (4.1) достаточно ограничиться случаем, когда $0 \notin \sigma(\mathbf{A}) \cup \sigma(\mathbf{B})$. Кроме того, можно считать, что $\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} = 1$ и $f(0) = 0$. Теперь неравенство (4.1) можно переписать следующим образом:

$$\|A_j A_k f(|\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}) - B_j B_k f(|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B})\| \leqslant c_n \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$$

для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{B}_{sa}^n$ таких, что $0 \notin \sigma(\mathbf{A}) \cup \sigma(\mathbf{B})$.

Имеем:

$$A_j A_k f(|\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}) - B_j B_k f(|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B}) = f(|\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}) A_j (A_k - B_k)$$
$$+ f(|\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}) A_j B_k - A_j B_k f(|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B}) + (A_j - B_j) B_k f(|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B}).$$

Заметим, что $|x_j f(x|x|^{-2})| \leqslant |x_j| \cdot |x|^{-1} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant 1$ при всех $x \in \mathfrak{F}\setminus\{0\}$. Следовательно, $\|f(|\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}) A_j\| \leqslant 1$. Аналогично

$$\|B_k f(|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B})\| \leqslant 1.$$

Теперь, используя теорему 3.3, получаем

$$\|A_jA_kf(|\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A})-B_jB_kf(|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B})\|\leqslant\|A_k-B_k\|+\|A_j-B_j\|$$
$$+\||\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}A_jB_k-A_jB_k|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B}\|. \quad (4.2)$$

Заметим, что

$$\||\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}A_jB_k-A_jB_k|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B}\|\leqslant\sum_{l=1}^n\||\mathbf{A}|^{-2}A_lA_jB_k-A_jB_kB_l|\mathbf{B}|^{-2}\|$$
$$=\sum_{l=1}^n\||\mathbf{A}|^{-2}(A_lA_jB_k|\mathbf{B}|^2-|\mathbf{A}|^2A_jB_kB_l)|\mathbf{B}|^{-2}\|$$
$$\leqslant\sum_{l=1}^n\sum_{s=1}^n\||\mathbf{A}|^{-2}(A_lA_jB_kB_s^2-A_s^2A_jB_kB_l)|\mathbf{B}|^{-2}\|.$$

Чтобы оценить каждое слагаемое последней суммы, заметим, что

$$|\mathbf{A}|^{-2}(A_lA_jB_kB_s^2-A_s^2A_jB_kB_l)|\mathbf{B}|^{-2}=|\mathbf{A}|^{-2}(A_lA_j(B_s-A_s)B_kB_s)|\mathbf{B}|^{-2}$$
$$+|\mathbf{A}|^{-2}(A_sA_j(A_l-B_l)B_kB_s)|\mathbf{B}|^{-2}+|\mathbf{A}|^{-2}(A_sA_j(B_s-A_s)B_kB_l)|\mathbf{B}|^{-2}.$$

Теперь ясно, что

$$\||\mathbf{A}|^{-2}(A_lA_jB_kB_s^2-A_s^2A_jB_kB_l)|\mathbf{B}|^{-2}\|\leqslant2\|A_s-B_s\|+\|A_l-B_l\|$$

и

$$\||\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A}A_jB_k-A_jB_k|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B}\|\leqslant3n\sum_{l=1}^n\|A_l-B_l\|\leqslant3n^2\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|.$$

Принимая во внимание формулу (4.2), получаем:

$$\|A_jA_kf(|\mathbf{A}|^{-2}\mathbf{A})-B_jB_kf(|\mathbf{B}|^{-2}\mathbf{B})\|\leqslant(3n^2+2)\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|.$$

Случай ограниченного множества $\mathfrak{F}$ мгновенно сводится к случаю неограниченного множества $\mathfrak{F}$ при помощи леммы 3.6. □

Следствие 4.3. *Пусть $f\in\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, причём $\mathfrak{F}\ni0$. Предположим, что $f(0)=0$. Тогда $T_\phi f\in\mathfrak{F}_\phi$ и*

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\leqslant\|T_\phi f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)}\leqslant c_n\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})},$$

где число c_n зависит только от n.

