Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

С. В. Тихонов, В. И. Янчевский

ГОМОМОРФИЗМЫ И ИНВОЛЮЦИИ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ГЕНЗЕЛЕВЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ

Пусть K – гензелево (например, полное) дискретно нормированное поле с полем вычетов $\overline{K}$ и L_i/K $(i = 1, 2)$ – конечное неразветвленное расширение полей ($\overline{L}_i$ – поле вычетов для L_i).

Обозначим через $\mathrm{Hom}_K(L_1, L_2)$ и $\mathrm{Hom}_{\overline{K}}(\overline{L}_1, \overline{L}_2)$ множества K-гомоморфизмов (соответственно $\overline{K}$-гомоморфизмов) из L_1 в L_2 (соответственно из $\overline{L}_1$ в $\overline{L}_2$). Сопоставление всякому $f \in \mathrm{Hom}_K(L_1, L_2)$ его редукции $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(\overline{L}_1, \overline{L}_2)$ приводит к отображению

$$\tau_{L_1,L_2} : \mathrm{Hom}_K(L_1, L_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(\overline{L}_1, \overline{L}_2),$$

которое, как хорошо известно, биективно (по поводу случая полного K см., например, [1, стр. 49, теорема 7.1]).

Естественная задача обобщения этого результата в случае некоммутативных конечномерных неразветвленных K-алгебр с делением $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ была решена еще в [3]. Цель нашей статьи показать, что аналогичный результат имеет место и в случае поля K с произвольным гензелевым нормированием. Кроме того, мы рассматриваем не только K-гомоморфизмы, но и произвольные инволюции простых центральных алгебр над гензелевыми полями и устанавливаем справедливость аналогов вышеупомянутого утверждения. Для формулировки основных результатов нам потребуются следующие определения и обозначения.

Конечномерная алгебра $\mathcal{A}$ над полем F называется центральной простой, если её центр совпадает с F и в $\mathcal{A}$ нет нетривиальных двусторонних идеалов. По теореме Веддерберна всякая такая алгебра изоморфна при некотором целом $n \geqslant 1$ матричной алгебре $M_n(\mathcal{D})$ над некоторой центральной алгеброй с делением $\mathcal{D}$, причем n однозначно определяется алгеброй $\mathcal{A}$, а $\mathcal{D}$ с точностью до изоморфизма. Степенью алгебры $\mathcal{A}$ называется число, равное $\sqrt{[\mathcal{A} : F]}$, где $[\mathcal{A} : F]$ – размерность векторного пространства $\mathcal{A}$ над F. Индексом алгебры $\mathcal{A}$, обозначаемым через $\mathrm{ind}(\mathcal{A})$, называется степень соответствующей

Ключевые слова: неразветвленная алгебра с делением, гензелева алгебра с делением, инволюция.

алгебры с делением $\mathcal{D}$. Мультипликативная группа алгебры $\mathcal{D}$ обозначается через $\mathcal{D}^*$. $\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}$ обозначает тензорное произведение F-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ над F. Две простые центральные алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются Брауэр-эквивалентными, если $\mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{D})$ и $\mathcal{B} \cong M_m(\mathcal{D})$ для некоторых $n, m \geqslant 1$ и алгебры с делением $\mathcal{D}$. Группа Брауэра $\mathrm{Br}(F)$ поля F состоит из классов Брауэр-эквивалентности центральных простых F-алгебр с операцией, индуцированной тензорным произведением алгебр. Элемент группы $\mathrm{Br}(F)$, содержащий алгебру $\mathcal{A}$, обозначается через $[\mathcal{A}]$. Экспонентой алгебры $\mathcal{A}$, обозначаемой через $\exp(\mathcal{A})$, называется порядок элемента $[\mathcal{A}]$ в группе $\mathrm{Br}(F)$. Если E/F – конечное расширение полей, то определен гомоморфизм коограничения $\mathrm{cor}_{E/F} : \mathrm{Br}(E) \longrightarrow \mathrm{Br}(F)$ (см., например, [7]). Если X – подмножество алгебры $\mathcal{A}$, то его централизатор в $\mathcal{A}$ обозначается через $C_{\mathcal{A}}(X)$.

Основные сведения о центральных простых алгебрах можно почерпнуть, например, в [2].

Пусть $\mathcal{D}$ – алгебра с делением над полем K. Нормирование v на $\mathcal{D}$ – это отображение $v_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^* \longrightarrow \Gamma$, где Γ – вполне упорядоченная абелева группа, записываемая аддитивно, удовлетворяющее свойствам $(a, b \in \mathcal{D}^*)$

$$v_{\mathcal{D}}(ab) = v_{\mathcal{D}}(a) + v_{\mathcal{D}}(b),$$

$$v_{\mathcal{D}}(a+b) \geqslant \min(v_{\mathcal{D}}(a), v_{\mathcal{D}}(b)) \quad \text{при} \quad b \neq -a.$$

Пусть $V_{\mathcal{D}}$, $M_{\mathcal{D}}$ и $\overline{\mathcal{D}}$ – соответственно кольцо, идеал и алгебра вычетов нормирования $v_{\mathcal{D}}$. Пусть также $1 + M_{\mathcal{D}} = \{1 + m | m \in M_{\mathcal{D}}\}$, $V_{\mathcal{D}}^*$ – группа обратимых элементов кольца $V_{\mathcal{D}}$ и $\Gamma_{\mathcal{D}} = v(\mathcal{D}^*)$. Для всякого $a \in V_{\mathcal{D}}$ через $\overline{a}$ будет обозначаться элемент $\overline{a} = a + M_{\mathcal{D}} \in \overline{\mathcal{D}}$.

