Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

А. В. Степанов

НЕАБЕЛЕВА K-ТЕОРИЯ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ НАД КОЛЬЦАМИ

Введение

В настоящей работе представлен обзор результатов работ автора [34, 36], а также совместной работы автора с Х. Апте [15]. В этих работах для группы Шевалле G без использования предыдущих результатов о группах Шевалле над кольцами доказываются важнейшие результаты о строении [относительной] элементарной группы и функтора K_1^G. Среди них

1. относительный локально-глобальный принцип;
2. образующие относительной элементарной подгруппы;
3. относительные мульти-коммутационные формулы;
4. нильпотентная структура относительного K_1;
5. ограниченность длины коммутаторов.

Результаты настоящей работы обобщают и усиливают большинство результатов, описанных ниже.

Всюду далее G обозначает групповую схему Шевалле–Демазюра с системой корней $\Phi \neq A_1$, а E – ее элементарную подгруппу. Для идеала $\mathfrak{a}$ кольца R через $G(R, \mathfrak{a})$ обозначается главная конгруэнц-подгруппа, через $E(\mathfrak{a})$ – подгруппа, порожденная элементарными унипотентными элементами, содержащимися в $G(R, \mathfrak{a})$, а через $E(R, \mathfrak{a})$ – относительная элементарная подгруппа, т.е. нормальное замыкание $E(\mathfrak{a})$ в $E(R)$.

Для $G = \mathrm{SL}_n$ образующие относительной элементарной группы были найдены Л. Васерштейном. Доказательство появилось в работе [39],

Ключевые слова: группы Шевалле, главная конгруэнц-подгруппа, локально-глобальный принцип, коммутационные формулы, элементарная подгруппа, ширина коммутаторов.

Работа над этой публикацией частично поддержана грантами РФФИ 13-01-00709, 11-01-00811, 13-01-91150 и 13-01-92699, а также госбюджетной исследовательской программой 6.38.74.2011 в Санкт-Петербургском государственном университете.

хотя неявно этот результат упоминался уже в [4]. Доказательство этого результата для всех групп Шевалле приведено в [40]. В работе В. ван дер Каллена [29] в связи с изучением предстабилизации K_1 было доказано, что относительная элементарная группа $E_n(R,\mathfrak{a})$ равна нормальному замыканию $E_n(\mathfrak{a})$ при помощи подгруппы, порожденной элементарными трансвекциями $t_{1i}(r)$, $i = 2,\dots,n$, $r \in R$. Этот результат (практически без доказательства) для классических групп был применен в работе [14] к доказательству относительного локально-глобального принципа. Таким образом, теорема 2.2 настоящей работы является совместным обобщением результатов работ [14, 29, 40] об образующих относительной элементарной группы.

Локально-глобальный принцип (LGP) для K_0 был доказан в работе Д. Квиллена [31] для доказательства гипотезы Серра. Вариант этого принципа для K_1 был доказан А. Суслиным, как важный шаг в доказательстве K_1-аналога проблемы Серра. Для ортогональных групп LGP Суслина был получен в работе А. Суслина и В. Копейко [9]. Для симплектической группы LGP был анонсирован в работе В. Копейко [5], а позже доказан в работе Ф. Грюневальда, Й. Меннике и Л. Васерштейна [22]. Аналог этого результата для групп Шевалле был получен И. Абе в работе [12] при некотором дополнительном условии. Результат был обобщен на изотропные редуктивные группы В. Петровым и А. Ставровой [7] без дополнительных условий. Относительная версия LGP для классических групп была получена в работе Х. Апте, П. Чаттопадхиаи и Р. Рао [14]. Теорема 2.9 обобщает все вышеуказанные результаты для групп Шевалле. Технически еще более важную роль в дальнейших построениях играет принцип избавления от знаменателей – следствие 2.8. Как и определение группы $EE(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, в такой форме принцип избавления от знаменателей появился впервые. Он существенно усиливает все полученные ранее аналоги.

Нормальность элементарной подгруппы в полной линейной группе была доказана А. Суслиным в работе [8] в 1977 году. Его доказательство было основано на лемме Суслина о решении линейного уравнения над коммутативным кольцом с унимодулярной строкой коэффициентов. В кандидатской диссертации автора было предложено другое доказательство нормальности, основанное на методе разложения трансвекции. После этого результат был обобщен на некоторые классы некоммутативных колец различными методами А. Суслиным [10], Л. Васерштейном [39], А. Баком [16] и С. Хлебутиным [11]. Нормальность элементарной подгруппы в классических группах была получена в работах А. Суслина и В. Копейко [6,9], а также, для обобщенной унитарной группы, в работах А. Бака и Н. Вавилова [20,21]. Окончательный результат о нормальности элементарной подгруппы во всех группах Шевалле был доказан Дж. Таддеи [37]. Недавно В. Петров и А. Ставрова [7] доказали нормальность элементарной подгруппы в любой редуктивной группе изотропного ранга не меньшего 2.

Стандартные коммутационные формулы

$$[G(R), E(R,\mathfrak{q})] = [G(R,\mathfrak{q}), E(R)] = E(R,\mathfrak{q})$$

были впервые получены в работах Л. Васерштейна [39] и З. Боревича и Н. Вавилова [1] для $G = \mathrm{GL}_n$. К 1986 году, когда Дж. Таддеи доказал нормальность элементарной подгруппы в любой группе Шевалле, уже было известно, как вывести стандартные коммутационные формулы из этого результата с помощью идеи М. Стейна удвоения кольца вдоль идеала. Это было сделано в работе Л. Васерштейна [40]. Относительная коммутационная формула была получена различными методами в работах [2,3,26,27]. Мульти-относительная коммутационная формула для случая $G = \mathrm{GL}_n$ была недавно доказана Р. Хазратом и Джанг Дзухонгом в работе [28]. Теорема 5.2 обобщает (для односвязных групп Шевалле) все известные коммутационные формулы, имеющие место для любого кольца коэффициентов.

При некотором условии на размерность основного кольца коммутационную формулу 5.2 удается усилить. Для абсолютного случая усиленная коммутационная формула очевидно равносильна нильпотентности группы $K_1^G(R)$. Для $G = \mathrm{SL}_n$ это было сделано А. Баком в работе [16]. Результат А. Бака был обобщен на все группы Шевалле Р. Хазратом и Н. Вавиловым в работе [24]. Доказательство нильпонетности относительного K_1 появилось в работе [18] трех упомянутых авторов. Коммутационная формула из теоремы 5.5 обобщает все результаты о нильпотентности K_1.