Доказательство. Чтобы получить оценку сверху, достаточно заметить, что $T_\phi f = \sum\limits_{j=1}^{n} g_{jj}$. Оценка снизу сводится к оценке сверху, поскольку $f = T_\phi(T_\phi f)$. $\square$

В качестве приложения теоремы 4.2 докажем следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть p – однородный многочлен степени $2m+1$ от n переменных. Тогда функция*

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} |x|^{-2m}p(x), & \text{\textit{если} } x \in \mathbb{R}^n \text{ \textit{и} } x \neq 0, \\ 0, & \text{\textit{если} } x = 0, \end{cases}$$

принадлежит пространству $\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по m. При $m = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что для однородных многочленов степени $2m-1$ утверждение доказано. Докажем теперь это для однородных многочленов степени $2m+1$. Достаточно рассматривать многочлены вида $\prod\limits_{s=1}^{2m+1} x_{j_s}$. Каждый такой многочлен представим в виде $p(x) = x_j x_k q(x)$, где q – однородный многочлен степени $2m-1$. По индукционному предположению функция $f(x) = q(x)|x|^{-2(m-1)}$ принадлежит пространству $\mathrm{OLip}_0(\mathbb{R}^n)$. Применяя теорему 4.2 к функции f, получаем $x_j x_k f(|x|^{-2}x) \in \mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)$. Остаётся заметить, что $x_j x_k f(|x|^{-2}x) = x_j x_k |x|^{2m-2} q(|x|^{-2}x) = |x|^{-2m} x_j x_k q(x)$. $\square$

Замечание 1. Случай $n = 2$ по существу содержится в теореме 3.5 статьи [3] и следствии 4.3 статьи [1].

Замечание 2. Пусть p – многочлен от n переменных, $\alpha \in \mathbb{R}$, причём α не является чётным целым неотрицательным числом. Предположим, что функция $|x|^{-\alpha}p(x)$, заданная на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, может быть продолжена до функции класса $\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $p = 0$.

Доказательство. Рассматривая сужения функции $|x|^{-\alpha}p(x)$ на прямые, проходящие через начало координат, мы видим, что случай произвольного n сводится к случаю $n = 1$. Пусть p – ненулевой многочлен одной переменной. Тогда $p(t) = \sum\limits_{j=k}^{m} c_j t^j$, где $0 \leqslant k \leqslant m$, $c_k \neq 0$, $c_m \neq 0$. Предположим, что функция $|t|^{-\alpha}p(t)$, заданная на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, продолжается до функции $f \in \mathrm{OLip}(\mathbb{R})$. Тогда f удовлетворяет обычному условию

Липшица. Следовательно, $\alpha \leqslant k \leqslant m \leqslant \alpha+1$. Рассмотрим сначала случай, когда $k < m$. Тогда $\alpha = k$ и $\alpha+1 = m$. Из липшицевости функции f вытекает существование предела функции f в нуле. Следовательно, число k чётно, и мы приходим к противоречию, поскольку $\alpha = k$. Пусть теперь $k = m$. Тогда $p(t) = c_m t^m$. Из липшицевости функции f вытекает, что $\alpha = m - 1$ или $\alpha = m$. Если $\alpha = m$, то существование предела функции f в нуле влечёт чётность числа m, и мы приходим к противоречию. Пусть теперь $\alpha = m - 1$. Тогда функция f дифференцируема в нуле, см. [7] и [8], и $f(t) = c_m t^m |t|^{-m+1}$ при $t \neq 0$, откуда следует чётность числа $m - 1$, и мы снова приходим к противоречию. $\square$

Теорема 4.5. *Пусть $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, причём $\mathfrak{F} \not\ni 0$. Положим*

$$g_{jk}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j x_k f(|x|^{-2}x), & \text{если } x \in \mathfrak{F}_\phi \text{ и } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда $g_{jk} \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)$ и

$$\|g_{jk}\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)} \leqslant c_n \left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x \in \mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x|} \right)$$

для всех $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где число c_n зависит только от n.

Доказательство. Рассмотрим продолжение f_0 функции f на множество $\mathfrak{F}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F} \cup \{0\}$ такое, что $f_0(0) = 0$. Тогда

$$\|f_0\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_0)} \leqslant c_n \left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x \in \mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x|} \right)$$

в силу следствия 3.5. Остаётся применить теорему 4.2 к функции f_0. $\square$

Следствие 4.6. *Пусть $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, причём $\mathfrak{F} \not\ni 0$. Тогда $T_\phi f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)$ и*

$$c_n^{-1} \left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x \in \mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x|} \right) \leqslant \|T_\phi f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)} \leqslant c_n \left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x \in \mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x|} \right),$$

где число c_n зависит только от n.

