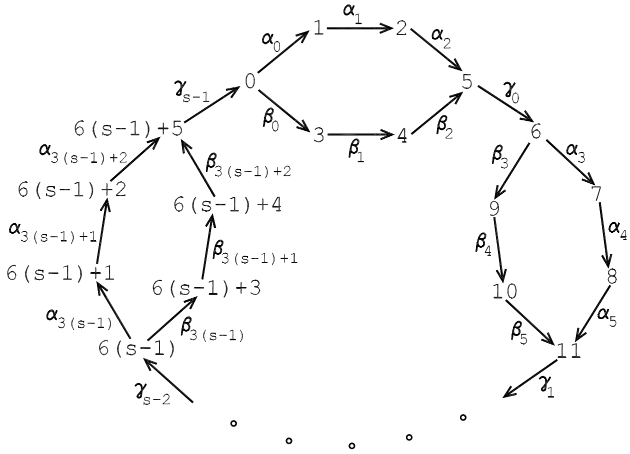
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

М. А. Пустовых

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА E_6

§1. Введение

Рассмотрим самоинъективную базисную алгебру над алгебраически замкнутым полем, имеющую конечный тип представления. Согласно классификации Ридтманн, стабильный AR-колчан такой алгебры описывается с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое совпадает с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). Для алгебр типа A_n и D_n структура кольца когомологий Хохшильда полностью исследована и описана в [2–5] (тип A_n) и [6–11] (тип D_n). Рассмотрим алгебры древесного типа E_6. Любая алгебра типа E_6 производно эквивалентна алгебре путей некоторого колчана с соотношениями. А именно, пусть $\mathcal{Q}_s$ ($s \in \mathbb{N}$) – следующий колчан:



Ключевые слова: когомологии Хохшильда, древесный тип E_6, бимодульная резольвента.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 13-01-00902.

Тогда любая алгебра типа E_6 производно эквивалентна алгебре, принадлежащей одному из двух следующих семейств:

1) $R_s = K[\mathcal{Q}_s]/I$, где K – поле, а I – идеал в алгебре путей $K[\mathcal{Q}_s]$ колчана $\mathcal{Q}_s$, порождённый

а) всеми путями длины 5;

б) путями вида $\alpha^3 - \beta^3$, $\alpha\gamma\beta$, $\beta\gamma\alpha$.

2) $R'_s = K[\mathcal{Q}_s]/I'$, где K – поле, а I' – идеал в алгебре путей $K[\mathcal{Q}_s]$ колчана $\mathcal{Q}$, порождённый

а) всеми путями длины 5;

б) путями вида $\alpha^3 - \beta^3$, $\alpha_{3t}\gamma_{t-1}\beta_{3t-1}$, $\beta_{3t}\gamma_{t-1}\alpha_{3t-1}$ $(1 \leqslant t \leqslant s-1)$, $\alpha_0\gamma_{s-1}\alpha_{3(s-1)+2}$, $\beta_0\gamma_{s-1}\beta_{3(s-1)+2}$.

Здесь и далее мы будем часто опускать индексы у стрелок α_i, β_i и γ_i, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Данная статья посвящена изучению структуры кольца когомологий Хохшильда для алгебры R_s. Для этой алгебры мы получим описание кольца когомологий Хохшильда в терминах образующих с соотношениями. Заметим, что для исследования структуры кольца когомологий мы построим бимодульную резольвенту алгебры R_s, которая также представляет интерес как отдельный результат.

§2. Формулировка основного результата

Далее везде предполагается, что $n = 6$.

Пусть $\mathrm{HH}^t(R)$ – t-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления t на 11, m – целая часть от деления r на 2.

Для описания кольца когомологий Хохшильда алгебры R_s введём следующие условия на произвольную степень t:

(1) $r = 0$, $2 \mid \ell$, $\ell n + m \equiv 0(s)$ или $s = 1$;

(2) $r = 0$, $2 \mid \ell$, $\operatorname{char} K = 3$, $\ell n + m \equiv 1(s)$ или $s = 1$;

(3) $r = 1$, $2 \mid \ell$, $\ell n + m \equiv 0(s)$ или $s = 1$;

(4) $r = 1$, $2 \nmid \ell$, $\ell n + m \equiv 0(s)$ или $s = 1$;

(5) $r = 2$, $2 \nmid \ell$, $\ell n + m \equiv 1(s)$ или $s = 1$;

(6) $r = 3$, $2 \mid \ell$, $\operatorname{char} K = 2$, $\ell n + m \equiv 0(s)$ или $s = 1$;

(7) $r = 3$, $2 \nmid \ell$, $\ell n + m \equiv 0(s)$ или $s = 1$;

(8) $r = 4$, $2 \nmid \ell$, $\ell n + m \equiv 1(s)$ или $s = 1$;

(9) $r = 4$, $2 \nmid \ell$, $\operatorname{char} K = 3$, $\ell n + m \equiv 0(s)$ или $s = 1$;

(10) $r = 4$, $2 \mid \ell$, $\operatorname{char} K = 2$, $\ell n + m \equiv 1(s)$ или $s = 1$;

(11) $r = 5$, $2 \mid \ell$, $\operatorname{char} K = 3$, $\ell n + m \equiv 0(s)$ или $s = 1$;

(12) $r=5$, $2\nmid\ell$, $\operatorname{char}K=3$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(13) $r=6$, $2\mid\ell$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(14) $r=6$, $2\mid\ell$, $\operatorname{char}K=3$, $\ell n+m\equiv 1(s)$ или $s=1$;
(15) $r=6$, $2\nmid\ell$, $\operatorname{char}K=2$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(16) $r=7$, $2\mid\ell$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(17) $r=7$, $2\nmid\ell$, $\operatorname{char}K=2$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(18) $r=8$, $2\mid\ell$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(19) $r=9$, $2\mid\ell$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(20) $r=9$, $2\nmid\ell$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$;
(21) $r=10$, $2\nmid\ell$, $\ell n+m\equiv 1(s)$ или $s=1$;
(22) $r=10$, $2\nmid\ell$, $\operatorname{char}K=3$, $\ell n+m\equiv 0(s)$ или $s=1$.

Положим $M=22s/\text{НОД}(2n,s)$.

Замечание 1. В параграфе 3 мы покажем, что минимальный период бимодульной резольвенты R_s равен M.

Рассмотрим сначала случай $s>1$. Пусть $\{t_{1,i},\dots,t_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней t, удовлетворяющих условиям i-го пункта из списка выше, и таких, что $0\leqslant t_{j,i}<M$ $(j=1,\dots,\alpha_i)$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X}=\bigcup_{i=1}^{22}\left\{X^{(i)}_{t_{j,i}}\right\}_{j=1}^{\alpha_i}\cup\{T\},$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку такую, что

$$\left.\begin{array}{c}\deg X^{(i)}_{t_{j,i}}=t_{j,i}\quad\text{для всех}\quad i=1,\dots,22\ \text{ и }\ j=1,\dots,\alpha_i;\\ \deg T=M.\end{array}\right\}\qquad(\circ)$$

Замечание 2. Далее мы будем часто использовать упрощённое обозначение $X^{(i)}$ для $X^{(i)}_{t_{j,i}}$, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Обозначение.

$$\widetilde{X}^{(i)}=\begin{cases}X^{(i)}, & \deg\widetilde{X}^{(i)}<\deg T\\ TX^{(i)}, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, где I – идеал, порождённый однородными элементами, соответствующими следующим соотношениям.