Способ доказательства коммутационной формулы из леммы 4.2 автоматически позволяет получить оценку ширины коммутаторов в любой функториальной системе образующих, не зависящую от кольца и идеалов. Этот результат (теорема 5.1) усиливает результаты работ [32, 35]. В частности, в теореме 5.1 не требуется нетеровость основного кольца. С другой стороны, для колец маленькой размерности оценки ширины, полученные в [32,35] лучше, чем оценка, которую можно получить методами настоящей работы.

Доказательства приведенных ниже утверждений базируются на двух идеях. Первая из них – оценка подгруппы, порожденной унипотентными радикалами противоположных параболических подгрупп. Это позволяет выразить элементарный корневой унипотент через произведение других, не просто избегая данного корня (что использовалось ранее), а и гарантировать, что при сопряжении элементом подгруппы Леви мы останемся в порождении унипотентных радикалов. При этом все, что надо знать про группу, это наличие такой параболической подгруппы, что данный корневой унипотент содержится в ее подгруппе Леви.

Вторая идея заменяет использование кольца многочленов и специализации независимой переменной в процедуре локализации. Дело в том, что естественное отображение $G(R[t], tR[t]) \to G(R, rR)$, посылающее независимую переменную t в r, не обязано быть сюръективным. Поэтому мы строим универсальное кольцо D с выделенным элементом $t \in D$ и общий элемент $f \in G(D, tD)$ для главной конгруэнц-подгруппы, соответствующей главному идеалу. Идея универсальной локализации состоит в том, чтобы, используя принцип расщепления, провести процедуру локализации в универсальном (для данной задачи) кольце, а затем спроектировать результат в произвольное кольцо. При этом использование расщепления позволяет избежать сложных вычислений, связанных с повторной локализацией.

§1. Обозначения

Пусть a, b, c – элементы группы G. Через $a^b = b^{-1}ab$ обозначается элемент, сопряженный с a при помощи b. Коммутатор $a^{-1}b^{-1}ab$ обозначается через $[a, b]$. Пусть $A \subseteq G$, а B – подгруппа в G. Через $\langle A \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная A. Через A^B обозначается подгруппа в G, порожденная элементами a^b по всем $a \in A$ и всем $b \in B$. Другими словами, A^B – это наименьшая подгруппа в G, содержащая A и нормализуемая B. Взаимный коммутант $[A, B]$ – это подгруппа в G, порожденная всеми коммутаторами $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$ (это обозначение используется, если A также является подгруппой).

Мультикоммутаторы являются левонормированными, т.е. рекуррентно определяются следующим образом:

$$\big[a_1, \dots, a_m\big] = \big[[a_1, \dots, a_{m-1}], a_m\big],$$

где $a_1, \dots, a_m \in G$ или $a_1, \dots, a_m$ – подгруппы в G.

Все кольца и алгебры являются коммутативными и содержат единицу, а все кольцевые гомоморфизмы сохраняют единичные элементы. Мультипликативная группа кольца R обозначается через R^*. Через $R[t_1, \dots, t_n]$ обозначается кольцо многочленов от n переменных над кольцом R. Для идеала $\mathfrak{q}$ кольца R положим $\mathfrak{q}[t] = \mathfrak{q}R[t]$. Если $p \in R[t_1, \dots, t_n]$, A – R-алгебра, а $a_1 \dots, a_n \in A$, то через $p(a_1, \dots, a_n)$ обозначается значение многочлена p в точке $(a_1, \dots, a_n)$, т.е. образ элемента p под действием гомоморфизма подстановки $\varepsilon_{t_i \mapsto a_i}$; здесь $\varepsilon_{t_i \mapsto a_i} : R[t_1, \dots, t_n] \to A$ – единственный гомоморфизм R-алгебр, отображающий t_i в a_i при всех $i = 1, \dots, n$. Аналогичное соглашение действует для элементов группы точек $G(R)$ аффинной групповой схемы G.

Если R и R' являются K-алгебрами, то $R \otimes_K R'$ обозначает их тензорное произведение над K. Обычно мы отождествляем элементы колец R и R' с их каноническими образами в $R \otimes_K R'$. Символ $\otimes$ без нижнего индекса обозначает тензорное произведение над $\mathbb{Z}$.

Пусть S – мультипликативное подмножество в кольце R. Через $S^{-1}R$ обозначается локализация R в S. Локализационный гомоморфизм $R \to S^{-1}R$ обозначается через λ_S. Если $S = \{s^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, то локализация называется главной. В этом случае мы пишем $R_s = S^{-1}R$ и $\lambda_s : R \to R_s$ для обозначения гомоморфизма локализации. Аналогично мы поступаем в случае локализации в простом идеале $\mathfrak{p}$, т.е. в случае $S = R \setminus \mathfrak{p}$. В этом случае локализация обозначается через $R_\mathfrak{p}$, а гомоморфизм локализации через $\lambda_\mathfrak{p}$.

Идеал $\mathfrak{a}$ кольца R называется расщепляющим идеалом, если аддитивная группа кольца R распадается в прямую сумму $R = R' \oplus \mathfrak{a}$, где R' – подкольцо в R. Естественно, в этом случае $R' \cong R/\mathfrak{a}$. Другими словами, $\mathfrak{a}$ – расщепляющий идеал, если он является ядром ретракции $R \to R' \subseteq R$. Например, если $R = R'[t]$ – кольцо многочленов, то tR является расщепляющим идеалом. Другим важным примером расщепляющего идеала является фундаментальный идеал аффинной алгебры групповой схемы. Заметим, что если $\mathfrak{a}$ – расщепляющий идеал кольца

$R = R' \oplus \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a} \otimes_{R'} C$ является расщепляющим идеалом кольца $R \otimes_{R'} C$ для любой R'-алгебры C.