Доказательство. Оценка сверху мгновенно вытекает из теоремы 4.5. Докажем оценку снизу. Положим $g \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_\phi f_0$, где f_0 обозначает то же, что в доказательстве теоремы 4.5. Тогда $f_0 = T_\phi g$. Следовательно,

$$\|f_0\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_0)} \leqslant c_n \|g\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\phi)}.$$

Остаётся воспользоваться следствием 3.5. □

Перейдём теперь от преобразования ϕ к произвольному преобразованию Мёбиуса.

Лемма 4.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$; $\varphi, \psi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Тогда $\mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi} \subset (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$ и множество $(\mathfrak{F}_\varphi)_\psi \setminus \mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi}$ состоит не более, чем из одного элемента. Равенство $\mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi} = (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$ имеет место в том и только в том случае, когда выполнено хотя бы одно из следующих трёх условий:*
1) $\varphi(\infty) = \infty$,
2) $\psi(\infty) = \infty$,
3) $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi} \subset (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$. Пусть $a \in \mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi}$. Тогда $a \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi(\psi(a)) \in \mathfrak{F} \cup \{\infty\}$. Предположим сначала, что $\psi(a) \neq \infty$. В этом случае ясно, что $\psi(a) \in \mathfrak{F}_\varphi$, откуда $a \in (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$. Пусть теперь $\psi(a) = \infty$. Тогда $a \in \mathfrak{X}_\psi$ для любого замкнутого подмножества $\mathfrak{X}$ пространства $\mathbb{R}^n$. В частности, $a \in (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$.

Заметим, что из включения $a \in (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$ вытекает включение $a \in \mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi}$, если $\psi(a) \neq \infty$. Следовательно, $(\mathfrak{F}_\varphi)_\psi \setminus \mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi} \subset \{\psi^{-1}(\infty)\}$. Таким образом, равенство $\mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi} = (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$ выполняется в том и только в том случае, когда либо $\psi^{-1}(\infty) \notin (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$, либо $\psi^{-1}(\infty) \in \mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi}$. Если $\psi(\infty) = \infty$, то $\psi^{-1}(\infty) = \infty \notin (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$. Пусть теперь $\psi(\infty) \neq \infty$. Тогда $\psi^{-1}(\infty) \in \mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi}$ в том и только в том случае, когда $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F} \cup \{\infty\}$, т. е. $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$ или $\varphi(\infty) = \infty$. Лемма доказана. □

Лемма 4.8. *Пусть f – функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ пространства $\mathbb{R}^n$; $\varphi, \psi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Тогда равенство $T_\psi(T_\varphi f) = T_{\varphi\circ\psi} f$ имеет место в каждом из следующих трёх случаев:*
1) $\varphi(\infty) = \infty$,
2) $\psi(\infty) = \infty$,
3) $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$ *и* $f(\varphi(\infty)) = 0$.

Доказательство. Области определения функций $T_\psi(T_\varphi f)$ и $T_{\varphi\circ\psi}f$ совпадают в силу леммы 4.7. Заметим, что

$$(T_\psi(T_\varphi f))(a) = \frac{f(\varphi(\psi(a)))}{\|\varphi'(\psi(a))\| \cdot \|\psi'(a)\|} = \frac{f((\varphi\circ\psi)(a))}{\|(\varphi\circ\psi)'(a)\|} = (T_{\varphi\circ\psi}f)(a),$$

где $a \in \mathfrak{F}_{\varphi\circ\psi} = (\mathfrak{F}_\varphi)_\psi$, причём $\psi(a) \neq \infty$ и $(\varphi\circ\psi)(a) \neq \infty$. Если $\psi(a) \neq \infty$ и $(\varphi\circ\psi)(a) = \infty$, то $(T_\psi(T_\varphi f))(a) = 0 = (T_{\varphi\circ\psi}f)(a)$. Пусть теперь $a = \psi^{-1}(\infty)$. Этого не может быть в случае 2), поскольку $a \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что$(T_\psi(T_\varphi f))(a) = 0 = (T_{\varphi\circ\psi}f)(a)$ в случае 1). В случае 3) мы имеем: $(T_\psi(T_\varphi f))(a) = 0$ и $(T_{\varphi\circ\psi}f)(a) = \|(\varphi\circ\psi)'(a)\|^{-1}f(\varphi(\infty)) = 0$. □

Следствие 4.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$; $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$. Тогда $f = T_{\varphi^{-1}}(T_\varphi f)$ для любой функции $f : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ такой, что $f(\varphi(\infty)) = 0$.*

Теорема 4.10. *Пусть $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ и $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$ и $f(\varphi(\infty)) = 0$. Тогда функция $T_\varphi f$ операторно липшицева и*

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|T_\varphi f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\varphi)} \leqslant c_n\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}, \tag{4.3}$$

где число c_n зависит только от n. Кроме того, $T_\varphi(\mathrm{OLip}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F})) = \mathrm{OLip}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$.