Если K – поле с гензелевым нормированием v_K, то v_K однозначно продолжается до нормирования $v_{\mathcal{D}}$ алгебры $\mathcal{D}$ по формуле

$$v_{\mathcal{D}}(a) = \frac{1}{n} v_K(\mathrm{Nrd}_{\mathcal{D}}(a)),$$

где $\mathrm{Nrd}_{\mathcal{D}}(a)$ – приведенная норма элемента $a \in \mathcal{D}$ и n – индекс алгебры $\mathcal{D}$.

Если E – подполе в нормированной алгебре $\mathcal{D}$, то ограничение нормирования v на E – нормирование поля E, и Γ_E – подгруппа в $\Gamma_{\mathcal{D}}$. Индекс ветвления $\mathcal{D}$ над E определяется как индекс $[\Gamma_{\mathcal{D}} : \Gamma_E]$. Пусть также $\overline{E}$ – поле вычетов, которое можно рассматривать как подполе в $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда (см. [6, стр. 131])

$$[\overline{\mathcal{D}} : \overline{E}] \cdot [\Gamma_{\mathcal{D}} : \Gamma_E] \leqslant [D : E]. \qquad (1)$$

Будем говорить, что $\mathcal{D}$ бездефектна над E (относительно v), если $[D : E] < \infty$ и в (1) имеет место равенство. Алгебра $\mathcal{D}$ называется вполне разветвленной над E, если $[\mathcal{D} : E] = [\Gamma_{\mathcal{D}} : \Gamma_E] < \infty$. При $E \subseteq Z(\mathcal{D})$, где $Z(\mathcal{D})$ – центр алгебры $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ называется неразветвленной над E, если $[\mathcal{D} : E] = [\overline{\mathcal{D}} : \overline{E}] < \infty$ и расширение $Z(\overline{\mathcal{D}})/\overline{E}$ сепарабельно.

Известно (см., например, [6, стр. 140]), что $\mathcal{D}$ не разветвлена над $Z(\mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда $V_{\mathcal{D}}$ – алгебра Адзумаи над $V_{Z(\mathcal{D})}$.

Пусть F – гензелево поле. Неразветвленная группа Брауэра $\mathrm{IBr}(F)$ поля F определяется так ([6, стр. 141]):

$$\mathrm{IBr}(F) = \{[\mathcal{D}] \in \mathrm{Br}(F) | \mathcal{D} \text{ – неразветвленная над } F \text{ алгебра с делением}\}.$$

Пусть $\mathrm{Br}(V_F)$ – группа Брауэра кольца V_F. Заметим, что $\mathrm{IBr}(F) = \mathrm{im}(\alpha_F)$, где $\alpha_F : \mathrm{Br}(V_F) \longrightarrow \mathrm{Br}(F)$ – инъективный канонический гомоморфизм, переводящий $[\mathcal{C}]$ в $[\mathcal{C} \otimes_{V_F} F]$. Кроме того, канонический гомоморфизм $\beta_F : \mathrm{Br}(V_F) \longrightarrow \mathrm{Br}(\overline{F})$, переводящий $[\mathcal{C}]$ в $[\mathcal{C}/M_F\mathcal{C}]$, является изоморфизмом (см. [6, стр. 141]). Таким образом, $\mathrm{IBr}(F)$ – подгруппа в группе $\mathrm{Br}(F)$, а $\beta\alpha^{-1} : \mathrm{IBr}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(\overline{F})$ – изоморфизм, переводящий $[\mathcal{D}]$ в $[\overline{\mathcal{D}}]$. Центральная простая F-алгебра $\mathcal{A}$ называется неразветвленной, если $[\mathcal{A}] \in \mathrm{IBr}(F)$.

Пусть K – гензелево поле, F_1 и F_2 – конечные расширения поля K, $\mathcal{A}_1$ – центральная F_1-алгебра с делением, а $\mathcal{A}_2$ – центральная F_2-алгебра с делением. Пусть также $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ – множество ненулевых K-гомоморфизмов $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}_2$. Так как $V_{\mathcal{A}_1}^f \subset V_{\mathcal{A}_2}$ и $M_{\mathcal{A}_1}^f \subset M_{\mathcal{A}_2}$ для любого $f \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, то гомоморфизм f индуцирует ненулевой $\overline{K}$-гомоморфизм $\overline{f} : \overline{\mathcal{A}_1} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}_2}$, называемый редукцией гомоморфизма f. Таким образом, возникает отображение

$$\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(\overline{\mathcal{A}}_1, \overline{\mathcal{A}}_2).$$

Зафиксируем на $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ отношение эквивалентности: $\phi_1 \sim \phi_2$ $\Leftrightarrow$ найдётся $m \in 1 + M_{\mathcal{A}_2}$ такой, что $\phi_2 = \phi_1 i_m$, где $i_m : a \mapsto mam^{-1}$ – внутренний автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_2$, индуцированный элементом m. Тогда для фактормножества

$$\overline{\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)} = \mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)/\sim$$

определено отображение

$$\tau_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2} : \overline{\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(\overline{\mathcal{A}}_1, \overline{\mathcal{A}}_2) :$$

$[f]^{\tau_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}} = \overline{f}$ для класса эквивалентности $[f]$, содержащего $f \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$.

Лемма 1. *Пусть F – гензелево поле и $\mathcal{A}$ – неразветвленная центральная F-алгебра с делением. Пусть также L/F – расширение гензелевых полей. Тогда:*

(i) *алгебра $\mathcal{A} \otimes_F L$ не разветвлена над L;*

(ii) *если $\mathcal{A} \otimes_F L$ – алгебра с делением, то*

$$\overline{\mathcal{A} \otimes_F L} \cong \overline{\mathcal{A}} \otimes_{\overline{F}} \overline{L}.$$

Доказательство. (i) Так как $\mathcal{A}$ – неразветвленная F-алгебра, то $\mathcal{A} \cong V_{\mathcal{A}} \otimes_{V_F} F$ (см. доказательство теоремы 2.8. в [6]). Тогда

$$\mathcal{A} \otimes_F L \cong (V_{\mathcal{A}} \otimes_{V_F} F) \otimes_F L \cong (V_{\mathcal{A}} \otimes_{V_F} V_L) \otimes_{V_L} L.$$

Следовательно, $\mathcal{A} \otimes_F L = \alpha_L(V_{\mathcal{A}} \otimes_{V_F} V_L)$, а тогда алгебра $\mathcal{A} \otimes_F L$ не разветвлена.