Пусть K – кольцо, а G – аффинная групповая схема над K. Обозначим через $A = K[G]$ аффинную алгебру схемы G. По определению аффинной схемы элемент $a \in G(R)$ можно отождествить с гомоморфизмом $a : A \to R$. Мы всегда производим это отождествление, считая, что элементами группы точек $G(R)$ схемы G над K-алгеброй R как раз и являются гомоморфизмы из A в R. Обозначим через $g \in G(A)$ – общий элемент схемы G, т.е. тождественное отображение $\mathrm{id}_A : A \to A$. Элемент $a \in G(R)$ индуцирует гомоморфизм групп точек $G(a) : G(A) \to G(R)$ по правилу $G(a)(h) = a \circ h$ для всех $h \in G(A)$. Отсюда следует, что образ элемента g под действием $G(a)$ равен a. В дальнейшем для кольцевого гомоморфизма $\varphi : R \to R'$ мы обозначаем индуцированный гомоморфизм $G(\varphi) : G(R) \to G(R')$ тем же символом φ. Это не может привести к путанице, потому что всегда можно определить смысл символа φ по типу аргумента этого гомоморфизма. В соответствии с этой договоренностью имеем $a(g) = a \circ \mathrm{id}_A = a$.

Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал кольца R. Как обычно, главной конгруэнц-подгруппой $G(R, \mathfrak{a})$ называется ядро гомоморфизма редукции $\rho_{\mathfrak{a}} : G(R) \to G(R/\mathfrak{a})$. Напомним, что аффинная алгебра групповой схемы является алгеброй Хопфа. Легко видеть, что единичный элемент $e_K \in G(\mathbb{Z})$ совпадает с отображением коединицы $A \to K$. Пусть I обозначает фундаментальный идеал, т.е. ядро коединицы e_K. Тогда $g \in G(A, I) = \operatorname{Ker} G(e_K)$. Заметим, что e_K является ретракцией структурного отображения $K \to A$, следовательно I является расщепляющим идеалом. Легко заметить, что условие $a \in G(R, \mathfrak{q})$ эквивалентно включению $a(I) \subseteq \mathfrak{q}$.

В дальнейшем $G = \mathrm{G}(\Phi, \_)$ обозначает групповую схему Шевалле–Демазюра над $\mathbb{Z}$ с системой корней Φ ранга, большего 1, а E – ее элементарную подгруппу. *Обозначения A, I и g, введенные выше, сохраняются на протяжении всей работы.*

§2. Элементарные вычисления

Следующее утверждение – это единственное место работы, где по существу используется классификация систем корней. Оно позволяет выразить данный корневой элемент $x_\alpha(r)$ через произведение корневых элементов, принадлежащих унипотентным радикалам данных противоположных параболических подгрупп, а затем воспользоваться тем фактом, что подгруппа Леви нормализует эти унипотентные радикалы. Данный трюк является ключом к доказательству следующих утверждений настоящего параграфа. Таким же образом может быть доказана теорема Л. Васерштейна [40] об образующих относительной элементарной группы. Для идеала $\mathfrak{q}$ кольца R обозначим через $\mathfrak{q}^{\boxed{2}}$ идеал, порожденный квадратами элементов из $\mathfrak{q}$.

Лемма 2.1. *Пусть P – параболическая подгруппа, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R. Положим $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\boxed{2}}\mathfrak{b}+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{\boxed{2}}$, если $\Phi = C_l$, а $2 \notin R^*$, и $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ в противном случае. Тогда $E(\mathfrak{c}) \leqslant [U_P(\mathfrak{a}), U_P^-(\mathfrak{b})]U_P(\mathfrak{a}\mathfrak{b})U_P^-(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.*

В любом случае, если $\mathfrak{a} = R$, то $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$.

Доказательство использует стандартные вычисления с коммутационной формулой Шевалле, аналогичные вычислениям в работах [13,26, 33,40].

Положим $z_\alpha(p,r) = x_\alpha(p)^{x_{-\alpha}(r)}$. Следующее утверждение является одновременным обобщением результатов работ [14,29,40] об образующих относительной элементарной группы и должно быть полезно для изучения вопросов предстабилизации младших K-функторов. Идея доказательства заимствована у В. ван дер Каллена [29, лемма 2.2].

Теорема 2.2. *Пусть Σ – специальная часть параболического множества корней, а $\mathfrak{a}$ – идеал кольца R. Относительная элементарная подгруппа $E(R,\mathfrak{a})$ порождена элементами $x_\alpha(p)$ и $z_\beta(p,r)$ по всем $\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Sigma$, $p \in \mathfrak{a}$ и $r \in R$.*

Подгруппа $E(\mathfrak{a})$ обычно строго меньше, чем относительная элементарная подгруппа $E(R,\mathfrak{a})$. Следующая теорема утверждает, что она все же содержит некоторую относительную элементарную подгруппу. Это утверждение было сформулировано еще в работе Ж. Титса [38]. Для полной линейной группы оно появилось в [4]. Полное доказательство для всех групп Шевалле было опубликовано в [40]. Для относительного принципа избавления от знаменателей нам понадобится формально более сильное утверждение, чем сформулировано у Титса и Васерштейна. Оно является несложным следствием теоремы 2.2 и леммы 2.1.

Для идеалов $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ кольца R обозначим через $E(\mathfrak{q},\mathfrak{b})$ нормальное замыкание подгруппы $E(\mathfrak{b})$ в $E(\mathfrak{q})$.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R. Если $\Phi \neq C_l$, то $E(R,\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}) \leqslant E(\mathfrak{a},\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, в противном случае $E(R,\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\boxed{2}}\mathfrak{b}) \leqslant E(\mathfrak{a},\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.*

В частности, при $\mathfrak{b} = R$ *получаем* $E(R, \mathfrak{a}^2) \leqslant E(\mathfrak{a})$ *для* $\Phi \neq C_l$*, и* $E(R, \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\boxed{2}}) \leqslant E(\mathfrak{a})$ *в противном случае.*

Для идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ кольца R положим

$$EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = E(R, \mathfrak{a}\mathfrak{b})[E(R, \mathfrak{a}), E(R, \mathfrak{b})].$$

Всегда, кроме случаев $\Phi = C_l$ и $2 \notin R^*$, а также $\Phi = G_2$ и R имеет поле вычетов из двух элементов, $E(R, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \leqslant [E(R, \mathfrak{a}), E(R, \mathfrak{b})]$ (см. [26, лемма 17]). Поэтому, кроме исключительных случаев, группа $EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ равна коммутанту относительных элементарных групп. Эта группа естественно возникает в относительном принципе расщепления, полученном в работе [15].