Доказательство. Докажем сначала неравенства (4.3). Заметим, что случай $\varphi(x) = \phi(x) \overset{\mathrm{def}}{=} x|x|^{-2}$ содержится в следствии 4.3. В общем случае преобразование φ может быть представлено в виде $\varphi(x) = a + \alpha\phi(H(x-b))$, где $a = \varphi(\infty)$, $b = \varphi^{-1}(\infty)$, α – положительное число, а H – ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$. Положим $\tau(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha x + a$ и $\theta(x) \overset{\mathrm{def}}{=} H(x-b)$. Тогда $\varphi = \tau\circ\phi\circ\theta$. Следовательно, $T_\varphi f = T_\theta(T_\phi(T_\tau f))$ в силу леммы 4.8, поскольку $\tau, \theta \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$. Теперь при помощи теоремы 4.1 нужные нам неравенства легко сводятся к частному случаю $\varphi = \phi$. Из неравенств (4.3) вытекает включение

$$T_\varphi(\mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F})) \subset \mathrm{OLip}_b(\mathfrak{F}_\varphi). \tag{4.4}$$

Докажем противоположное включение. Применяя (4.4) к преобразованию Мёбиуса φ^{-1} и множеству $\mathfrak{F}_\varphi$, получаем:

$$T_{\varphi^{-1}}(\mathrm{OLip}_b(\mathfrak{F}_\varphi)) \subset \mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F}).$$

Наконец, применяя следствие 4.9 к преобразованию Мёбиуса φ^{-1} и множеству $\mathfrak{F}_\varphi$, получаем:

$$\mathrm{OLip}_b(\mathfrak{F}_\varphi) \subset T_\varphi(\mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F})). \quad \square$$

Следствие 4.11. *Пусть* $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ *и* $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, *где* $\mathfrak{F}$ *– замкнутое подмножество пространства* $\mathbb{R}^n$. *Предположим, что* $\varphi(\infty) \notin \mathfrak{F}$. *Тогда* $T_\varphi f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\varphi)$ *и*

$$c_n^{-1}\left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x\in\mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x-\varphi(\infty)|}\right) \leqslant \|T_\varphi f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\varphi)}$$
$$\leqslant c_n\left(\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} + \sup_{x\in\mathfrak{F}} \frac{|f(x)|}{|x-\varphi(\infty)|}\right),$$

где число c_n *зависит только от* n. *Кроме того*[2], $T_\varphi(\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})) = \mathrm{OLip}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$.

Доказательство. Если $\varphi(\infty) = \infty$, то $\varphi \in \mathbf{M\ddot{o}b}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$T_\varphi(\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})) = \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\varphi) \quad \text{и} \quad \|T_\varphi f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}_\varphi)} = \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$$

при всех $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ в силу теоремы 4.1. Пусть теперь $\varphi(\infty) \in \mathbb{R}^n$. Чтобы в этом случае свести следствие к теореме 4.10, мы можем продолжить каждую функцию $f \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ до функции $f_0 \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F} \cup \{\varphi(\infty)\})$, положив $f_0(\varphi(\infty)) = 0$. Тогда $T_\varphi f_0 = T_\varphi f$. Следовательно,

$$T_\varphi(\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})) = T_\varphi\big(\mathrm{OLip}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F} \cup \{\varphi(\infty)\})\big) = \mathrm{OLip}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$$

в силу теоремы 4.10. Чтобы закончить доказательство, достаточно применить неравенства (4.3) к функции f_0 и воспользоваться следствием 3.5. $\square$

Пример. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Положим $\kappa(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\phi(x - e_n) + e_n$, где $\phi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} |x|^{-2}x$. Преобразование κ является инверсией с центром в точке e_n, $\kappa = \kappa^{-1}$. Сужение преобразования κ на сферу $S^{n-1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ называется стереографической проекцией. Пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ будем отождествлять с подпространством $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что $\kappa(\mathbb{R}^{n-1}) \cup \{\kappa(\infty)\} = S^{n-1}$. Применяя теорему 4.10 для $\varphi = \kappa$ и $\mathfrak{F} = S^{n-1}$, получим $T_\kappa(\mathrm{OLip}_{e_n}(S^{n-1})) = \mathrm{OLip}_{e_n}(\mathbb{R}^{n-1} \cup \{e_n\})$. Лемма 3.4 позволяет отождествить естественным образом пространство

[2]Здесь мы считаем, что $\mathrm{OLip}_\infty(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$.