(ii) Имеем, $\overline{\mathcal{A}} = V_{\mathcal{A}}/M_{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{A} \otimes_F L} = V_{\mathcal{A}\otimes_F L}/M_{\mathcal{A}\otimes_F L}$, $\overline{L} = V_L/M_L$. Заметим, что имеет место сюръективный гомоморфизм V_L-алгебр:

$$V_{\mathcal{A}\otimes_F L} = V_{\mathcal{A}} \otimes_{V_F} V_L \longrightarrow V_{\mathcal{A}}/M_{\mathcal{A}} \otimes_{V_F/M_F} V_L/M_L,$$
$$a \otimes b \mapsto (a + M_{\mathcal{A}}) \otimes (b + M_L).$$

Очевидно, что $M_{\mathcal{A}\otimes_F L}$ принадлежит ядру этого гомоморфизма. Так как $\mathcal{A} \otimes_F L$ – алгебра с делением, то $M_{\mathcal{A}\otimes_F L}$ – максимальный двусторонний идеал кольца $V_{\mathcal{A}\otimes_F L}$, следовательно, ядро этого гомоморфизма совпадает с $M_{\mathcal{A}\otimes_F L}$, откуда получаем изоморфизм V_L/M_L-алгебр $V_{\mathcal{A}\otimes_F L}/M_{\mathcal{A}\otimes_F L} \cong V_{\mathcal{A}}/M_{\mathcal{A}} \otimes_{V_F/M_F} V_L/M_L$. Таким образом, $\overline{\mathcal{A} \otimes_F L} \cong \overline{\mathcal{A}} \otimes_{\overline{F}} \overline{L}$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть алгебра $\mathcal{A}$ не разветвлена над полем K, $\widetilde{\mathcal{B}}$ – такая подалгебра в $\overline{\mathcal{A}}$, что $\widetilde{\mathcal{B}}/\overline{K}$ сепарабельна. Тогда в $\mathcal{A}$ существует подалгебра $\mathcal{B}$ такая, что $\mathcal{B}/K$ не разветвлена и $\overline{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{B}}$.*

Доказательство. Пусть $Z(\widetilde{\mathcal{B}})Z(\overline{\mathcal{A}})$ – композит в $\overline{\mathcal{A}}$ полей $Z(\widetilde{\mathcal{B}})$ и $Z(\overline{\mathcal{A}})$ (т.е. $Z(\widetilde{\mathcal{B}})Z(\overline{\mathcal{A}})$ является $Z(\overline{\mathcal{A}})$-линейной оболочкой множества $Z(\widetilde{\mathcal{B}})$). Заметим, что алгебру $\widetilde{\mathcal{B}} \otimes_{Z(\widetilde{\mathcal{B}})} Z(\widetilde{\mathcal{B}})Z(\overline{\mathcal{A}})$ можно рассматривать как подалгебру в $\overline{\mathcal{A}}$. Из [6, теорема 2.9] следует, что в $\mathcal{A}$ существует неразветвленная над K подалгебра $\mathcal{D}$ такая, что $\overline{\mathcal{D}} = \widetilde{\mathcal{B}} \otimes_{Z(\widetilde{\mathcal{B}})} Z(\widetilde{\mathcal{B}})Z(\overline{\mathcal{A}})$. Пусть L и E – такие расширения поля K, что $\overline{L} = Z(\widetilde{\mathcal{B}})Z(\overline{\mathcal{A}})$, $\overline{E} = Z(\widetilde{\mathcal{B}})$

и E – подполе в L. Из [6, теорема 2.8] следует, что найдётся неразветвленная центральная над E алгебра с делением $\mathcal{B}$ такая, что $\overline{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{B}}$. Тогда ввиду леммы 1 алгебры $\mathcal{B} \otimes_E L$ и $\mathcal{D}$ имеют одинаковые алгебры вычетов, а тогда ввиду [6, теорема 2.8] существует изоморфизм L-алгебр $\phi : \mathcal{B} \otimes_E L \longrightarrow \mathcal{D}$. Поскольку $\overline{\phi}$ является внутренним автоморфизмом алгебры $\overline{\mathcal{D}}$, то из теоремы Нётер–Сколема (см., например, [2, §12.6]) найдётся элемент $\widetilde{g} \in \overline{\mathcal{D}}^*$ такой, что $\overline{\phi} = i_{\widetilde{g}}$. Тогда для $g \in \mathcal{D}^*$ со свойством $\overline{g} = \widetilde{g}$ имеем $\phi i_{g^{-1}}$ – такой изоморфизм L-алгебр $\mathcal{B} \otimes_E L$ и $\mathcal{D}$, что $\overline{\phi i_{g^{-1}}}$ – тождественный автоморфизм алгебры $\overline{\mathcal{D}}$. Откуда получаем, что $\mathcal{B}^{\phi i_{g^{-1}}}$ – подалгебра в $\mathcal{D}$ (а тогда и в $\mathcal{A}$) со свойством $\overline{\mathcal{B}^{\phi i_{g^{-1}}}} = \overline{\mathcal{B}}^{\overline{\phi i_{g^{-1}}}} = \widetilde{\mathcal{B}}$. □

Связь K-гомоморфизмов $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}_2$ и их редукций в случае неразветвленных над K алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ описывается следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть алгебры с делением $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не разветвлены над K. Тогда отображение $\tau_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}$ биективно.*

Доказательство. Докажем сначала инъективность отображения $\tau_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}$. Пусть $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$. Предположим, что $[\phi]^{\tau_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}} = [\psi]^{\tau_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}}$, т.е. $\overline{\phi} = \overline{\psi}$.