$$X^{(3)}X^{(1)} = X^{(3)}X^{(2)} = X^{(3)}X^{(3)} = X^{(3)}X^{(5)} = X^{(3)}X^{(8)} = 0;$$
$$X^{(3)}X^{(9)} = X^{(3)}X^{(10)} = X^{(3)}X^{(11)} = X^{(3)}X^{(12)} = X^{(3)}X^{(14)} = 0;$$
$$X^{(3)}X^{(16)} = X^{(3)}X^{(17)} = X^{(3)}X^{(19)} = X^{(3)}X^{(21)} = X^{(3)}X^{(22)} = 0;$$
$$X^{(3)}X^{(4)} = \widetilde{X}^{(5)}; \quad X^{(3)}X^{(6)} = \widetilde{X}^{(10)};$$
$$X^{(3)}X^{(7)} = 2\widetilde{X}^{(8)}; \quad X^{(3)}X^{(13)} = 2\widetilde{X}^{(16)};$$
$$X^{(3)}X^{(15)} = \widetilde{X}^{(17)}; \quad X^{(3)}X^{(18)} = \widetilde{X}^{(19)}; \quad X^{(3)}X^{(20)} = \widetilde{X}^{(21)}.$$

$$X^{(4)}X^{(7)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(10)}, & \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{r1}$$

$$X^{(7)}X^{(7)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(14)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{r2}$$

$$X^{(4)}X^{(13)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(17)}, & \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{r3}$$

$$X^{(7)}X^{(18)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(2)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{r4}$$

$$X^{(13)}X^{(20)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(10)}, & \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{r5}$$

$$X^{(18)}X^{(18)} = \begin{cases} -\widetilde{X}^{(12)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{r6}$$

$$X^{(18)}X^{(20)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(14)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{r7}$$

Остальные соотношения опишем в виде таблиц (номера (r1)–(r7) в ячейках таблиц означают номер соотношения, в котором описано произведение соответствующих элементов).

	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(4)}$	$X^{(6)}$	$X^{(7)}$	$X^{(8)}$	$X^{(9)}$	$X^{(11)}$	$X^{(12)}$
$X^{(1)}$	$\widetilde{X}^{(1)}$	$\widetilde{X}^{(2)}$	$\widetilde{X}^{(4)}$	$\widetilde{X}^{(6)}$	$\widetilde{X}^{(7)}$	$\widetilde{X}^{(8)}$	$\widetilde{X}^{(9)}$	$\widetilde{X}^{(11)}$	$\widetilde{X}^{(12)}$
$X^{(2)}$		0	0	0	0	0	$\widetilde{X}^{(8)}$	0	0
$X^{(4)}$			0	$\widetilde{X}^{(8)}$	(r1)	0	$\widetilde{X}^{(11)}$	0	$s\widetilde{X}^{(14)}$
$X^{(6)}$				0	0	0	0	0	0
$X^{(7)}$					(r2)	0	$s\widetilde{X}^{(16)}$	0	0
$X^{(8)}$						0	0	0	0
$X^{(9)}$							0	0	$-s\widetilde{X}^{(19)}$
$X^{(11)}$								0	$-s\widetilde{X}^{(21)}$

	$X^{(13)}$	$X^{(14)}$	$X^{(15)}$	$X^{(16)}$	$X^{(18)}$	$X^{(20)}$	$X^{(22)}$
$X^{(1)}$	$\widetilde{X}^{(13)}$	$\widetilde{X}^{(14)}$	$\widetilde{X}^{(15)}$	$\widetilde{X}^{(16)}$	$\widetilde{X}^{(18)}$	$\widetilde{X}^{(20)}$	$\widetilde{X}^{(22)}$
$X^{(2)}$	$\widetilde{X}^{(14)}$	0	0	0	0	0	$\widetilde{X}^{(21)}$
$X^{(4)}$	(r3)	0	$\widetilde{X}^{(16)}$	0	$\widetilde{X}^{(20)}$	0	0
$X^{(6)}$	$\widetilde{X}^{(19)}$	0	$\widetilde{X}^{(20)}$	0	0	0	0
$X^{(7)}$	$-2\widetilde{X}^{(20)}$	0	$\widetilde{X}^{(19)}$	$-\widetilde{X}^{(21)}$	(r4)	0	$-s\widetilde{X}^{(5)}$
$X^{(8)}$	$-\widetilde{X}^{(21)}$	0	0	0	0	0	0
$X^{(9)}$	$-\widetilde{X}^{(22)}$	$-\widetilde{X}^{(21)}$	0	0	$s\widetilde{X}^{(3)}$	$s\widetilde{X}^{(5)}$	0
$X^{(11)}$	0	0	0	0	$s\widetilde{X}^{(5)}$	0	0

	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(14)}$	$X^{(15)}$	$X^{(16)}$	$X^{(18)}$	$X^{(20)}$	$X^{(22)}$
$X^{(12)}$	0	$-s\widetilde{X}^{(2)}$	0	0	0	0	0	$s\widetilde{X}^{(8)}$
$X^{(13)}$		$2\widetilde{X}^{(4)}$	0	$\widetilde{X}^{(3)}$	$\widetilde{X}^{(5)}$	$-\widetilde{X}^{(7)}$	(r5)	$\widetilde{X}^{(11)}$
$X^{(14)}$			0	0	0	0	0	0
$X^{(15)}$				$\widetilde{X}^{(4)}$	0	$\widetilde{X}^{(6)}$	$\widetilde{X}^{(8)}$	0
$X^{(16)}$					0	$-\widetilde{X}^{(8)}$	0	0
$X^{(18)}$						(r6)	(r7)	$s\widetilde{X}^{(16)}$
$X^{(20)}$							0	0
$X^{(22)}$								0

Теорема 1. *Пусть $s > 1$, $R = R_s$ – алгебра типа E_6. Тогда алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}$.*

Рассмотрим случай $s = 1$.

Введем множество

$$\mathcal{X}' = \begin{cases} \mathcal{X} \cup \left\{X_0^{(23)}, X_0^{(24)}, X_0^{(25)}, X_0^{(26)}, X_0^{(27)}, X_0^{(28)}\right\}, & \operatorname{char} K \neq 3; \\ \mathcal{X} \cup \left\{X_0^{(24)}, X_0^{(25)}, X_0^{(26)}, X_0^{(27)}, X_0^{(28)}\right\}, & \operatorname{char} K = 3; \end{cases}$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}']$ введём градуировку такую, что

$\deg X_{t_{j,i}}^{(i)} = t_{j,i}$ для всех $i = 1, \dots, 22$ и $j = 1, \dots, \alpha_i$;
$\deg T = M$ (аналогично ($\circ$));
$\deg X_0^{(23)} = \deg X_0^{(24)} = \deg X_0^{(25)} = \deg X_0^{(26)} = \deg X_0^{(27)} = \deg X_0^{(28)} = 0.$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}' = K[\mathcal{X}']/I'$, где идеал I' порождён однородными элементами, соответствующими соотношениям, которые уже были описаны для случая $s > 1$, а также следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
X^{(1)}X^{(i)} &= \begin{cases} \widetilde{X}^{(i)}, & t_1 = 0; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad i \in \{23, 24, 28\}; \\
X^{(1)}X^{(i)} &= \begin{cases} \widetilde{X}^{(i)}, & t_1 = 0; \\ \widetilde{X}^{(2)}, & t_1 > 0 \text{ и } \operatorname{char} K = 3; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad i \in \{25, 26, 27\}; \\
X^{(9)}X^{(i)} &= \widetilde{X}^{(8)}, \quad i \in \{25, 26, 27\}; \\
X^{(13)}X^{(i)} &= \begin{cases} \widetilde{X}^{(14)}, & \operatorname{char} K = 3; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad i \in \{25, 26, 27\}; \\
X^{(22)}X^{(i)} &= \widetilde{X}^{(21)}, \quad i \in \{25, 26, 27\}; \\
X^{(j)}X^{(i)} &= 0, \quad j \in [2, 28] \setminus \{9, 13, 22\}, \quad i \in [23, 28],
\end{aligned}$$

где t_1 обозначает степень элемента $X^{(1)}$.