$\mathrm{OLip}_{e_n}(\mathbb{R}^{n-1}\cup\{e_n\})$ с пространством $\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^{n-1})$. Таким образом, если мы положим $Xf \stackrel{\mathrm{def}}{=} (T_\kappa f)|\mathbb{R}^{n-1}$, то получим следующее равенство: $X(\mathrm{OLip}_{e_n}(S^{n-1})) = \mathrm{OLip}(\mathbb{R}^{n-1})$, при этом

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OLip}(S^{n-1})} \leqslant \|Xf\|_{\mathrm{OLip}(\mathbb{R}^{n-1})} + |(Xf)(0)| \leqslant c_n\|f\|_{\mathrm{OLip}(S^{n-1})},$$

где число c_n зависит только от n.

Если мы рассмотрим сужение преобразования κ на полупространство $H_-^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x\in\mathbb{R}^n : x_n \leqslant 0\}$, то получим многомерный вариант преобразования Кэли. Всё, что было сказано выше о стереографической проекции, имеет естественные аналоги для многомерного преобразования Кэли. Заметим, что $\kappa(H_-^n)\cup\{\kappa(\infty)\} = B^n$, где B^n обозначает замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$, $B^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leqslant 1\}$. Применяя теорему 4.10 для $\varphi=\kappa$ и $\mathfrak{F}=B^n$, получим $T_\kappa(\mathrm{OLip}_{e_n}(B^n)) = \mathrm{OLip}_{e_n}(H_-^n\cup\{e_n\})$. Лемма 3.4 позволяет отождествить естественным образом пространство $\mathrm{OLip}_{e_n}(H_-^n\cup\{e_n\})$ с пространством $\mathrm{OLip}(H_-^n)$. Таким образом, если мы положим $Yf \stackrel{\mathrm{def}}{=} (T_\kappa f)|H_-^n$, то получим следующее равенство:

$$Y(\mathrm{OLip}_{e_n}(B^n)) = \mathrm{OLip}(H_-^n),$$

при этом

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OLip}(B^n)} \leqslant \|Yf\|_{\mathrm{OLip}(H_-^n)} + |(Yf)(0)| \leqslant c_n\|f\|_{\mathrm{OLip}(B^n)},$$

где число c_n зависит только от n.

Замечание. Все результаты этого параграфа, касающиеся пространств операторно липшицевых функций $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$, имеют очевидным образом естественные аналоги для пространств обычных липшицевых функций $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$.

§5. Мультипликаторы операторно липшицевых функций

Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ множество всех функций $w:\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$ таких, что $wf\in\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ для любой функции $f\in\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$.

Напомним, что $\mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f\in\mathrm{OLip}(\mathfrak{F}) : f(a)=0\}$, где $a\in\mathfrak{F}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ множество всех функций $w:\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$ таких, что $wf \in \mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F})$ для любой функции $f \in \mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F})$. Положим

$$\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{\|wf\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} : f \in \mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F}), \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})} \leqslant 1\}.$$

Из теоремы о замкнутом графике следует, что $\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})} < +\infty$ для любой функции $w \in \mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$.

Замечание. Из леммы 3.4 следует, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$, если a – изолированная точка множества $\mathfrak{F}$.

Легко видеть, что $\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})} = 0$ в том и только в том случае, когда $w(z) = 0$ при всех $z \in \mathfrak{F} \setminus \{a\}$. Таким образом, величина $\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})}$ зависит только от сужения функции w на множество $\mathfrak{F} \setminus \{a\}$, и тем самым не зависит от значения функции w в точке a. Имея это в виду, в некоторых случаях мы будем рассматривать пространство $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ как пространство функций, заданных на $\mathfrak{F} \setminus \{a\}$.

Следующая теорема даёт описание пространства $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$.