Пусть $E_\psi = F_1^\psi F_2$ – композит в $\mathcal{A}_2$ полей F_1^ψ и F_2 (т.е. E_ψ является F_2-линейной оболочкой множества F_1^ψ). Аналогично пусть $E_\phi = F_1^\phi F_2$. Пусть также $\mathcal{B}_\psi = \mathcal{A}_1^\psi \otimes_{F_1^\psi} E_\psi$ и $\mathcal{B}_\phi = \mathcal{A}_1^\phi \otimes_{F_1^\psi} E_\phi$.

Заметим, что $\overline{E}_\psi = \overline{F}_1^{\overline{\psi}} \overline{F}_2 = \overline{F}_1^{\overline{\phi}} \overline{F}_2 = \overline{E}_\phi$. Так как E_ψ и E_ϕ – неразветвленные расширения поля F_2 с совпадающими полями вычетов, то существует такой F_2-изоморфизм $\theta : E_\phi \longrightarrow E_\psi$, что $\overline{\theta} = \mathrm{id}_{\overline{E}_\phi}$. Из теоремы Нётер–Сколема следует существование такого $g \in \mathcal{A}_2^*$, что $\theta = i_g|_{E_\phi}$. Тогда $E_\psi = E_\phi^{i_g}$. Ввиду неразветвленности алгебры $\mathcal{A}_2$ можно считать, что $g \in V_{\mathcal{A}_2}^*$.

Далее заметим, что $\overline{C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi)} \subset C_{\overline{\mathcal{A}}_2}(\overline{E}_\phi)$. Так как алгебра $\mathcal{A}_2$ не разветвлена над F_2, то не разветвлена над F_2 и алгебра $C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi)$, а тогда $[C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi) : F_2] = [\overline{C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi)} : \overline{F}_2]$. Из теоремы о двойном централизаторе (см., например, [2, §12.7]) с учетом неразветвленности алгебры $\mathcal{A}_2$ получаем

$$[E_\phi : F_2][C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi) : F_2] = [\mathcal{A}_2 : F_2] = [\overline{\mathcal{A}}_2 : \overline{F_2}] = [\overline{E}_\phi : \overline{F}_2][C_{\overline{\mathcal{A}}_2}(\overline{E}_\phi) : \overline{F}_2].$$

Следовательно, $[C_{\overline{\mathcal{A}}_2}(\overline{E}_\phi) : \overline{F}_2] = [\overline{C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi)} : \overline{F}_2]$, а тогда $\overline{C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi)} = C_{\overline{\mathcal{A}}_2}(\overline{E}_\phi)$.

Так как $\overline{\theta} = \mathrm{id}_{\overline{E}_\phi}$, то $\overline{g} \in C_{\overline{\mathcal{A}}_2}(\overline{E}_\phi)$. Пусть $r \in C_{\mathcal{A}_2}(E_\phi)$ – такой элемент, что $\overline{r} = \overline{g}$. Тогда $gr^{-1} \in 1 + M_{\mathcal{A}_2}$ и $E_\psi = E_\phi^{i_g} = E_\phi^{i_{gr^{-1}}}$, откуда центры алгебр $\mathcal{B}_\psi$ и $\mathcal{B}_\phi^{i_{gr^{-1}}}$ совпадают. Поскольку алгебры вычетов этих неразветвленных алгебр также совпадают, то эти алгебры E_ψ-изоморфны. Тогда из теоремы Нётер–Сколема и неразветвленности алгебры $\mathcal{A}_2$ следует, что найдется такой элемент $h \in V_{\mathcal{A}_2}^*$, что $\mathcal{B}_\psi = (\mathcal{B}_\phi^{i_{gr^{-1}}})^{i_h}$. Тогда $i_{\overline{h}}|_{\overline{\mathcal{B}}_\psi}$ – внутренний автоморфизм алгебры $\overline{\mathcal{B}}_\psi = \overline{\mathcal{B}}_\phi$. Следовательно, $i_{\overline{h}}|_{\overline{\mathcal{B}}_\psi} = i_{\widetilde{s}}|_{\overline{\mathcal{B}}_\psi}$, где $\widetilde{s} \in \overline{\mathcal{B}}_\psi$. Пусть $s \in \mathcal{B}_\phi$ со свойством $\overline{s} = \widetilde{s}$. Тогда $\mathcal{B}_\psi = (\mathcal{B}_\phi^{i_{hgr^{-1}s^{-1}}})$ и $i_{\overline{hgr^{-1}s^{-1}}}|_{\overline{\mathcal{B}}_\phi}$ – тождественный автоморфизм алгебры $\overline{\mathcal{B}}_\phi$. Следовательно, $\overline{hgr^{-1}s^{-1}} \in C_{\overline{\mathcal{A}}_2}(\overline{\mathcal{B}}_\phi)$. Как и выше, можно показать, что ввиду неразветвленности $\mathcal{A}_2$ имеет место равенство $\overline{C_{\mathcal{A}_2}(\mathcal{B}_\phi)} = C_{\overline{\mathcal{A}}_2}(\overline{\mathcal{B}}_\phi)$, а тогда найдется такой элемент $a \in C_{\mathcal{A}_2}(\mathcal{B}_\phi)$, что $\overline{a} = \overline{hgr^{-1}s^{-1}}$. Для $b = hgr^{-1}s^{-1}a^{-1}$ имеем $\mathcal{B}_\psi = \mathcal{B}_\phi^{i_b}$ и $b \in 1 + M_{\mathcal{A}_2}$.