Лемма 2.4 (Относительный принцип расщепления). *Предположим, что* $R = R' \oplus \mathfrak{a}$ *для некоторого подкольца* R' *и идеала* $\mathfrak{a}$ *в* R*. Пусть* $\mathfrak{b}'$ *– идеал в* R'*, а* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'R$*. Тогда выполнены следующие формулы:*

$$E(R, \mathfrak{b}) = EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot E(R', \mathfrak{b}'),$$
$$G(R, \mathfrak{a}) \cap E(R, \mathfrak{b}) = EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Следующая лемма – относительная версия теоремы 2.3. Мы формулируем ее только для главного идеала, чтобы несколько упростить обозначения. Именно в таком виде она используется при доказательстве относительного принципа избавления от знаменателей. При доказательстве этой леммы используется теорема 2.3, теорема 2.2 и лемма 2.1. Число 27 появляется из-за трехкратного применения теоремы 2.3 или ее аналога. Для $\Phi \neq C_l$ это число может быть без усилий уменьшено до 8, однако для приложений требуется только существование этого числа, а не его величина.

Лемма 2.5. *Пусть* $\mathfrak{b}$ *– идеал кольца* R*, а* $t \in R$*. Тогда*

$$EE(R, \mathfrak{b}, t^{27}R) \leqslant E(tR, t\mathfrak{b}).$$

Следующие 3 утверждения – это варианты относительного принципа избавления от знаменателей. В разных работах он называется “Dilation principle”, “Quillen’s lemma” или “Q-axiom”. Этот принцип – ключевой шаг метода локализации. В том или ином виде он является обязательным ингредиентом доказательства локально-глобального принципа Суслина. Классический принцип получается из относительного подстановкой $\mathfrak{b} = R_S$ или $\mathfrak{b} = R$. Относительная версия принципа избавления от знаменателей и локально-глобального принципа для классических групп была получена в работе [14], при этом в случае необратимой двойки доказательство не полное. Доказательство этих результатов для всех групп Шевалле получено в работе [15] при условии, что кольцо не имеет полей вычетов из двух элементов для $\Phi = C_2, G_2$. Последнее условие снято в работе автора [34] при помощи леммы 2.5.

Теорема 2.6. *Пусть S – мультипликативное подмножество, а $\mathfrak{b}$ – идеал кольца R_S. Пусть $a = a(t) \in E(R_S[t], \mathfrak{b})$ такой элемент, что $a(0) = 0$. Тогда существует $s \in S$ такое, что $a(st) \in \lambda_S\big(E(R[t], \mathfrak{b}[t])\big)$.*

Следствие 2.7. *Пусть S является мультипликативным подмножеством кольца R, $\mathfrak{b}$ – идеал в R, а $a \in G(R[t], tR[t])$. Предположим, что $\lambda_S(a) \in E(R_S[t], \mathfrak{b}R_S[t])$. Тогда существует $s \in S$ такое, что $a(st) \in EE(R[t], \mathfrak{b}, tR[t])$.*

Для областей целостности предыдущее следствие непосредственно вытекает из теоремы 2.6. Основная проблема при доказательстве общего случая – борьба с делителями нуля. В случае, когда t – независимая переменная, мы используем соображение из работы А. Суслина, утверждающее, что при домножении независимой переменной на подходящий элемент мультипликативного подмножества S элементы группы $G(R[t])$, образы которых над $R_S[t]$ равны, становятся равными над самим кольцом $R[t]$.

Следующее утверждение – это усиленный принцип избавления от знаменателей. Здесь t уже не является независимой переменной, и мы не можем использовать метод Суслина для борьбы с делителями нуля. Приходится пользоваться методом автора из работы [19]. Однако это работает только при условии, что главная конгруэнц-подгруппа уровня нильпотентного радикала лежит в элементарной группе. Это условие выполнено в случае, когда тор группы G лежит в элементарной группе, например в случае односвязных групп. Для упрощения обозначений мы одинаково обозначаем элемент $t \in R$ и его образ под действием локализационного гомоморфизма.

Следствие 2.8. *Пусть G – односвязная групповая схема Шевалле–Демазюра, $\mathfrak{b}$ – идеал кольца R, $s, t \in R$, а $a \in G(R, tR)$. Предположим, что $\lambda_s(a) \in EE(R_s, tR_s, \mathfrak{b}R_s)$. Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\rho(a) \in E\big(R/(t - s^m), \rho(\mathfrak{b})\big)$, где $\rho = \rho_{(t-s^m)} : R \to R/(t - s^m)$ – гомоморфизм редукции по модулю $t - s^m$.*

Следующее утверждение – относительный локально-глобальный принцип. Он является основным результатом совместной работы автора с Х. Апте [15] и доказан там при условии обратимости двойки для $\Phi = C_2, G_2$. Позже, в работе [34], все ограничения были сняты. Доказательство этой теоремы использует оригинальную идею А. Суслина из работы [8] и самым существенным образом опирается на следствие 2.7.

Теорема 2.9. *Пусть $\mathfrak{b}$ – идеал кольца R, а $a \in G(R[t], tR[t])$. Предположим, что $\lambda_{\mathfrak{m}}(a) \in E(R_{\mathfrak{m}}[t], \mathfrak{b}R_{\mathfrak{m}}[t])$ для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R. Тогда $a \in EE(R[t], \mathfrak{b}[t], tR[t])$.*

§3. Ключевая конструкция и ключевая лемма

В этом параграфе мы построим кольцо $D = D_G$ и элементы $t \in D$ и $f \in G(D, tD)$, удовлетворяющие следующему условию.

Свойство 3.1. *Для любого кольца R и элементов $r \in R$ и $h \in G(R, rR)$ существует гомоморфизм $\theta : D \to R$ такой, что $\theta(t) = r$ и $\theta(f) = h$.*

Проиллюстрируем идею этой конструкции на примере $G = \mathrm{SL}_n$. Положим

$$D_{\mathrm{SL}_n} = \mathbb{Z}[t, y_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n]/\big(\det(e + ty) - 1\big),$$

где e обозначает единичную матрицу, а y – матрицу с элементами y_{ij}.