Теорема 2. *Пусть $s = 1$, $R = R_1$ – алгебра типа E_6. Тогда алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}'$.*

Замечание 3. Из описания колец $\mathrm{HH}^*(R)$ в теоремах 1 и 2 следует, в частности, что они коммутативны.

§3. Бимодульная резольвента

Будем строить минимальную проективную бимодульную резольвенту R в следующем виде:

$$\dots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

Пусть Λ – обёртывающая алгебра алгебры R. Тогда R–R-бимодули можно рассматривать как левые Λ-модули.

Обозначения.

(1) Через e_i, $i \in \mathbb{Z}_{ns} = \{0, 1, \ldots, ns-1\}$, обозначаем идемпотенты алгебры $K[\mathcal{Q}_s]$, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$.

(2) Обозначим через $P_{i,j} = R(e_i \otimes e_j)R = \Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}_{ns}$. Заметим, что модули $P_{i,j}$, составляют полное множество (попарно неизоморфных) неразложимых проективных Λ-модулей.

(3) Для $a \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$ через $(a)_t$ обозначим наименьший неотрицательный вычет a по модулю t (в частности, $0 \leqslant (a)_t \leqslant t-1$).

Определим автоморфизм σ: $R \to R$, действующий следующим образом:

$$\sigma(e_i) = \begin{cases} e_{i+n^2}, & i \equiv 0,5(n); \\ e_{i+n^2+2}, & i \equiv 1,2(n); \\ e_{i+n^2-2}, & i \equiv 3,4(n), \end{cases}$$

$$\sigma(\gamma_i) = -\gamma_{i+n},$$

$$\sigma(\alpha_i) = \begin{cases} -\beta_{i+3n}, & i \equiv 0,1(3); \\ \beta_{i+3n}, & i \equiv 2(3), \end{cases} \qquad \sigma(\beta_i) = \begin{cases} -\alpha_{i+3n}, & i \equiv 1,2(3); \\ \alpha_{i+3n}, & i \equiv 0(3). \end{cases}$$

Введём вспомогательные функции f: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, h: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и λ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, действующие следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y; \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \qquad h(x,y) = \begin{cases} 1, & x \,\vdots\, 2,\ x < y; \\ 0, & x \not\vdots\, 2,\ x < y; \\ 1, & x \not\vdots\, 2,\ x \geqslant y; \\ 0, & x \,\vdots\, 2,\ x \geqslant y, \end{cases}$$

$$\lambda(i) = \begin{cases} i, & i \equiv 0,5(\mathrm{mod}\ 6); \\ i+2, & i \equiv 1,2(\mathrm{mod}\ 6); \\ i-2, & i \equiv 3,4(\mathrm{mod}\ 6). \end{cases}$$

Введём Q_r ($r \leqslant 10$). Для рассматриваемой степени r обозначим через m целую часть от деления r на 2. Имеем

$$Q_{2m} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$

$$Q_{2m+1} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m+1,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-2,$$

где

$$\begin{aligned} Q'_{2m,r} = \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,2)} P_{(r+m)n-1+h(m,2)+i,rn} \right) \\ \oplus \bigoplus_{i=0}^{f(m,3)} \big(P_{(r+m)n+1+(m)_3+3i,rn+1} \oplus P_{\lambda((r+m)n+1+(m)_3+3i),rn+3}\big) \\ \oplus \bigoplus_{i=0}^{f(m,2)} \big(P_{(r+m)n+1+(m+1)_3+3f(m,5)+3i,rn+2} \\ \oplus P_{\lambda((r+m)n+1+(m+1)_3+3f(m,5)+3i),rn+4}\big) \\ \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,3)} P_{(r+m+1)n-h(m,3)+i,rn+5} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q'_{2m+1,r} = \left(\bigoplus_{i=0}^{1-f(m,4)} P_{(r+m)n+1+h(m,0)+4f(m,4)+2i,rn} \right) \\ \oplus P_{(r+m+1)n-1+h(m,5)-4f(m,0),rn+1} \oplus P_{\lambda((r+m+1)n-1+h(m,5)-4f(m,0)),rn+3} \\ \oplus P_{(r+m+1)n-1+h(m,0)+4f(m,4),rn+2} \\ \oplus P_{\lambda((r+m+1)n-1+h(m,0)+4f(m,4),rn+2),rn+4} \\ \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{1-f(m,0)} P_{(r+m+1)n+1+h(m,5)-2f(m,0)+2i,rn+5} \right). \end{aligned}$$

Опишем дифференциалы d_r для $r \leqslant 10$. Так как Q_i – прямые суммы, то их элементы можно рассматривать как векторы-столбцы, а тогда дифференциалы описываются некоторыми матрицами (которые умножаются справа на вектор-столбец). Опишем покомпонентно матрицы дифференциалов.

Замечание 4. Нумерацию строк и столбцов в матрицах дифференциалов всюду начинаем с нуля.

Обозначения.

(1) Через $w_{i\to j}$ обозначим путь из i-й вершины в j-ю.

(2) Через $w_{i\to}^{(m)}$ обозначим путь, начинающийся в i-й вершине и имеющий длину m.

(3) Через $w_{\to i}^{(m)}$ обозначим путь, заканчивающийся в i-й вершине и имеющий длину m.

Введём функции $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f_0\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $f_1\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, действующие следующим образом:

$$g(j) = \begin{cases} 1, & (j)_{2s} < s; \\ 3 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$f_0(x,y) = \begin{cases} 1, & x < y; \\ 0 & x \geqslant y, \end{cases} \qquad f_1(x,y) = \begin{cases} 1, & x < y; \\ -1 & x \geqslant y. \end{cases}$$

Описание d_0

$d_0 : Q_1 \to Q_0$ – матрица размера $(7s \times 6s)$.

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n\to(j+m)n+g(j)} \otimes e_{jn}, & i = (j)_s; \\ -e_{(j+m)n+g(j)} \otimes w_{jn\to jn+g(j)}, & i = j+s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j-s; \\ -e_{(j+m)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+g(j)\to jn+g(j)+1}, & i = j+s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+g(j)+1 \to (j+m)n+5} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - s; \\ -e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn+g(j)+1 \to jn+5}, & i = 5s + (j)_s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+5 \to (j+m)n+6} \otimes e_{jn+5}, & i = j - s; \\ -e_{(j+m)n+6} \otimes w_{jn+5 \to (j+1)n}, & i = (j+1)_s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_1

$d_1 : Q_2 \to Q_1$ – матрица размера $(6s \times 7s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{jn+1+j_1+2f(j_1,2) \to jn+5} \otimes w_{jn \to jn+j_1}, \\ \qquad i = j + 2sj_1,\ 0 \leqslant j_1 < 3; \\ -w_{jn+3+j_1 \to jn+5} \otimes w_{jn \to jn+j_1+2(1-f(j_1,0))}, \\ \qquad i = j + 2sj_1 + s,\ 0 \leqslant j_1 < 3; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w^{(4-j_1)}_{\to (j+1)n+1+g(j+s)} \otimes w^{(j_1)}_{jn+g(j+s) \to}, \\ \qquad i = j + 2sj_1 + s - s(1 - f_0(j,2s))f(j_1,2),\ 0 \leqslant j_1 < 3; \\ w^{(1-j_1)}_{\to (j+1)n+1+g(j+s)} \otimes w^{(j_1+3)}_{jn+g(j+s) \to}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 2sj_1 + s(1 - f_0(j,2s)),\ 0 \leqslant j_1 < 2; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w^{(2)}_{\to (j+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+g(j+s)+1},\ i = j + s; \\ w^{(1)}_{\to (j+1)n+g(j)} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j+s)+1 \to},\ i = (j)_s + 6s; \\ e_{(j+1)n+g(j)} \otimes w^{(2)}_{jn+g(j+s)+1 \to},\ i = (j+1)_s + sf_0(j,4s); \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+1)n\to(j+2)n} \otimes e_{jn+5},\ i = j+s; \\ w_{(j+1)n+1+j_1+2f(j_1,3)+2f(j_1,2)\to(j+2)n} \\ \quad \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+j_1+2f(j_1,3)}, \\ i = (j+1)_s + 2sj_1,\ 0 \leqslant j_1 < 4; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_2

$d_2 : Q_3 \to Q_2$ – матрица размера $(8s \times 6s)$.