Далее заметим, что $(\mathcal{A}_1^\phi)^{i_b}$ – подалгебра в $\mathcal{B}_\psi$ с центром $(F_1^\phi)^{i_b}$. Поскольку $(F_1^\phi)^{i_b}$ и F_1^ψ – подполя поля E_ψ и

$$\overline{(F_1^\phi)^{i_b}} = (\overline{F}_1^{\overline{\phi}})^{i_{\overline{b}}} = \overline{F}_1^{\overline{\phi}} = \overline{F}_1^{\overline{\psi}} = \overline{F_1^\psi},$$

то $(F_1^\phi)^{i_b} = F_1^\psi$. Таким образом, алгебры $(\mathcal{A}_1^\phi)^{i_b}$ и $\mathcal{A}_1^\psi$ имеют одинаковые центры и одинаковые алгебры вычетов, а тогда, как и в случае алгебр $\mathcal{B}_\psi$ и $\mathcal{B}_\phi^{i_{gr^{-1}}}$, получаем, что существует $d \in 1 + M_{\mathcal{A}_2}$ со свойством $\mathcal{A}_1^\psi = (\mathcal{A}_1^\phi)^{i_{db}}$.

Пусть $\eta = \phi i_{db}$, тогда $\overline{\eta} = \overline{\psi}$ и $\mathcal{A}_1^\psi = \mathcal{A}_1^\eta$. Пусть $e = \psi^{-1}\eta$. Так как $\overline{\psi} = \overline{\phi}$, то ограничение $\overline{e}$ на $\overline{F_1^\psi}$ тождественно. Поскольку для полей теорема верна, то ограничение e на F_1^ψ тождественно, и из теоремы Нётер–Сколема следует $e = i_r$ для $r \in V_{\mathcal{A}_1^\psi}^*$. Далее тождественность $\overline{e}$ влечет $\overline{r} \in \overline{F_1^\psi}$. Пусть $c \in F_1^\psi$ со свойством $\overline{c} = \overline{r}$. Тогда для $g_0 = rc^{-1}$ имеем $g_0 \in 1 + M_{\mathcal{A}_2}$ и $e = i_{g_0}$, а тогда $\psi i_{g_0} = \eta$. Таким образом, $[\phi] = [\eta] = [\psi]$. Инъективность отображения $\tau_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}$ доказана.

Сюръективность отображения $\tau_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2}$ доказывается аналогично доказательству сюръективности в теореме 3.13 из [3]. Тем не менее для удобства читателя мы приводим здесь это рассуждение полностью.

Пусть $\widetilde{\phi} : \overline{\mathcal{A}}_1 \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_2$ – $\overline{K}$-гомоморфизм алгебр. Ввиду леммы 2 можно считать, что образ $\widetilde{\phi}$ совпадает с $\overline{\mathcal{A}}_2$.

Пусть также $\widetilde{U} = \{\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n\}$ – базис $\overline{\mathcal{A}}_1$ над $\overline{F}_1$ и $\mathrm{Sc}(\widetilde{U})$ – множество структурных констант алгебры $\overline{\mathcal{A}}_1$ относительно базиса $\widetilde{U}$. Пусть $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}_1$ – такие элементы, что $\overline{u}_i = \widetilde{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ – базис алгебры $\mathcal{A}_1$ над F_1. Для соответствующего множества структурных констант $\mathrm{Sc}(U)$ алгебры $\mathcal{A}_1$ относительно этого базиса имеем $\overline{\mathrm{Sc}(U)} = \mathrm{Sc}(\widetilde{U})$. Заметим также, что $\widetilde{U}^{\widetilde{\phi}} = \{\widetilde{u}_1^{\widetilde{\phi}}, \ldots, \widetilde{u}_n^{\widetilde{\phi}}\}$ – базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_1^{\widetilde{\phi}}$ над $\overline{F}_1^{\widetilde{\phi}}$. Пусть $\phi : F_1 \longrightarrow F_2$ – такой K-изоморфизм, что $\overline{\phi} = \widetilde{\phi}|_{\overline{F}_1}$. Из определения множества структурных констант следует, что существует алгебра $\mathcal{A}_2'$ с центром F_2, базисом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством структурных констант относительно этого базиса $\mathrm{Sc}(U)^{\phi}$.

Пусть также κ – K-изоморфизм алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2'$, задаваемый формулой

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right)^{\kappa} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\phi} x_i, (\alpha_i \in F_1).$$

С помощью этого изоморфизма можно перенести нормирование алгебры $\mathcal{A}_1$ на алгебру $\mathcal{A}_2'$. При этом

$$V_{\mathcal{A}_2'} = V_{F_2}x_1 + \cdots + V_{F_2}x_n \text{ и } M_{\mathcal{A}_2'} = M_{F_2}x_1 + \cdots + M_{F_2}x_n.$$

Таким образом, вычеты $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ в $\overline{\mathcal{A}}_2'$ соответственно элементов $x_1, \ldots, x_n$ – базис $\overline{\mathcal{A}}_2'$ над $\overline{F}_2$ и $\mathrm{Sc}(\overline{X}) = (\mathrm{Sc}(\widetilde{U}))^{\widetilde{\phi}}$ для $\overline{X} = \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$. Так как $\mathrm{Sc}(\widetilde{U}^{\widetilde{\phi}}) = (\mathrm{Sc}(\widetilde{U}))^{\widetilde{\phi}}$, то алгебры $\overline{\mathcal{A}}_2'$ и $\overline{\mathcal{A}}_2$ являются $\overline{F}_2$-изоморфными. Ввиду изоморфизма групп $\mathrm{IBr}(F_2)$ и $\mathrm{Br}(\overline{F}_2)$, индуцированного изоморфизмами α_{F_2} и β_{F_2}, заключаем, что существует изоморфизм F_2-алгебр $\chi : \mathcal{A}_2' \longrightarrow \mathcal{A}_2$. Пусть $r_i = x_i^{\chi}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку нормирование гензелева поля F_2 однозначно продолжается до нормирования алгебры $\mathcal{A}_2$, то, как и в случае κ, $\{r_1, \ldots, r_n\}$ – базис V_{F_2}-модуля $V_{\mathcal{A}_2}$. Более того, структурные константы алгебры $\overline{\mathcal{A}}_2$ относительно базисов $\{\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n\}$ и $\{\widetilde{u}_1^{\widetilde{\phi}}, \ldots, \widetilde{u}_n^{\widetilde{\phi}}\}$ совпадают, поэтому отображение

$$\theta : \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{r}_i \right) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{u}_i^{\widetilde{\phi}} \ (\beta_i \in \overline{F}_2)$$