В общем случае конструкция похожа на конус над G в единице. Обозначим через $M_n(R)$ полное матричное кольцо над R. Тогда M_n является аффинной схемой над $\mathbb{Z}$, изоморфной n^2-мерному аффинному пространству. Будем отождествлять аффинную алгебру $\mathbb{Z}[M_n]$ с кольцом многочленов $\mathbb{Z}[z_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n]$. Пусть $\pi : G \to M_n$ – точное представление групповой схемы G, и пусть $\pi^* : \mathbb{Z}[M_n] \to A$ – соответствующий гомоморфизм колец. Рассмотрим гомоморфизм колец многочленов $\varphi : \mathbb{Z}[M_n] \to \mathbb{Z}[t, y_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n]$, отображающий z_{ij} в $\delta_{ij} + ty_{ij}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Определим D как pushout следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[M_n] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}[t, y_{ij}] \\ {\scriptstyle \pi^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \xi} \\ A & \xrightarrow{f} & D. \end{array}$$

Другими словами, D равно тензорному произведению $\mathbb{Z}[t, y_{ij}]$ и A над $\mathbb{Z}[M_n]$. Допуская вольность записи, обозначим образы t и всех y_{ij} в D теми же символами.

Определим $f \in G(D)$, как нижнюю горизонтальную стрелку диаграммы, определяющей D. Матричные элементы $\pi(f)_{ij}$ являются образами z_{ij}, поэтому $\pi(f) = e + ty$, где y – это матрица с элементами y_{ij}. В частности, f равна единице по модулю t, т.е. $f \in G(D, tD)$.

Предложение 3.2. *Тройка (D, t, f), построенная выше, удовлетворяет свойству* 3.1. *Более того, пусть $\mathfrak{a}$ является идеалом кольца R, $r \in R$, а $h \in G(R, r\mathfrak{a})$. Тогда существует гомоморфизм $\theta : D \to R$ такой, что $\theta(t) = r$, $\theta(f) = h$ и $\theta(y_{ij}) \in \mathfrak{a}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.*

Обозначим через Y идеал в D, порожденный всеми y_{ij}. Он будет играть роль, аналогичную роли фундаментального идеала аффинной алгебры. Имея это ввиду, необходимо доказать, что Y является расщепляющим идеалом.

Лемма 3.3. *Идеал Y является расщепляющим. Пусть R – кольцо, а $s \in R$. Обозначим через Y' идеал $(Y \otimes R)/(t-s)$ кольца $(D \otimes R)/(t-s)$. Тогда Y' является расщепляющим идеалом. Более того, $(D \otimes R)/(t-s) = R \oplus Y'$ как аддитивные группы.*

Следующее утверждение, которое неоднократно используется в дальнейшем, сразу вытекает из предыдущей леммы и относительного принципа расщепления 2.4.

Следствие 3.4. *Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал кольца R. В обозначениях предыдущей леммы имеем*

$$E\big(D \otimes R/(t-s), D \otimes \mathfrak{a}/(t-s)\big) \cap G(D \otimes R/(t-s), Y') \\ = EE\big(D \otimes R/(t-s), D \otimes \mathfrak{a}/(t-s), Y'\big).$$

Всюду далее групповая схема G предполагается односвязной. Следующая лемма является усилением ключевой леммы метода локализации-пополнения А. Бака [16].

Лемма 3.5. *Пусть R – кольцо, $a \in G(R, \mathfrak{a})$, и $s \in R$. Предположим, что $\lambda_s(a) \in E(R_s, \mathfrak{a}_s)$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ такой, что для любого кольца R', гомоморфизма $\varphi : R \to R'$ и идеалов $\mathfrak{a}' \supseteq \varphi(\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{b}'$ кольца R' выполнено включение*

$$[\varphi(a), G(R', \varphi(s)^m \mathfrak{b}')] \leqslant EE(R', \mathfrak{a}', \mathfrak{b}').$$

Ключевая лемма Бака получится, если в лемме 3.5 положить $R' = \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' = \mathfrak{a} = R$ и $\varphi = \mathrm{id}$. Изначально она была получена Баком в работе [16] для случая $G = \mathrm{SL}_n$. Позже Р. Хазрат и Н. Вавилов в работе [24] обобщили эту лемму на все группы Шевалле. Относительная версия этого утверждения появилась в работе [18] трех вышеупомянутых авторов. В этих работах ключевая лемма Бака была доказана с помощью двойной локализации, метода, который включает в себя вычисления с коммутаторами в группах Шевалле, названные Хазратом и Вавиловым "йогой коммутаторов". Эта лемма явилась основным шагом в существующих доказательствах нильпотентности K_1 и конечности ширины множества коммутаторов.

Для того, чтобы дать понять, как используются предыдущие утверждения и как работает метод универсальной локализации, приведем набросок доказательства леммы 3.5. Сначала рассмотрим коммутатор $[a, f] \in G(D \otimes R)$. В соответствии с относительной коммутационной формулой $[E(C, \mathfrak{p}), G(C, \mathfrak{q})] \leqslant EE(C, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, доказанной в работе [3] для $G = \mathrm{GL}_n$ (доказательство для групп Шевалле аналогично) образ $[a, f]$ под действием гомоморфизма локализации λ_s лежит в группе $EE\big(D \otimes R_s, tD \otimes R_s, D \otimes \mathfrak{a}\big)$. По лемме 2.8 и следствию 3.4 получаем

$$\rho\big([a, f]\big) \in EE\big(D \otimes R/(t - s^m), \rho(D \otimes \mathfrak{a}), Y'\big),$$

где $\rho = \rho_{(t-s^m)}$ – гомоморфизм редукции по модулю $(t - s^m)$, а $Y' = \rho(Y)$. После этого, с использованием универсального свойства 3.2, этот результат проектируется в кольцо R.

§4. Расширенная элементарная подгруппа

В этом параграфе мы построим расширенную относительную элементарную подгруппу и общий элемент этой подгруппы. Зафиксируем унимодулярную последовательность $s_1, \ldots, s_l$ элементов аффинной алгебры A такую, что $\lambda_{s_k}(g) \in E(A_{s_k})$ для всех $k = 1, \ldots, l$. Существование такой последовательности следует из того, что клетки Гаусса образуют открытое покрытие схемы G и целиком лежат в элементарной подгруппе (напомним, что G односвязна). Обозначим через $\mathrm{Um}_l(R)$ множество всех унимодулярных последовательностей над R длины l.