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m-1)n+5\to(j+m)n+g(j)+1} \otimes e_{jn},\ i = (j)_s; \\ -f_1(j,s)e_{(j+m)n+g(j)+1} \otimes w_{jn\to jn+g(j)},\ i = j+s; \\ f_1(j,s)w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m)n+g(j)+1} \otimes w_{jn\to jn+1+g(j+s)}, \\ \quad i = (j+s)_{2s} + 3s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+g(j)+1\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn+g(j)},\ i = j-s; \\ -w_{(j+m)n+g(j+s)\to(j+m)n+5} \otimes w_{jn+g(j)\to jn+g(j)+1},\ i = j+s; \\ -f_1(j,3s)e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn+g(j)\to(j+1)n},\ i = (j+1)_s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+g(j+s)\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn+g(j)+1},\ i = j-s; \\ -e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j)+1\to jn+5},\ i = 5s + (j)_s; \\ w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j)+1\to(j+1)n},\ i = (j+1)_s,\ j < 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+5},\ i = 5s + (j)_s; \\ -w_{(j+m+1)n-1\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j < 7s; \\ -e_{(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+g(j+s)+1}, \\ \quad i = 3s + (j+1)_s + sf_0(j,7s); \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_3

$d_3 : Q_4 \to Q_3$ – матрица размера $(9s \times 8s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+2\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ -w_{(j+m)n+4\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn}, & i = j+s; \\ e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+1}, & i = j+2s; \\ e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+3}, & i = j+3s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+2+j_1+2(1-f(j_1,0))\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+j_1}, \\ \qquad i = j - s + 2sj_1,\ 0 \leqslant j_1 < 3; \\ -e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+4}, \quad i = j+4s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w^{(2-j_1)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)} \otimes w^{(j_1)}_{jn+g(j)\to}, & i = 2j_1s + j,\ 0 \leqslant j_1 < 2; \\ e_{(j+m+1)n+g(j+s)} \otimes w^{(2)}_{jn+g(j)\to}, & i = 6s + (j+s)_{2s}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w^{(1-j_1)}_{\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes w^{(j_1)}_{jn+g(j)+1\to}, & i = j + 2sj_1,\ 0 \leqslant j_1 < 2; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w^{(2)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - 2s; \\ w^{(1)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j)+1\to}, & i = (j+s)_{2s} + 6s; \\ -f_1(j,7s)e_{(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w^{(2)}_{jn+g(j)+1\to}, \\ \qquad i = (j+1)_s + sf_0(j,7s); \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m+1)n+2\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s; \\ e_{(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+1}, & i = 2s + (j+1)_s; \\ w_{(j+m+1)n+1\to(j+m+1)n+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j - 2s; \\ -w_{(j+m+1)n+3\to(j+m+1)n+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j - s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_4

$d_4 : Q_5 \to Q_4$ – матрица размера $(8s \times 9s)$.

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m-1)n+5\to(j+m)n+1} \otimes e_{jn}, & i = j,\ j < s; \\ -f_1(j,s) w_{(j+m)n\to(j+m)n+g(j)} \otimes e_{jn}, & i = (j)_s + s; \\ -e_{(j+m)n+g(j)} \otimes w_{jn\to jn+g(j+s)}, & i = (j+s)_{2s} + 2s; \\ e_{(j+m)n+g(j)} \otimes w_{jn\to jn+1+g(j)}, & i = j + 4s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn+1\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s,\ j < 3s; \\ w_{(j+m)n+g(j+s)\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j; \\ -w_{(j+m)n+g(j+s)+1\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j)\to jn+g(j)+1}, & i = 4s + j; \\ -f_1(j,3s) e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j)\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s + s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn+g(j)+1\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s,\ j < 5s; \\ w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j; \\ -w_{(j+m)n+g(j+s)+1\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j + 2s; \\ -f_1(j,5s) e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn+g(j)+1\to jn+5}, & i = 8s + (j)_s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} -w_{(j+m+1)n-1\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j < 7s; \\ w_{(j+m+1)n-1\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+5}, \quad i = 8s + (j)_s; \\ f_1(j,7s) w_{(j+m+1)n+g(j)\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+g(j+s)}, \\ \qquad i = 2s + (j+1)_s + s f_0(j,7s); \\ -f_1(j,7s) e_{(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+g(j+s)+1}, \\ \qquad i = 6s + (j+1)_s + s f_0(j,7s); \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_5

$d_5 : Q_6 \to Q_5$ – матрица размера $(9s \times 8s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+1\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn}, \quad i = j; \\ w_{(j+m)n+3\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn}, \quad i = j+s; \\ (2f(j_1,0)-1)w_{(j+m+1)n-j_1\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+1+j_1}, \\ \qquad i = j+2s(1+j_1),\ 0 \leqslant j_1 < 2; \\ (2f(j_1,0)-1)w_{(j+m+1)n-j_1\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+3+j_1}, \\ \qquad i = j+2s(1+j_1)+s,\ 0 \leqslant j_1 < 2; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} w^{(1)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)}, \quad i = j+s; \\ -e_{(j+m+1)n+g(j+s)} \otimes w^{(3)}_{jn+g(j+s)\to}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s(1-f_0(j,2s)); \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} -w^{(3)}_{\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j+s)\to}, \quad i = j+s; \\ w^{(2)}_{\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)}, \quad i = j-s; \\ w^{(1)}_{\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w^{(3)}_{jn+g(j+s)\to}, \quad i = (j+1)_s + sf_0(j,4s); \\ -f_1(j,4s)e_{(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w^{(2)}_{jn+g(j+s)\to}, \quad i = (j)_{2s} + 6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} f_1(j,6s)e_{(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j+s)+1\to}, \quad i = j+s; \\ w^{(3)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, \quad i = j-s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m+1)n+1\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s; \\ w_{(j+m+1)n+3\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, & i = s+(j+1)_s; \\ -e_{(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+2}, & i = 4s+(j+1)_s; \\ -e_{(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+4}, & i = 5s+(j+1)_s; \\ w_{(j+m+1)n+2\to(j+m+1)n+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j-s; \\ -w_{(j+m+1)n+4\to(j+m+1)n+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m+1)n+2\to(j+m+2)n} \otimes e_{jn+5}, & i = j-2s; \\ -e_{(j+m+2)n} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+3}, & i = 3s+(j+1)_s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_6

$d_6 : Q_7 \to Q_6$ – матрица размера $(8s \times 9s)$.