является $\overline{F}_2$-автоморфизмом алгебры $\overline{\mathcal{A}}_2$. Пусть $\theta = i_{\widetilde{r}}$, $\widetilde{r} \in \overline{\mathcal{A}}_2$, и r – прообраз $\widetilde{r}$ в $\mathcal{A}_2$. Можно проверить, что $\kappa\chi i_r : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ – искомый гомоморфизм. Теорема доказана. □

Из теоремы 1 немедленно вытекает

Следствие 1. *Отображение $\tau_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ – биекция.*

Заметим, что если $f \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ – автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$, то автоморфизмами являются и fi_m, $m \in 1 + M_{\mathcal{A}}$, и $\overline{f}$, поэтому $\tau_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ индуцирует отображение

$$\tau|_{\overline{\mathrm{Aut}_K(\mathcal{A})}} : \overline{\mathrm{Aut}_K(\mathcal{A})} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{\mathcal{A}}),$$

где $\mathrm{Aut}_K(\mathcal{A})$ – множество K-автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, $\mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{\mathcal{A}})$ – множество $\overline{K}$-автоморфизмов алгебры $\overline{\mathcal{A}}$, а $\overline{\mathrm{Aut}_K(\mathcal{A})}$ – подмножество множества $\overline{\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}, \mathcal{A})}$ элементов вида $[f]$, где $f \in \mathrm{Aut}_K(\mathcal{A})$.

Заметим, что всякий ненулевой K-гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ является автоморфизмом ввиду конечномерности $\mathcal{A}$ над K. Поэтому $\overline{\mathrm{Aut}_K(\mathcal{A})} = \overline{\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}, \mathcal{A})}$ и имеет место

Следствие 2. *Отображение $\tau|_{\overline{\mathrm{Aut}_K(\mathcal{A})}}$ – биекция.*

Для приложений важной является связь между инволюциями простых центральных гензелевых алгебр и их редукциями. Вторым основным результатом этой статьи является описание этой связи. Для формулировки утверждений, связанных с этим результатом, нам потребуются следующие определения и обозначения.

Пусть $\mathcal{A}$ – центральная над полем K алгебра с делением и инволютивным антиавтоморфизмом τ, а k – подполе неподвижных относительно этого антиавтоморфизма элементов из K. Через $\mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})$ обозначим множество всех инволютивных антиавтоморфизмов (сокращенно инволюций) алгебры $\mathcal{A}$ с полем неподвижных элементов k. Известно, что K/k – сепарабельное расширение степени, не превосходящей двух. Если $K = k$, то τ называется инволюцией первого рода, если же $K \neq k$, то τ – инволюция второго рода. Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ обладает инволюцией первого рода тогда и только тогда, когда ее экспонента не превосходит 2, и инволюцией второго рода с полем неподвижных неподвижных элементов k тогда и только тогда, когда $\mathrm{cor}_{K/k}([\mathcal{A}]) = 0$ (см., например, [5]).

Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется симметрическим относительно инволюции τ, если $a^\tau = a$, и кососимметрическим, если $a^\tau = -a$. Пусть $(\mathcal{A}, \tau)_+$ обозначает множество симметрических элементов в $\mathcal{A}$, а $(\mathcal{A}, \tau)_-$ – множество кососимметрических элементов. Пусть также n – степень алгебры $\mathcal{A}$. Инволюция первого рода называется ортогональной, если $\dim_k((\mathcal{A}, \tau)_+) = n(n+1)/2$, $\dim_k((\mathcal{A}, \tau)_-) = n(n-1)/2$, и называется симплектической, если $\dim_k((\mathcal{A}, \tau)_+) = n(n-1)/2$, $\dim_k((\mathcal{A}, \tau)_-) = n(n+1)/2$.

Для гензелевых k рассмотрим множество $\mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})$ (если оно не пусто). Тогда со всякой инволюцией $\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})$ можно аналогично предыдущему связать ее редукцию $\overline{\tau} \in \mathrm{Inv}_{\overline{K}/\overline{k}}(\overline{\mathcal{A}})$, положив

$$(a + M_{\mathcal{A}})^{\overline{\tau}} = a^\tau + M_{\mathcal{A}}$$

для $a \in V_{\mathcal{A}}$. Как и выше, на множестве $\mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})$ рассмотрим отношение эквивалентности:

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \text{ найдётся } m \in (1 + M_{\mathcal{A}}) \text{ такое, что } f_1 = f_2 i_m \text{ и } m^{f_2} = m.$$

Соответствующее фактормножество обозначим через $\overline{\mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})}$. Тогда возникает отображение

$$\mu_{\mathcal{A}} : \overline{\mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})} \longrightarrow \mathrm{Inv}_{\overline{K}/\overline{k}}(\overline{\mathcal{A}}).$$

Теорема 2. *Пусть алгебра с делением $\mathcal{A}/K$ не разветвлена и $\mathrm{char}(\overline{K}) \neq 2$. Тогда отображение $\mu_{\mathcal{A}}$ – биекция.*