Определение 4.1. *Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал кольца R. Определим расширенную относительную элементарную подгруппу $\widetilde{E}(R,\mathfrak{a})$ по формуле*

$$\widetilde{E}(R,\mathfrak{a}) = \bigcap_{(r_1,\dots,r_l)\in \mathrm{Um}_l(R)} \left(\prod_{k=1}^{l} G(R, r_k\mathfrak{a})\right).$$

Построенная группа удовлетворяет следующим включениям, усиливающим, в частности, относительную стандартную коммутационную формулу.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R. Тогда*

$$[G(R,\mathfrak{a}), \widetilde{E}(R,\mathfrak{b})] \leqslant EE(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \leqslant \widetilde{E}(R,\mathfrak{ab}).$$

Второе включение почти очевидно. Для доказательства первого строится универсальное кольцо и общий элемент группы $\widetilde{E}$. Пусть $D^{(k)}$ обозначает кольцо изоморфное D, порожденное элементами $t^{(k)}$ и $y_{ij}^{(k)}$ вместо t и y_{ij} (где $1 \leqslant i,j \leqslant n$). Аналогично будем писать $f^{(k)} \in G(D^{(k)})$ вместо $f \in G(D)$. Пусть

$$U = \bigotimes_{k=1}^{l} D^{(k)}.$$

Мы отождествляем элементы каждого сомножителя $D^{(k)}$ с их каноническими образами в U. Аналогично, элементы группы $G(D^{(k)})$ отождествляются с их образами в $G(U)$. Обозначим через $Y^{(k)}$ идеал в U, порожденный $y_{ij}^{(k)}$ для всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$, и пусть $\widetilde{Y} = \sum\limits_{k=1}^{l} Y^{(k)}$. Элемент $u = f^{(1)}\cdots f^{(l)} \in G(U)$ является общим элементом функтора $\widetilde{E}$ в следующем смысле.

Лемма 4.3. *Для любого кольца R, унимодулярной последовательности $r_1,\dots,r_l \in R$ и элемента $b \in \widetilde{E}(R,\mathfrak{q})$ существует гомоморфизм $\eta : U \to R$ такой, что $\eta(u) = b$, $\eta(t^{(k)}) = r_k$ для всех $k = 1,\dots,l$ и $\eta(\widetilde{Y}) \subseteq \mathfrak{q}$.*

Теперь доказательство второго включения леммы 4.2 происходит методом универсальной локализации. Рассматривается коммутатор $[g,u] \in G(A\otimes U, I\otimes \widetilde{Y})$ (напомним, что g обозначает общий элемент, а I – фундаментальный идеал аффинной алгебры A схемы G. С помощью леммы 3.5 доказывается, что существуют целые числа $m_1, \ldots, m_l$ такие, что

$$\rho([g,u]) \in EE(U \otimes A, \widetilde{Y} \otimes A, U \otimes I),$$

где ρ – гомоморфизм редукции по модулю идеала, порожденного элементами $t^{(k)} - s_k^{m_k}$ по всем $k = 1, \ldots, l$. После этого g проектируется на произвольный элемент группы $G(R, \mathfrak{a})$, а u, в соответствии с универсальным свойством 4.3, на произвольный элемент группы $\widetilde{E}(R, \mathfrak{b})$.

§5. Основные результаты

Ширина коммутаторов. Пусть S – множество образующих группы G, а $X \subseteq G$. Шириной подмножества X относительно S называется наименьшее натуральное число $L = L_S(X)$ такое, что любой элемент из X может быть записан в виде произведения не более, чем L элементов из S. Если такого L не существует, будем считать, что ширина бесконечна. Под шириной элемента h группы G относительно S подразумевается ширина одноэлементного подмножества $\{h\}$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ категорию пар идеалов. Объектами этой категории являются тройки $(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, где R – кольцо, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – его идеалы. Морфизм $\varphi : (R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to (R', \mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$ – это гомоморфизм колец $\varphi : R \to R'$ такой, что $\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}'$ и $\varphi(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}'$. Ясно, что EE является функтором из категории идеалов в категорию групп. Функториальное множество образующих для EE – это функтор $\mathcal{S}$ из категории пар идеалов в категорию множеств такой, что $S(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ является порождающим подмножеством группы $EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Из доказательства второго включения леммы 4.2 следует, что ширина любого коммутатора $[a, b]$, $a \in G(R, \mathfrak{a})$, $b \in \widetilde{E}(R, \mathfrak{b})$ не превосходит ширины универсального коммутатора $[g, u]$ по отношению к любому наперед заданному функториальному множеству образующих.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathcal{S}$ – функториальное множество образующих для EE. Существует такая константа L, зависящая только от G, что ширина множество коммутаторов $\{[a, b] \mid a \in \widetilde{E}(R, \mathfrak{a}),\ b \in G(R, \mathfrak{b})\}$ относительно $\mathcal{S}(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ не превосходит L для любого кольца R и его идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.*

Из этой теоремы следует, что ширина множества коммутаторов $\{[a, b] \mid a \in E(R),\ b \in G(R)\}$ ограничена в элементарных образующих, ширина $\{[a, b] \mid a \in E(R, \mathfrak{a}),\ b \in G(R)\}$ и $\{[a, b] \mid a \in E(R),\ b \in G(R, \mathfrak{a})\}$

ограничена в множестве образующих Л. Васерштейна $z_\alpha(p,r)$ группы $E(R,\mathfrak{a})$ и в множестве образующих, найденном в теореме 2.2, а также вытекает конечность ширины множества коммутаторов из теоремы 5.1 в образующих группы $EE(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, найденных в работе [25]. При этом существуют оценки ширины, не зависящие от кольца и идеалов. В частности, все известные теоремы об ограниченности ширины множества коммутаторов в группах Шевалле (но не оценки ширины!), которые были получены в совместных работах [32,35] автора с А. Сивацким и Н. Вавиловым, вытекают из этого результата.

Мульти-относительная коммутационная формула. Следующий результат непосредственно вытекает из леммы 4.2 и обобщает (для односвязных групп) все известные коммутационные формулы, полученные в работах [3,28,40]. Если заменить группу $\tilde{E}$ на E, то утверждение будет верно и для других форм группы G, это требует отдельной работы с элементами тора.

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_m$ *– идеалы кольца* R. *Тогда*

$$[\widetilde{E}(R,\mathfrak{a}_1),G(R,\mathfrak{a}_2),\ldots,G(R,\mathfrak{a}_m)]\leqslant EE(R,\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_{m-1},\mathfrak{a}_m).$$

Из доказательства следует, что любой мультикоммутатор

$$[a_1,a_2,\ldots,a_m],\quad a_1\in\widetilde{E}(R,\mathfrak{a}_1),\quad a_i\in G(R,\mathfrak{a}_i)$$

при $i>1$, принадлежит множеству коммутаторов из теоремы 5.1. Поэтому ширина множества мультикоммутаторов ограничена по отношению к любому функториальному множеству образующих, и существует оценка, не зависящая от кольца и идеалов.