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n\to(j+m)n+g(j)+1} \otimes e_{jn}, & i = (j)_s; \\ -w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m)n+g(j)+1} \otimes w_{jn\to jn+g(j)}, & i = j+s; \\ -e_{(j+m)n+g(j)+1} \otimes w_{jn\to jn+g(j+s)}, & i = (j+s)_{2s}+3s; \\ e_{(j+m)n+g(j)+1} \otimes w_{jn\to jn+g(j)+1}, & i = j+5s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j-s; \\ -w_{(j+m)n+g(j+s)+1\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j+s; \\ -w_{(j+m)n+g(j)+1\to(j+m)n+5} \otimes w_{jn+g(j)\to jn+g(j)+1}, & i = j+3s; \\ e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn+g(j)\to jn+5}, & i = (j)_s+7s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+g(j)+1\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j+s; \\ -f_1(j,5s)e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j)+1\to jn+5}, & i = (j)_s+8s; \\ e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn+4\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s,\ j \geqslant 5s; \\ -w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn+4\to jn+5}, & i = j+2s,\ j \geqslant 5s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n+1} \otimes e_{jn+5}, \quad i = j+s,\ j < 7s; \\ -w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+1} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, \quad i = (j+1)_s,\ j < 7s; \\ -f_1(j,7s) w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+5}, \quad i = (j)_s + 8s; \\ e_{(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+g(j)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s + s(1 - f_0(j,7s)); \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_7

$d_7 : Q_8 \to Q_7$ – матрица размера $(6s \times 8s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+2\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn}, \quad i = j; \\ -w_{(j+m)n+4\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn}, \quad i = j+s; \\ e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+1}, \quad i = j+2s; \\ -e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+3}, \quad i = j+3s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} -e_{(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w^{(3)}_{jn+g(j+s)\to}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s(1 - f_0(j,2s)); \\ w^{(3)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)}, \quad i = j+s; \\ w^{(2)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j+s)\to}, \quad i = j+3s; \\ -w^{(1)}_{\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w^{(2)}_{jn+g(j+s)\to}, \quad i = j+5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} w^{(1)}_{\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, \quad i = j+s; \\ e_{(j+m+1)n+g(j)} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j+s)+1\to}, \quad i = (j)_{2s} + 6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m+1)n+4\to(j+m+2)n} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, \ i = (j+1)_s + s; \\ -w_{(j+m+1)n+5\to(j+m+2)n} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+1}, \ i = (j+1)_s + 2s; \\ -e_{(j+m+2)n} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+2}, \ i = (j+1)_s + 4s; \\ -e_{(j+m+2)n} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+4}, \ i = (j+1)_s + 5s; \\ w_{(j+m+1)n+1\to(j+m+2)n} \otimes e_{jn+5}, \ i = j+s; \\ w_{(j+m+1)n+3\to(j+m+2)n} \otimes e_{jn+5}, \ i = j+2s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_8

$d_8 : Q_9 \to Q_8$ – матрица размера $(7s \times 6s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m-1)n+5\to(j+m)n+5} \otimes e_{jn}, \quad i = j; \\ -e_{(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to(j+1)n}, \quad i = (j+1)_s; \\ -w_{(j+m)n+2\to(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+1}, \quad i = j+s; \\ w_{(j+m)n+4\to(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+3}, \quad i = j+2s; \\ w_{(j+m)n+3\to(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+2}, \quad i = j+3s; \\ -w_{(j+m)n+1\to(j+m)n+5} \otimes w_{jn\to jn+4}, \quad i = j+4s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n}, \\ \quad i = (j+1)_s, \ j < 2s; \\ w_{(j+m)n+g(j+s)+1\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn+g(j+s)}, \ i = j; \\ -w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j+s)\to jn+g(j+s)+1}, \ i = j+2s; \\ e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn+g(j+s)\to jn+5}, \ i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} -w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j < 4s; \\ w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, \quad i = j; \\ -e_{(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n+g(j+s)+1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 3s + s(1 - f_0(j, 4s)); \\ -w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+g(j+s)+1\to jn+5}, \\ \qquad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+5}, \quad i = (j)_s + 5s; \\ w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j \geqslant 6s; \\ e_{(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+g(j+s)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s + s(1 - f_0(j, 6s)); \\ w_{(j+m+1)n+g(j+s)\to(j+m+1)n+g(j+s)+1} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+g(j)+1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 3s + sf_0(j, 6s); \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_9

$d_9 : Q_{10} \to Q_9$ – матрица размера $(6s \times 7s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn}, \quad i = j; \\ e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+1}, \quad i = j + s; \\ -e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+3}, \quad i = j + 2s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} w^{(1)}_{\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+g(j+s)}, \quad i = j; \\ e_{(j+m+1)n+g(j)} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j+s)\to}, \quad i = j + 2s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} w^{(1)}_{\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, & i = j; \\ e_{(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w^{(1)}_{jn+g(j+s)+1\to}, & i = (j)_{2s} + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} e_{(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s; \\ w_{(j+m+1)n+2\to(j+m+1)n+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j; \\ -w_{(j+m+1)n+4\to(j+m+1)n+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j + s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_{10}

$d_{10} : Q_{11} \to Q_{10}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} w_{(j+m)n\to(j+m+1)n} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ -e_{(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to(j+1)n}, & i = (j+1)_s; \\ -w_{(j+m)n+3\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+1}, & i = j + s; \\ w_{(j+m)n+1\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+3}, & i = j + 2s; \\ w_{(j+m)n+4\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+2}, & i = j + 3s; \\ -w_{(j+m)n+2\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+4}, & i = j + 4s; \\ w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n} \otimes w_{jn\to jn+5}, & i = j + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} f_1(j,2s) w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n}, \\ \qquad i = (j+1)_s; \\ w_{(j+m)n+g(j)\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+g(j+s)}, \quad i = j; \\ -e_{(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n+g(j+s)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s + s(1 - f_0(j,2s)); \\ -w_{(j+m)n+g(j)+1\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+g(j+s)\to jn+g(j+s)+1}, \\ \qquad i = j + 2s; \\ -f_1(j,2s) w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n+g(j)} \otimes w_{jn+g(j+s)\to jn+5}, \\ \qquad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} -f_1(j,4s)w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n}, \\ \qquad i = (j+1)_s; \\ w_{(j+m)n+g(j)+1\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, \quad i = j; \\ w_{(j+m+1)n+g(j)\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n+g(j+s)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s + s(1-f_0(j,4s)); \\ -e_{(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n+g(j+s)+1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 3s + s(1-f_0(j,4s)); \\ f_1(j,4s)w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n+g(j)+1} \otimes w_{jn+g(j+s)+1\to jn+5}, \\ \qquad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} -w_{(j+m+1)n\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n}, \; i = (j+1)_s; \\ w_{(j+m)n+5\to(j+m+1)n+5} \otimes e_{jn+5}, \; i = j; \\ w_{(j+m+1)n+3\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+1}, \; i = (j+1)_s + s; \\ -w_{(j+m+1)n+1\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+3}, \; i = (j+1)_s + 2s; \\ -w_{(j+m+1)n+4\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+2}, \; i = (j+1)_s + 3s; \\ w_{(j+m+1)n+2\to(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+4}, \; i = (j+1)_s + 4s; \\ -e_{(j+m+1)n+5} \otimes w_{jn+5\to(j+1)n+5}, \; i = (j+1)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть $R = R_s$ – алгебра типа E_6. Тогда минимальная проективная резольвента Λ-модуля R имеет вид:*

$$\ldots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0, \qquad (+)$$

где ε – отображение умножения ($\varepsilon(a \otimes b) = ab$); Q_r ($r \leqslant 10$) и d_r ($r \leqslant 10$) описаны выше; далее $Q_{11\ell+r}$, где $\ell \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant r \leqslant 10$, получается из Q_r заменой каждого прямого слагаемого $P_{i,j}$ на $P_{\sigma^\ell(i),j}$ соответственно (здесь $\sigma(i) = j$, если $\sigma(e_i) = e_j$), а дифференциал $d_{11\ell+r}$ получается из d_r применением σ^ℓ ко всем левым компонентам тензоров из соответствующей матрицы.