Теорема 5.1. *Пусть w – функция, заданная на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathfrak{F}$. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

i) $w \in \mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$,

ii) *функция $(x_j - a_j)w(x)$ операторно липшицева на $\mathfrak{F}$ при всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = 0$. Импликация i) $\Longrightarrow$ ii) тривиальна. Докажем, что ii) $\Longrightarrow$ i). Ясно, что

$$\sup\left\{\frac{x_j|w(x)|}{|x|} : x \in \mathfrak{F}, x \neq 0\right\} \leqslant \|x_j w(x)\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|x_j w(x)\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$$

при всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, функция w ограничена. Можно считать, что $w(0) = 0$. Пусть $f \in \mathrm{OLip}_0(\mathfrak{F})$ и $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Положим

$$g_j(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} x_j|x|^{-2}f(x), & \text{если } x \in \mathfrak{F} \text{ и } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\sup|g_j| \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}$. Нам нужно доказать, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|w(\mathbf{A})f(\mathbf{A}) - w(\mathbf{B})f(\mathbf{B})\| \leqslant C\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$$

для любых $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{B}_{sa}^n$ таких, что $\sigma(\mathbf{A}),\sigma(\mathbf{B})\subset\mathfrak{F}$. Ясно, что

$$f(\mathbf{A})=\sum_{j=1}^n A_j g_j(\mathbf{A}).$$

Используя это тождество, получаем

$$\begin{aligned}&w(\mathbf{A})f(\mathbf{A})-w(\mathbf{B})f(\mathbf{B})=(w(\mathbf{A})-w(\mathbf{B}))f(\mathbf{A})+w(\mathbf{B})(f(\mathbf{A})-f(\mathbf{B}))\\&=\sum_{j=1}^n(A_jw(\mathbf{A})-B_jw(\mathbf{B}))g_j(\mathbf{A})\\&-\sum_{j=1}^n w(\mathbf{B})(A_j-B_j)g_j(\mathbf{A})+w(\mathbf{B})(f(\mathbf{A})-f(\mathbf{B})).\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^n(A_jw(\mathbf{A})-B_jw(\mathbf{B}))g_j(\mathbf{A})\right\|&\leqslant\sum_{j=1}^n\|A_jw(\mathbf{A})-B_jw(\mathbf{B}))\|(\sup|g_j|)\\&\leqslant\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\left(\sum_{j=1}^n\|x_jw(x)\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\right)\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|,\end{aligned}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^n w(\mathbf{B})(A_j-B_j)g_j(\mathbf{A})\right\|\leqslant(\sup|w|)\sum_{j=1}^n(\sup|g_j|)\|A_j-B_j\|$$

$$\leqslant(\sup|w|)\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\sum_{j=1}^n\|A_j-B_j\|\leqslant n(\sup|w|)\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|$$

и

$$\|w(\mathbf{B})(f(\mathbf{A})-f(\mathbf{B}))\|\leqslant(\sup|w|)\|f\|_{\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})}\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|.\qquad\square$$

Следствие 5.2. *Пусть $a\in\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого однородного многочлена p степени $2m$ от n переменных функция $\dfrac{p(x-a)}{|x-a|^{2m}}$ принадлежит пространству $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Можно считать, что $a=0$. Тогда доказываемое утверждение мгновенно вытекает из теоремы 5.1 и теоремы 4.4. $\square$

Замечание 1. Из доказательства теоремы 5.1 видно, что любая функция из пространства $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ ограничена. Следовательно, то же самое можно сказать и о пространстве $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$.

Замечание 2. Пусть p – многочлен от n переменных, $\alpha \in \mathbb{R}$, причём α не является чётным целым неотрицательным числом. Предположим, что $|x|^{-\alpha}p(x) \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда $p = 0$.

Доказательство. Пусть $|x|^{-\alpha}p(x) \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда $|x|^{-\alpha}x_1p(x) \in \mathrm{OLip}(\mathbb{R}^n)$. Остаётся сослаться на замечание 2 после теоремы 4.4. $\square$

Теорема 5.3. *Пусть w – функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $a \in \mathfrak{F}$. Тогда следующие два утверждения равносильны*:

i) $w \in \mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$,

ii) *существуют функции $f_j \in \mathrm{OLip}_a(\mathfrak{F})$ такие, что*

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - a_j)f_j(x)}{|x-a|^2}$$

при всех $x \in \mathfrak{F} \setminus \{a\}$.