Обобщение нильпотентной структуры $\mathbf{K}_1$. Оставшаяся часть работы посвящена обсуждению мульти-относительной версии теоремы А. Бака о нильпотентной структуре K_1. На самом деле, наше внимание будет сосредоточено на индукционном переходе. База индукции, которая следует из би-относительной версии сюръективной стабилизации, в настоящий момент известна только для специальной линейной группы благодаря работе А. Мэйсона и В. Стотерса [30]. С другой стороны, если сосредоточиться на качественном аспекте, не обращая внимания на зависимость степени нильпотентности от размерности кольца, то в качестве базы индукции можно использовать хорошо известный факт о том, что $G(R) = E(R)$ для любого полулокального кольца. Для того, чтобы наш результат не зависел от базы индукции, мы введем аксиоматическое определение функции размерности, которое будем использовать вместо какой-то конкретной размерности кольца. Набор аксиом похож на аксиомы функции размерности А. Бака [17, 23] для конкретной инфраструктуры и набора структурных квадратов.

Определение 5.3. *Пусть $\delta = \delta_G$ – функция из класса колец в $\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$, удовлетворяющая следующим свойствам.*

1. *Если $\delta(R) \leqslant 1$, то для любых идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ кольца R имеет место включение $[G(R,\mathfrak{a}), G(R,\mathfrak{b})] \leqslant EE(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$.*
2. *Для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца R существует мультипликативное подмножество S в R такое, что $G(S^{-1}R, S^{-1}\mathfrak{a}) = E(S^{-1}R, S^{-1}\mathfrak{a})$, и для всех $r \in S$ выполнено неравенство $\delta(R/rR) < \delta(R)$.*
3. *Если кольцо R не нетерово, то $\delta(R) = \infty$.*

В этом случае δ называется функцией размерности для G.

Например, функцией размерности в смысле этого определения является комбинаторная размерность максимального спектра $\dim \operatorname{Max} R$ кольца R. Несколько меньшая функция, размерность Басса–Серра BS-dim, также является функцией размерности в нашем смысле, детали приведены в работах [16, 23].

Ясно, что второе и третье свойства из определения не зависят от сдвига функции размерности. Точнее, если (2) имеет место для функции δ, то это свойство также выполнено и для $\delta' = \delta - k$, где k фиксированное целое число. В работе [30] А. Мэйсона и В. Стотерса доказано, что для $G = \mathrm{SL}_n$ функция $\text{BS-dim}(R) - n + 2$ удовлетворяет первому условию и, следовательно, является функцией размерности для SL_n. Ожидается, что и в общем случае функция $\text{BS-dim}(R) - \operatorname{rank} G + 1$ будет функцией размерности для G, Но в настоящий момент мы не можем это доказать.

Зафиксируем G и функцию размерности δ для G. Пользуясь идеей А. Бака из работы [16], для идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ кольца R определим следующую группу:

$$S_\delta^{(k)}G(R,\mathfrak a,\mathfrak b)=\{h\in G(R,\mathfrak a\mathfrak b)\mid \varphi(h)\in EE(R',\mathfrak a',\mathfrak b')\ \text{ для любого}$$
$$\text{морфизма }\ \varphi:(R,\mathfrak a,\mathfrak b)\to(R',\mathfrak a',\mathfrak b')\ \text{ такого, что }\ \delta(R')\leqslant k\}.$$

Пусть $d=\delta(R)$. Ясно, что $S_\delta^{(d)}G(R,\mathfrak a,\mathfrak b)=EE(R,\mathfrak a,\mathfrak b)$. Ключевую роль в доказательстве индукционного перехода будет играть группа $S_\delta^{(d-1)}G(R,\mathfrak a,\mathfrak b)$. Сейчас мы увеличим эту группу в том же стиле, как и относительную элементарную группу.

Элемент r кольца R называется δ-регулярным, если $\delta(R/r^kR)<\delta(R)$ для всех натуральных чисел k.

Определим функтор $\widetilde E_\delta$ на категории идеалов по формуле

$$\widetilde E_\delta(R,\mathfrak a)=\bigcap_r\Big(G(R,r\mathfrak a)\widetilde E(R,\mathfrak a)\Big),$$

где пересечение берется по всем δ-регулярным элементам r.

Лемма 5.4. *Пусть $\mathfrak a$ и $\mathfrak b$ – идеалы кольца R, а $d=\delta(R)$. Тогда $S_\delta^{(d-1)}G(R,\mathfrak a,\mathfrak b)\leqslant\widetilde E_\delta(R,\mathfrak a\mathfrak b)$.*

Доказательство аналогично соответствующей части доказательства индукционного перехода из работы [16]. Следующий результат усиливает коммутационную формулу из леммы 4.2. При этом лемма 4.2 используется в доказательстве этого результата, наряду с леммой 3.5 и свойством 5.3(2) функции размерности.

Лемма 5.5. *Пусть $\mathfrak a$ и $\mathfrak b$ – идеалы кольца R. Предположим, что группа G односвязна. Тогда*

$$[\widetilde E_\delta(R,\mathfrak a),G(R,\mathfrak b)]\leqslant EE(R,\mathfrak a,\mathfrak b).$$

Следующее утверждение является доказательством индукционного перехода для теоремы 5.7 и без труда выводится из предыдущей леммы.

Следствие 5.6. *Пусть $\mathfrak a,\mathfrak b,\mathfrak c$ – идеалы кольца R. Тогда*

$$[S_\delta^{(k)}G(R,\mathfrak a,\mathfrak b),G(R,\mathfrak c)]\leqslant S_\delta^{(k+1)}G(R,\mathfrak a\mathfrak b,\mathfrak c).$$

В частности, если $\delta(R)=0\implies G(R,\mathfrak a)=E(R,\mathfrak a)$ для любой пары $(R,\mathfrak a)$, то условие 5.3(1) вытекает из условий 5.3(2) и (3).

Последняя теорема настоящей работы мгновенно вытекает из предыдущего следствия и условия 5.3(1). Она является существенным усилением результатов А. Бака, Р. Хазрата и Н. Вавилова о нильпотентной структуре K_1, полученных в работах [16], [24] и [18].