Для доказательства того, что члены резольвенты Q_i имеют указанный вид, введём $P_i = Re_i$ – проективные накрытия простых R-модулей S_i, соответствующих вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$. Найдём минимальные проективные резольвенты простых R-модулей S_i.

Обозначение. Для R-модуля M через $\Omega^m(M)$ обозначим его m-ю сизигию.

Замечание 5. В дальнейшем гомоморфизм умножения справа на путь w также обозначаем через w.

Лемма 4. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{rn} имеет вид*

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow P_{(r+3)n+5} &\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ -\beta\end{smallmatrix}\right)} P_{(r+3)n+2} \oplus P_{(r+3)n+4} \xrightarrow{(\alpha^2\ \beta^2)} \\ &\longrightarrow P_{(r+3)n} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha^2\\ \gamma\beta^2\end{smallmatrix}\right)} P_{(r+2)n+1} \oplus P_{(r+2)n+3} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\gamma & 0\\ -\alpha & \beta\end{smallmatrix}\right)} \\ &\longrightarrow P_{(r+1)n+5} \oplus P_{(r+2)n} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \gamma\alpha\\ -\beta & 0\end{smallmatrix}\right)} P_{(r+1)n+2} \oplus P_{(r+1)n+4} \xrightarrow{(\alpha^2\gamma\ \beta^2\gamma)} \\ &\longrightarrow P_{rn+5} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\ -\beta^2\end{smallmatrix}\right)} P_{rn+1} \oplus P_{rn+3} \xrightarrow{(\alpha\ \beta)} P_{rn} \longrightarrow S_{rn} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

При этом $\Omega^9(S_{rn}) \simeq S_{(r+4)n+5}$.

Лемма 5. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{rn+1} имеет вид*

$$\ldots \longrightarrow P_{rn+2} \xrightarrow{\alpha} P_{rn+1} \longrightarrow S_{rn+1} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{rn+1}) \simeq S_{(r+1)n+2}$.

Лемма 6. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{rn+2} имеет вид*

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow P_{(r+4)n+3} &\xrightarrow{\beta} P_{(r+4)n} \xrightarrow{\gamma\alpha} P_{(r+3)n+2} \xrightarrow{\alpha^2\gamma} P_{(r+2)n+5} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\ -\beta\end{smallmatrix}\right)} \\ &\longrightarrow P_{(r+2)n+1} \oplus P_{(r+2)n+4} \xrightarrow{(\alpha\ \beta^2)} P_{(r+2)n} \xrightarrow{\gamma\beta^2} \\ &\longrightarrow P_{(r+1)n+3} \xrightarrow{\beta\gamma} P_{rn+5} \xrightarrow{\alpha} P_{rn+2} \longrightarrow S_{rn+2} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

При этом $\Omega^9(S_{rn+2}) \simeq S_{(r+5)n+3}$.

Лемма 7. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{rn+3} имеет вид*

$$\ldots \longrightarrow P_{rn+4} \xrightarrow{\beta} P_{rn+3} \longrightarrow S_{rn+3} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{rn+3}) \simeq S_{(r+1)n+4}$.

Лемма 8. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{rn+4} *имеет вид*

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow P_{(r+4)n+1} \xrightarrow{\alpha} P_{(r+4)n} \xrightarrow{\gamma\beta} P_{(r+3)n+4} \xrightarrow{\beta^2\gamma} P_{(r+2)n+5} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ -\beta^2\end{smallmatrix}\right)} \\ \longrightarrow P_{(r+2)n+2} \oplus P_{(r+2)n+3} \xrightarrow{(\alpha^2\ \beta)} P_{(r+2)n} \xrightarrow{\gamma\alpha^2} \\ \longrightarrow P_{(r+1)n+1} \xrightarrow{\alpha\gamma} P_{rn+5} \xrightarrow{\beta} P_{rn+4} \longrightarrow S_{rn+4} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

При этом $\Omega^9(S_{rn+4}) \simeq S_{(r+5)n+1}$.

Лемма 9. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{rn+5} *имеет вид*

$$\ldots \longrightarrow P_{(r+1)n} \xrightarrow{\gamma} P_{rn+5} \longrightarrow S_{rn+5} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{rn+5}) \simeq S_{(r+2)n}$.

Доказательство. Доказательства лемм состоят из прямой проверки точности указанных последовательностей и не представляют труда. $\square$

Нам потребуется лемма Хаппеля (см. [12]), уточнённая в [3]:

Лемма 10 (Хаппеля). *Пусть*

$$\cdots \to Q_m \to Q_{m-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to R \to 0$$

– минимальная проективная бимодульная резольвента R. *Тогда*

$$Q_m \cong \bigoplus_{i,j} P_{i,j}^{\dim \operatorname{Ext}_R^m(S_j,S_i)}.$$

Доказательство теоремы 3. То, что элементы Q_i имеют указанный вид, непосредственно следует из лемм 4 – 9 и леммы Хаппеля.

Как доказано в [13], для доказательства точности последовательности (+) в членах Q_m ($m \leqslant 11$) достаточно показать, что $d_m d_{m+1} = 0$. Это соотношение проверяется прямыми вычислениями произведений соответствующих матриц.

Из точности в члене Q_{11} следует, что $\Omega^{11}({}_\Lambda R) \simeq {}_1R_\sigma$, где $\Omega^{11}({}_\Lambda R) = \operatorname{Im} d_{10}$ – 11-я сизигия модуля R, а ${}_1R_\sigma$ – скрученный бимодуль. Следовательно, в членах Q_t ($t > 11$) точность также имеет место. $\square$

Напомним, что для R-бимодуля M *скрученным бимодулем* называется линейное пространство M, на котором левое и правое действия алгебры R (обозначаемые звездочкой) заданы следующим образом:

$$r * m * s = \lambda(r) \cdot m \cdot \mu(s) \text{ для } r, s \in R \text{ и } m \in M,$$

где λ, μ – некоторые автоморфизмы алгебры R. Такой скрученный бимодуль обозначаем через ${}_\lambda M_\mu$.

Следствие 11. *Имеет место изоморфизм* $\Omega^{11}({}_\Lambda R) \simeq {}_1 R_\sigma$.

Предложение 12. *Автоморфизм* σ *имеет конечный порядок, причём*

(1) *если* $\operatorname{char} K = 2$, *то порядок* σ *равен* $2s/\text{НОД}(2n, s)$*;*

(2) *если* $\operatorname{char} K \neq 2$, *то порядок* σ *равен* $2s/\text{НОД}(2n, s)$, *если* $s/\text{НОД}(n, s)$ *делится на* 4, *и* $4s/\text{НОД}(2n, s)$ *в противном случае.*

Предложение 13. *Минимальный период бимодульной резольвенты* R *равен* $22s/\text{НОД}(2n, s)$.