Доказательство. Можно считать, что $a = 0$. Чтобы доказать, что i)$\Longrightarrow$ii), достаточно положить $f_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_jw(x)$. Переходим к доказательству импликации ii)$\Longrightarrow$i). Для этого достаточно доказать, что если $f \in \mathrm{OLip}_0(\mathfrak{F})$, то $x_j|x|^{-2}f(x) \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})$ при всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. В силу теоремы 5.1 условие $x_j|x|^{-2}f(x) \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})$ выполняется в том и только в том случае, когда $x_jx_k|x|^{-2}f(x) \in \mathrm{OLip}_0(\mathfrak{F})$ при всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Нужные нам включения мгновенно вытекают из следствия 5.2. $\square$

Переходим к описанию пространства $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$. Ясно, что произведение двух ограниченных функций класса $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ принадлежит пространству $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$. Отсюда мгновенно вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда пространство $\mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ является алгеброй. Другими словами, $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$.*

В случае произвольного замкнутого множества $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^n$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.5. *Пусть w – функция, заданная на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

i) $w \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$,
ii) $w \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ *и* $x_j w(x) \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ *при всех* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Импликация i)$\Longrightarrow$ii) очевидна. Докажем, что ii)$\Longrightarrow$i). Зафиксируем произвольную точку a множества $\mathfrak{F}$. Ясно, что условие ii) можно переписать следующим образом: $w \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ и $(x_j - a_j)w(x) \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ при всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, $w \in \mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ в силу теоремы 5.1. Остаётся заметить, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OLip}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$. □

Теорема 5.6. *Пусть* w *– функция, заданная на замкнутом множестве* $\mathfrak{F}$*,* $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^n$*. Предположим, что* $a \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}$*. Тогда следующие утверждения равносильны:*
i) $w \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$,
ii) $w \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ *и* $x_j w(x) \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ *при всех* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,
iii) $(x_j - a_j)w(x) \in \mathrm{OLip}(\mathfrak{F})$ *при всех* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = 0$. Утверждения i) и ii) эквивалентны в силу теоремы 5.5. Импликация ii)$\Longrightarrow$iii) тривиальна. Докажем, что iii)$\Longrightarrow$ii). Для этого продолжим произвольным образом функцию w на множество $\mathfrak{F} \cup \{0\}$. Теперь всё сводится к теореме 5.1 и равенству $\mathfrak{M}(\mathfrak{F} \cup \{0\}) = \mathfrak{M}_0(\mathfrak{F} \cup \{0\})$, см. замечание в начале этого параграфа. □

Литература

1. А .Б. Александров, *Операторно липшицевы функции и дробно-линейные преобразования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **401** (2012), 5–52.
2. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Functions of perturbed unbounded self-adjoint operators. Operator Bernstein type inequalities.* — Indiana Univ. Math. J. **59:4** (2010), 1451–1490.
3. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Operator and commutator moduli of continuity for normal operators.* — Proc. London Math. Soc.(3) **105:4** (2012), 821–851.
4. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, D. Potapov, F. Sukochev, *Functions of normal operators under perturbations.* — Adv. Math. **226** (2011), 5216–5251.
5. Л. Альфорс, *Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве.* Мир, М., 1986.
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.* ЛГУ, Л., 1980.
7. B. E. Johnson, J. P. Williams, *The range of a normal derivation.* — Pacific J. Math. **58** (1975), 105–122.
8. E. Kissin, V. S. Shulman, *Classes of operator-smooth functions. I. Operator-Lipschitz functions.* — Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **48** (2005), 151–173.

9. F. Nazarov, V. Peller, *Functions of perturbed tuples of self-adjoint operators.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **350** (2012), 349–354.
10. F. Nazarov, V. Peller, *Functions of perturbed n-tuples of commuting self-adjoint operators.* — J. Funct. Anal. **266** (2014), No. 8 5398–5428.

Aleksandrov A. B. Operator Lipschitz functions in several variables and Möbius transformations.

It is proved that if f is an operator Lipschitz function defined on $\mathbb{R}^n$, then the function $\dfrac{f\circ\varphi}{\|\varphi'\|}$ is also operator Lipschitz for every Möbius transformations φ with $f(\varphi(\infty))=0$. Here $\|\varphi'\|$ denotes the operator norm of the Jacobian matrix φ'.

Similar statements are obtained also for operator Lipschitz functions defined on closed subsets of $\mathbb{R}^n$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 27 Мая 2014 г.