Доказательство. Пусть K/k-инволюции f_2 и f_1 таковы, что их редукции совпадают. Тогда автоморфизм $f_2 f_1$ имеет тождественную редукцию. Следовательно, ввиду следствия 2 для автоморфизмов алгебры имеем $f_2 f_1 = i_m$, где $m \in 1 + M_{\mathcal{A}}$, а тогда $f_1 = f_2 i_m$. Поскольку f_1 – инволюция, то $a = (a^{f_1})^{f_1}$ для любого $a \in \mathcal{A}$, отсюда $m^{-1} m^{f_2} \in K$. Пусть $c = m^{-1} m^{f_2}$. Тогда $c \neq -1$, поскольку в противном случае $0 = \overline{m} + \overline{m}^{\overline{f}_2} = 1 + 1$, но $\mathrm{char}(\overline{K}) \neq 2$. Итак, $(m + m^{f_2})/2 = m(1+c)/2 \in \mathcal{A}^*$ – симметрический относительно f_2 элемент. Тогда $f_1 = f_2 i_{m(1+c)/2}$ и $\overline{m(1+c)/2} = 1$. Стало быть, $[f_1] = [f_2]$. Следовательно, $\mu_{\mathcal{A}}$ – инъекция.

Таким образом, остается показать, что для всякой инволюции $\widetilde{\tau} \in \mathrm{Inv}_{\overline{K}/\overline{k}}(\overline{\mathcal{A}})$ найдётся инволюция $\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})$ с редукцией $\widetilde{\tau}$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим раздельно два случая: $K = k$ и $K \neq k$.

Пусть $K = k$. Тогда $\widetilde{\tau}$ – инволюция первого рода на $\overline{\mathcal{A}}$. Следовательно, экспонента алгебры $\overline{\mathcal{A}}$ не превосходит 2, а тогда и экспонента алгебры $\mathcal{A}$ не превосходит 2 ввиду изоморфизма групп $\mathrm{IBr}(K)$ и $\mathrm{Br}(\overline{K})$. Поэтому алгебра $\mathcal{A}$ обладает инволюцией первого рода $\mu \in \mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})$. Тогда $\overline{\mu} \in \mathrm{Inv}_{\overline{K}/\overline{k}}(\overline{\mathcal{A}})$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\overline{\mu}$ и $\widetilde{\tau}$ одинакового типа (в противном случае вместо μ следует рассмотреть инволюцию μi_m, где $m^\mu = -m$). Следовательно, $\widetilde{\tau} = \overline{\mu} i_{\widetilde{s}}$, где $\widetilde{s} \in \overline{\mathcal{A}}^*$ и $\widetilde{s}^{\overline{\mu}} = \widetilde{s}$. Рассмотрим прообраз s элемента $\widetilde{s}$ в $\mathcal{A}$. Если $s^\mu \neq -s$, то $s^\mu + s \neq 0$. Так как $s^\mu \in s(1 + M_{\mathcal{A}})$, то в предположении $\mathrm{char}(\overline{K}) \neq 2$ получим $s + s^\mu \in s(2 + M_{\mathcal{A}})$, и потому $s + s^\mu \in \mathcal{A}^*$. Рассмотрим инволюцию μi_{s+s^μ}. Тогда ее редукция

$$\overline{\mu} i_{\overline{s+s^\mu}} = \overline{\mu} i_{2\widetilde{s}} = \overline{\mu} i_{\widetilde{s}} = \widetilde{\tau}.$$

Если $s^\mu = -s$, то $-\widetilde{s} = \widetilde{s}$, что не так при $\mathrm{char}(\overline{K}) \neq 2$.

Рассмотрим теперь случай $K \neq k$. Пусть сначала $\overline{K} \neq \overline{k}$. Из [7, теорема 8.1] следует, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(V_K) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{V_K/V_k}"] \arrow[d, "\beta_K"'] & \mathrm{Br}(V_k) \arrow[d, "\beta_k"] \\
\mathrm{Br}(\overline{K}) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{\overline{K}/\overline{k}}"] & \mathrm{Br}(\overline{k})
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(V_K) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{V_K/V_k}"] \arrow[d, "\alpha_K"'] & \mathrm{Br}(V_k) \arrow[d, "\alpha_k"] \\
\mathrm{Br}(K) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{K/k}"] & \mathrm{Br}(k)
\end{tikzcd}$$

коммутативны. Так как алгебра $\mathcal{A}$ не разветвлена над K, то $[\mathcal{A}] = [V_{\mathcal{A}} \otimes_{V_K} K]$. Из коммутативности второй диаграммы получаем

$$\mathrm{cor}_{K/k}([\mathcal{A}]) = \alpha_k(\mathrm{cor}_{V_K/V_k}([V_{\mathcal{A}}])).$$

Из коммутативности первой диаграммы следует

$$\begin{aligned}
\beta_k(\mathrm{cor}_{V_K/V_k}([V_{\mathcal{A}}])) &= \mathrm{cor}_{\overline{K}/\overline{k}}(\beta_K([V_{\mathcal{A}}])) \\
&= \mathrm{cor}_{\overline{K}/\overline{k}}(V_{\mathcal{A}} \otimes_{V_K} (V_K/M_K)) = \mathrm{cor}_{\overline{K}/\overline{k}}(V_{\mathcal{A}}/M_{\mathcal{A}}) = \mathrm{cor}_{\overline{K}/\overline{k}}([\overline{\mathcal{A}}]).
\end{aligned}$$