Доказательство. Поскольку $\Omega^{11}({}_\Lambda R) \simeq {}_1 R_\sigma$, то период равен $11a$. Имеет место изоморфизм $\sigma^a(Q_0) \simeq Q_0$, т. е. σ^a должен действовать тождественно на идемпотентах. Следовательно, если $\operatorname{char} K = 2$, то $a = \deg \sigma$. Для $\operatorname{char} K \neq 2$ нам надо показать, что $a = \deg \sigma/2$, если $s/\text{НОД}(n, s)$ не делится на 4. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{char} K \neq 2$, $s/\text{НОД}(n, s)$ не делится на 4. Обозначим через $b = \deg \sigma/2$. Имеем $\sigma^b(e_i) = e_i$, $\sigma^b(\gamma_i) = \gamma_i$,

$$\sigma^b(\alpha_i) = \begin{cases} -\alpha_i, & i \equiv 0, 2(3); \\ \alpha_i, & i \equiv 1(3), \end{cases} \qquad \sigma^b(\beta_i) = \begin{cases} -\beta_i, & i \equiv 0, 2(3); \\ \beta_i, & i \equiv 1(3). \end{cases}$$

Введём элемент

$$x = \sum_{i=0}^{s-1} e_{6i+1} + e_{6i+2} + e_{6i+3} + e_{6i+4} - e_{6i} - e_{6i+5}.$$

Имеем: $x^{-1} = x$, $\sigma^b(w) = xwx^{-1}$, для любого пути w, т. е. σ^b – внутренний автоморфизм, следовательно, $11b$ является периодом бимодульной резольвенты. $\square$

§4. Аддитивная структура алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Предложение 14 (Размерности групп гомоморфизмов, $s > 1$)**.** *Пусть* $s > 1$ *и* $R = R_s$ *– алгебра типа* E_6. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 11.

(1) *Если* $r = 0$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 6s, & \ell n + m \equiv 0(s) \text{ или } \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \mid \ell; \\ 2s, & \ell n + m \equiv 0(s) \text{ или } \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если* $r = 1$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ 5s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если* $r \in \{2, 8\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 3s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ s, & \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \mid \ell; \\ 3s, & \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4) *Если* $r \in \{3, 5, 7\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 8s, & \ell n + m \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) *Если* $r = 4$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 2s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ 6s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 5s, & \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \mid \ell; \\ 7s, & \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(6) *Если* $r = 6$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ 5s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 6s, & \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \mid \ell; \\ 2s, & \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) *Если* $r = 9$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 5s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ 7s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8) *Если* $r = 10$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 2s, & \ell n + m \equiv 0(s) \textit{ или } \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \mid \ell; \\ 6s, & \ell n + m \equiv 0(s) \textit{ или } \ell n + m \equiv 1(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Размерность $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{i,j}, R)$ равна количеству линейно независимых ненулевых путей колчана $\mathcal{Q}_s$, ведущих из j-ой вершины в i-ую, и доказательство состоит в последовательном рассмотрении случаев $r = 0$, $r = 1$ и т. д. □

Предложение 15 (Размерности групп гомоморфизмов, $s=1$). *Пусть* $R = R_1$ *– алгебра типа* E_6. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 11.

(1) *Если* $r = 0$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 12, & 2 \mid \ell; \\ 4, & 2 \nmid \ell. \end{cases}$$

(2) *Если* $r = 1$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7, & 2 \mid \ell; \\ 5, & 2 \nmid \ell. \end{cases}$$

(3) *Если* $r \in \{2, 8\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 4$.

(4) *Если* $r \in \{3, 5, 7\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 8$.

(5) *Если* $r = 4$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7, & 2 \mid \ell; \\ 13, & 2 \nmid \ell. \end{cases}$$

(6) *Если* $r = 6$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 13, & 2 \mid \ell; \\ 7, & 2 \nmid \ell. \end{cases}$$

(7) *Если* $r = 9$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 5, & 2|l; \\ 2 \nmid \ell. & \end{cases}$$

(8) *Если* $r = 10$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 4, & 2 \mid \ell; \\ 12, & 2 \nmid \ell. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 14. □

Предложение 16 (Размерности групп кограниц). *Пусть* $R = R_s$ – *алгебра типа* E_6, *и пусть*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \xrightarrow{\delta^0} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \xrightarrow{\delta^1} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \xrightarrow{\delta^2} \dots \qquad (\times)$$

комплекс, полученный применением функтора $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, R)$ *к минимальной проективной бимодульной резольвенте* $(+)$ *алгебры* R.

Рассмотрим группы кограниц $\mathrm{Im}\delta^t$ *комплекса* $(\times)$. *Пусть* ℓ – *целая часть, а* r – *остаток от деления* t *на* 11, m – *целая часть от деления* r *на* 2. *Тогда*:

(1) *Если* $r = 0$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 6s - 1, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ 2s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если* $r = 1$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ 3s - 1, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если* $r = 2$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 3s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4) *Если* $r=3$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 5s-1, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell,\ \mathrm{char}\,K=2; \\ 5s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell,\ \mathrm{char}\,K\neq 2; \\ 7s-1, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) *Если* $r=4$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 2s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell; \\ 6s-1, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell,\ \mathrm{char}\,K=3; \\ 6s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell,\ \mathrm{char}\,K\neq 3; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(6) *Если* $r=5$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 6s-1, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell,\ \mathrm{char}\,K=3; \\ 6s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell,\ \mathrm{char}\,K\neq 3; \\ 2s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) *Если* $r=6$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 7s-1, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell; \\ 5s-1, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell,\ \mathrm{char}\,K=2; \\ 5s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell,\ \mathrm{char}\,K\neq 2; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8) *Если* $r=7$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell; \\ 3s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(9) *Если* $r=8$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 3s-1, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\,|\,\ell; \\ s, & \ell n+m\equiv 0(s),\ 2\nmid \ell; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) *Если* $r = 9$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 2s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \mid \ell; \\ 6s-1, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell; \\ 0, & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

(11) *Если* $r = 10$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 2s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2|l; \\ 6s-1, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell,\ \mathrm{char}\, K = 3; \\ 6s, & \ell n + m \equiv 0(s),\ 2 \nmid \ell,\ \mathrm{char}\, K \neq 3; \\ 0, & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство техническое и состоит в построении матриц образа, исходя из описания матриц дифференциалов, и последующем вычислении ранга матрицы образа. □

Теорема 17 (Аддитивная структура, $s > 1$)**.** *Пусть* $s > 1$ *и* $R = R_s$ *– алгебра типа* E_6*. Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,* ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 11*,* m *– целая часть от деления* r *на* 2*. Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$*, если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $r \in \{0, 6, 7, 8\}$, $\ell n + m \equiv 0(s)$, $2 \mid \ell$;
(2) $r \in \{0, 6\}$, $\ell n + m \equiv 1(s)$, $2 \mid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 3$;
(3) $r \in \{1, 9\}$, $\ell n + m \equiv 0(s)$;
(4) $r \in \{2, 4, 10\}$, $\ell n + m \equiv 1(s)$, $2 \nmid \ell$;
(5) $r = 3$, $\ell n + m \equiv 0(s)$, $2 \mid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 2$;
(6) $r = 3$, $\ell n + m \equiv 0(s)$, $2 \nmid \ell$;
(7) $r \in \{4, 10\}$, $\ell n + m \equiv 0(s)$, $2 \nmid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 3$;
(8) $r = 4$, $\ell n + m \equiv 1(s)$, $2 \mid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 2$;
(9) $r = 5$, $\ell n + m \equiv 0(s)$, $\mathrm{char}\, K = 3$;
(10) $r \in \{6, 7\}$, $\ell n + m \equiv 0(s)$, $2 \nmid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 2$.