Теорема 5.7. *Пусть* $\mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_d$ *– идеалы кольца* R*, где* $d \geqslant 1$*. Пусть* δ *– функция размерности для* G*, и* $\delta(R) \leqslant d$*. Тогда*

$$[G(R,\mathfrak{a}_0), G(R,\mathfrak{a}_1), \dots, G(R,\mathfrak{a}_d)] \leqslant EE(R, \mathfrak{a}_0 \dots \mathfrak{a}_{d-1}, \mathfrak{a}_d).$$

Литература

1. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. МИАН **165** (1984), 24–42.
2. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Стандартная коммутационная формула.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1, Мат., Мех. Астроном. (2008), no. 1, 9–14.
3. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Еще раз о стандартной коммутационной формуле.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1, Мат., Мех., Астроном. **43** (2010), no. 1 16–22.
4. Л. Н. Васерштейн, А. А. Суслин, *Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **40** (1976), no. 5, 993–1054.
5. В. И. Копейко, *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов.* — Мат. Сб. **106** (1978), no. 1, 94–107.
6. В. И. Копейко, А. А. Суслин, *О квадратичиых модулях над кольцами многочлеов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 114–124.
7. В. А. Петров, А. К. Ставрова, *Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах.* — Алгебра и анализ **20** (2008), no. 4, 160–188.
8. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **41** (1977), no. 2, 235–252.
9. А. А. Суслин, В. И. Копейко, *Квадратичные модули и ортогональная группа над кольцами многочленов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 216–250.
10. М. С. Туленбаев, *Мультипликатор шура группы элементарных матриц конечного порядка.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 162–169.
11. С. Г. Хлебутин, *Достаточные условия нормальности подгруппы элементарных матриц.* — УМН **39** (1984), no. 3, 245–246.
12. E. Abe, *Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings.* — Comm. Algebra **11** (1983), no. 12, 1271–1307.
13. E. Abe, *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Contemp. Math. **83** (1989), 1–17.
14. H. Apte, P. Chattopadhyay, R. Rao, *A local global theorem for extended ideals.* — J. Ramanujan Math. Soc. **27** (2012), no. 1, 17–30.
15. H. Apte, A. Stepanov, *A local global theorem for extended ideals.* — Cent. Eur. J. Math. (2014) (в печати). Препринт: `http://arxiv.org/abs/1211.3575`.

16. A. Bak, *Nonabelian K-theory: The nilpotent class of* K_1 *and general stability.* — K-Theory **4** (1991), 363–397.
17. A. Bak, *Lectures on dimension theory, group valued functors, and nonstable K-theory*, Preprint, Buenos Aires, 1995.
18. A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov, *Localization-completion strikes again: relative* K_1 *is nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1075–1085.
19. A. Bak, A. V. Stepanov, *Dimension theory and nonstable K-theory for net groups.* — Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 207–253.
20. A. Bak, N. A. Vavilov, *Normality for elementary subgroup functors.* — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **118** (1995), no. 1, 35–47.
21. A. Bak, N. A. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I: *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7** (2000), no. 2, 159–196.
22. F. Grunewald, J. Mennicke, L. Vaserstein, *On symplectic groups over polynomial rings.* — Math. Z. **206** (1991), 35–56.
23. R. Hazrat, *Dimension theory and nonstable* K_1 *of quadratic modules.* — K-Theory **27** (2002), no. 4, 293–328.
24. R. Hazrat, N. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
25. R. Hazrat, N. Vavilov, Z. Zhang, *Generation of relative commutator subgroups in Chevalley groups*, Preprint: `http://arxiv.org/abs/1212.5432`, 2012.
26. R. Hazrat, N. Vavilov, Z. Zhang, *Relative commutator calculus in Chevalley groups.* — J. Algebra **385** (2013), 262–293.
27. R. Hazrat, Z. Zhang, *Generalized commutator formula.* — Comm. Algebra **39** (2011), no. 4, 1441–1454.
28. R. Hazrat, Z. Zhang, *Multiple commutator formulas.* — Israel J. Math. **195** (2013), no. 1, 481–505.
29. W. van der Kallen, *A module structure on certain orbit sets of unimodular rows.* — J. Pure Appl. Algebra **57** (1989), no. 3, 281–316.
30. A. W, Mason, W. W. Stothers, *On subgroups of* $GL(n, A)$ *which are generated by commutators.* — Invent. Math. **23** (1974), 327–346.
31. D. Quillen, *Projective modules over polynomial rings.* — Invent. Math. **36** (1976), 167–171.
32. A. Sivatski, A. Stepanov, *On the word length of commutators in* $\mathrm{GL}_n(R)$. — K-Theory **17** (1999), 295–302.
33. M. R. Stein, *Generators, relations, and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93** (1971), 965–1004.
34. A. Stepanov, *Elementary calculus in Chevalley groups over rings.* — J. Prime Research in Math. **9** (2013), 79–95.
35. A. Stepanov, N. Vavilov, *Length of commutators in Chevalley groups.* — Israel J. Math. **185** (2011), 253–276.
36. A. V. Stepanov, *Structure of Chevalley groups over rings via universal localization.* — J. K-Theory (2014), в печати. Препринт: `http://arxiv.org/abs/1303.6082`.
37. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math. **55** (1986), 693–710.
38. J. Tits, *Systemes générateurs de groupes de congruences.* — C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **283** (1976), 693–695.

39. L. N. Vaserstein, *On the normal subgroups of GL_n over a ring.* — Lecture Notes in Math. **854** (1981), 456–465.
40. Vaserstein L. N. *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **38** (1986), 219–230.

Stepanov A. V. Non-Abelian K-theory for Chevalley groups over rings.

We announce some results on the structure of Chevalley groups $G(R)$ over a commutative ring R recently obtained by the author. The following results are generalized and improved:

(1) Relative local-global principle.
(2) Generators of relative elementary subgroups.
(3) Relative multi-commutator formulas.
(4) Nilpotent structure of relative K_1.
(5) Boundedness of commutator length.

The proof of first two items is based on computations with generators of the elementary subgroups translated into the language of parabolic subgroups. For the proof of the further ones we enlarge the relative elementary subgroup, construct a generic element, and use localization in a universal ring.

Математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета;
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ"
E-mail: `stepanov239@gmail.com`

Поступило 2 декабря 2013 г.