Поскольку на алгебре $\overline{\mathcal{A}}$ есть $\overline{K}/\overline{k}$-инволюция, то $\mathrm{cor}_{\overline{K}/\overline{k}}([\overline{\mathcal{A}}]) = 0$. Поскольку β_k – изоморфизм, заключаем, что $\mathrm{cor}_{V_K/V_k}([V_{\mathcal{A}}]) = 0$. Следовательно, $\mathrm{cor}_{K/k}([\mathcal{D}]) = \alpha_k(0) = 0$. Таким образом, на алгебре $\mathcal{A}$ есть K/k-инволюция σ. Тогда $\overline{\sigma}$ – $\overline{K}/\overline{k}$-инволюция на алгебре $\overline{\mathcal{A}}$. Тогда найдётся элемент $\tilde{h} \in \overline{\mathcal{A}}$ такой, что $\overline{\sigma} i_{\tilde{h}} = \tilde{\tau}$. Умножая, если нужно, $\tilde{h}$ на кососимметрический относительно $\overline{\sigma}$ элемент из $\overline{K}$, можно считать, что $\tilde{h}^{\overline{\sigma}} \neq -\tilde{h}$. Далее, как и при доказательстве инъективности отображения $\mu_{\mathcal{A}}$, получаем, что $\overline{\sigma} i_{\tilde{h}+\tilde{h}^{\overline{\sigma}}} = \tilde{\tau}$. Пусть $h \in V_{\mathcal{A}}$ такой, что $\overline{h} = \tilde{h}$. Тогда $\sigma i_{h+h^{\sigma}}$ – K/k-инволюция на $\mathcal{A}$ и $\overline{\sigma i_{h+h^{\sigma}}} = \tilde{\tau}$.

Пусть теперь $\overline{K} = \overline{k}$. Тогда $\tilde{\tau}$ – инволюция первого рода. Так как $\overline{\mathcal{A}}$ обладает инволюцией первого рода, то $\exp(\overline{\mathcal{A}}) \leqslant 2$. Поскольку $\overline{K} = \overline{k}$ – центр алгебры $\overline{\mathcal{A}}$, то существует неразветвленная k-алгебра с делением $\mathcal{B}$ экспоненты, не превышающей 2, такая, что $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}$ ([6, теорема 2.8]). Тогда $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \otimes_k K$, поскольку, во-первых, ввиду леммы 1

$$\overline{\mathcal{B} \otimes_k K} \cong \overline{\mathcal{B}} \otimes_{\overline{k}} \overline{K} = \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}},$$

а, во-вторых, группы $\mathrm{IBr}(K)$ и $\mathrm{Br}(\overline{K})$ изоморфны. Заметим, что $\mathcal{A}$ обладает K/k-инволюцией σ вида $\phi \otimes \xi$, где ϕ – симплектическая инволюция на алгебре $\mathcal{B}$, а ξ – нетривиальный k-автоморфизм поля K. Пусть u – обратимый элемент кольца нормирования алгебры $\mathcal{B}$, кососимметрический относительно ϕ. Тогда $\overline{u}$ – кососимметрический элемент относительно инволюции $\overline{\sigma}$. Следовательно, либо инволюция $\overline{\sigma}$, либо инволюция $\overline{\sigma i_u} = \overline{\sigma} i_{\overline{u}}$ имеет тот же тип, что и инволюция $\tilde{\tau}$. Тогда либо $\tilde{\tau} = \overline{\sigma} i_{\tilde{s}}$, где $\tilde{s}$ – симметрический относительно $\overline{\sigma}$ элемент из $\overline{\mathcal{A}}^*$, либо $\tilde{\tau} = \overline{\sigma i_u} i_{\tilde{s}}$, где $\tilde{s}$ – симметрический относительно $\overline{\sigma i_u}$ элемент из $\overline{\mathcal{A}}^*$. Далее, как и при рассмотрении случая $\overline{K} \neq \overline{k}$, получаем, что найдётся такая K/k-инволюция τ на $\mathcal{A}$, что $\overline{\tau} = \tilde{\tau}$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. *Из доказательства теоремы следует, что непустота множества* $\mathrm{Inv}_{\overline{K}/\overline{k}}(\overline{\mathcal{A}})$ *влечет непустоту множества* $\mathrm{Inv}_{K/k}(\mathcal{A})$.

Литература

1. Дж. Касселс, А. Фрёлих, *Алгебраическая теория чисел.* Мир, М. (1969).
2. Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры.* Мир, М. (1986).
3. В. И. Янчевский, *Приведенная унитарная K-теория и тела над гензелевыми дискретно нормированными полями.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **42:4** (1978), 879–918.

4. A. A. Albert, *Structure of algebras.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **24**, AMS, Providence (1961).
5. C. Riehm, *The corestriction of algebraic structures.* — Invent. Math. **11** (1970), 73–98.
6. B. Jacob, A. Wadsworth, *Division algebras over Henselian fields.* — J. Algebra **128**, No. 1 (1990), 126–179.
7. D. J. Saltman, *Lectures on division algebras.* Amer. Math. Soc., Providence, RI (1999).

Tikhonov S. V., Yanchevskii V. I. Homomorphisms and involutions of unramified henselian division algebras.

Let K be a henselian field with the residue field $\overline{K}$, and let $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ be finite dimensional division unramified K-algebras with residue algebras $\overline{\mathcal{A}}_1$ and $\overline{\mathcal{A}}_2$. Further, let $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ be the set of nonzero K-homomorphisms from $\mathcal{A}_1$ to $\mathcal{A}_2$. We prove that there is a natural bijection between the set of nonzero $\overline{K}$-homomorphisms from $\overline{\mathcal{A}}_1$ to $\overline{\mathcal{A}}_2$ and the factor set of $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ under the equivalence relation: $\phi_1 \sim \phi_2 \Leftrightarrow$ there exists $m \in 1 + M_{\mathcal{A}_2}$ such that $\phi_2 = \phi_1 i_m$, where i_m is the inner automorphism of $\mathcal{A}_2$ induced by m.

A similar result is obtained for unramified algebras with involutions.

Поступило 31 января 2014 г.

Белорусский
государственный университет,
Минск, Беларусь
E-mail: tikhonovsv@bsu.by

Институт математики НАН Беларуси,
Минск, Беларусь
E-mail: yanch@im.bas-net.by