Во всех остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

Доказательство. Так как $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\delta^t - \dim_K \mathrm{Im}\delta^{t-1}$, а $\dim_K \mathrm{Ker}\delta^t = \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) - \dim_K \mathrm{Im}\delta^t$, утверждения теоремы легко выводится из предложений 14 – 16. □

Теорема 18 (Аддитивная структура, $s = 1$)**.** *Пусть* $R = R_1$ *– алгебра типа* E_6*. Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,* ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 11*.*

(*а*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 7$, *если* $t = 0$.
(*б*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 2$, *если выполнено одно из следующих условий*:
(1) $r \in \{0, 6\}$, $t > 0$, $2 \mid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 3$*;*
(2) $r \in \{4, 10\}$, $2 \nmid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 3$.
(*в*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$, *если выполнено одно из следующих условий*:
(1) $r \in \{0, 6\}$, $t > 0$, $2 \mid \ell$, $\mathrm{char}\, K \neq 3$*;*
(2) $r \in \{1, 9\}$*;*
(3) $r \in \{2, 3\}$, $2 \nmid \ell$*;*
(4) $r \in \{3, 4\}$, $2 \mid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 2$*;*
(5) $r \in \{4, 10\}$, $2 \nmid \ell$, $\mathrm{char}\, K \neq 3$*;*
(6) $r = 5$, $\mathrm{char}\, K = 3$*;*
(7) $r \in \{6, 7\}$, $2 \nmid \ell$, $\mathrm{char}\, K = 2$*;*
(8) $r \in \{7, 8\}$, $2 \mid \ell$.
(*г*) *Во всех остальных случаях* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

§5. Образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Для $s > 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}$, $Y_t^{(2)}$, $\ldots Y_t^{(22)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 11 \deg \sigma$ и t удовлетворяет условиям для произвольной степени t (см. §2). Для $s = 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}$, $Y_t^{(2)}$, $\ldots Y_t^{(28)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 11 \deg \sigma$ и t удовлетворяет условиям для произвольной степени t (см. §2). Опишем покомпонентно матрицы элементов $Y_t^{(i)}$.

Обозначение. Для степени t элемента из множества образующих представим t в виде $t = 11\ell + r$ $(0 \leqslant r \leqslant 10)$ и обозначим через $\kappa = (-1)^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor}$.

(1) $Y_t^{(1)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa e_{jn} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{jn+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{jn+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa e_{jn+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) $Y_t^{(2)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{3s,3s} = w_{jn+g(j+s)+1 \to (j+1)n+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}.$$

(3) $Y_t^{(3)}$ – матрица размера $(7s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{5s,6s} = \kappa w_{jn+5 \to (j+1)n} \otimes e_{jn+5}.$$

(4) $Y_t^{(4)}$ – матрица размера $(7s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{jn \to jn+g(j+s)} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa w_{jn+g(j)+1 \to jn+5} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

(5) $Y_t^{(5)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{3s,3s} = w_{jn+g(j+s)+1 \to (j+1)n+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}.$$

(6) $Y_t^{(6)}$ – матрица размера $(8s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn \to jn+g(j)+1} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn \to jn+g(j)+1} \otimes e_{jn}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn+g(j)+1 \to (j+1)n} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn+5 \to (j+1)n+g(j)} \otimes e_{jn+5}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

(7) $Y_t^{(7)}$ – матрица размера $(8s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn \to jn+g(j+s)+1} \otimes e_{jn}, & i = (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa w_{jn+g(j) \to jn+5} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa w_{jn+g(j)+1 \to (j+1)n} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

(8) $Y_t^{(8)}$ – матрица размера $(9s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{3s,6s} = w_{jn+g(j)+1 \to (j+1)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+g(j)+1}.$$

(9) $Y_t^{(9)}$ – матрица размера $(9s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa e_{jn} \otimes e_{jn}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{jn+g(j)} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{jn+g(j)+1} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa e_{jn+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) $Y_t^{(10)}$ – матрица размера $(9s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{5s,8s} = w_{jn+5\to(j+1)n+5} \otimes e_{jn+5}.$$

(11) $Y_t^{(11)}$ – матрица размера $(8s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn\to jn+g(j)} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa w_{jn+g(j)\to(j+1)n} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa w_{jn+g(j)+1\to jn+5} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn+5\to(j+1)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+5}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

(12) $Y_t^{(12)}$ – матрица размера $(8s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{jn\to jn+g(j+s)} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa w_{jn+g(j)+1\to jn+5} \otimes e_{jn+g(j)+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

(13) $Y_t^{(13)}$ – матрица размера $(9s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -f_1(j, 2s) e_{jn+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -f_1(j, 6s) e_{jn+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa w_{jn+5\to(j+1)n} \otimes e_{jn+5}, & i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(14) $Y_t^{(14)}$ – матрица размера $(9s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = \kappa w_{jn\to(j+1)n} \otimes e_{jn}.$$

(15) $Y_t^{(15)}$ – матрица размера $(9s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{jn} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn+g(j+s) \to jn+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{jn+5} \otimes e_{jn+5}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

(16) $Y_t^{(16)}$ – матрица размера $(8s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $j = 0$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn \to jn+g(j)+1} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $0 < j < 2s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $j = 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa w_{jn+g(j) \to jn+5} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s < j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

(17) $Y_t^{(17)}$ – матрица размера $(8s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $j = 0$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn \to jn+g(j+s)+1} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $0 < j < 2s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $j = 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn+g(j)\to jn+5} \otimes e_{jn+g(j)}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s < j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

(18) $Y_t^{(18)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{jn+g(j+s)\to jn+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa w_{jn+5\to(j+1)n} \otimes e_{jn+5}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(19) $Y_t^{(19)}$ – матрица размера $(7s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $j = s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s < j < 2s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $j = 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s < j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

(20) $Y_t^{(20)}$ – матрица размера $(7s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa w_{jn\to jn+5} \otimes e_{jn}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{jn+5\to(j+1)n+g(j)+1} \otimes e_{jn+5}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(21) $Y_t^{(21)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = -\kappa w_{jn\to(j+1)n} \otimes e_{jn}.$$

(22) $Y_t^{(22)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} f_1(j, 2s) e_{jn+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} f_1(j, 4s) e_{jn+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

(23) $Y_t^{(23)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{3s,3s} = w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}.$$

(24) $Y_t^{(24)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = w_{jn\to(j+1)n} \otimes e_{jn}.$$

(25) $Y_t^{(25)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{s,s} = w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)}.$$

(26) $Y_t^{(26)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{2s,2s} = -w_{jn+g(j+s)\to(j+1)n+g(j+s)} \otimes e_{jn+g(j+s)}.$$

(27) $Y_t^{(27)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{4s,4s} = -w_{jn+g(j+s)+1\to(j+1)n+g(j+s)+1} \otimes e_{jn+g(j+s)+1}.$$

(28) $Y_t^{(28)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{5s,5s} = w_{jn+5\to(j+1)n+5} \otimes e_{jn+5}.$$

§6. Произведения в $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры R, построенная в параграфе 3. Любой коцикл $f \in \mathrm{Ker}\delta^s$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i : Q_{s+i} \to Q_i\}_{i\geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовём *i-м сдвигом* коцикла f и будем обозначать через $\Omega^i(f)$. Для коциклов $f_1 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_1}$ и $f_2 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_2}$ имеем

$$\mathrm{cl} f_2 \cdot \mathrm{cl} f_1 = \mathrm{cl}(\Omega^0(f_2)\Omega^{s_2}(f_1)). \qquad (*)$$

Описания Ω-сдвигов образующих элементов $Y_t^{(i)}$ громоздкие и не включены в данную статью. С ними можно ознакомиться в препринте [14]. Из описания элементов $Y_t^{(i)}$ и их Ω-сдвигов мы можем найти произведения элементов, пользуясь формулой $(*)$. Произведения всех элементов, кроме $Y^{(5)}$, $Y^{(10)}$, $Y^{(17)}$, $Y^{(19)}$ и $Y^{(21)}$, находятся путём прямых вычислений (более подробно см. [14]). Завершает описание произведений следующая лемма.

Лемма 19.

(*a*) *Пусть $Y^{(5)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(4)}$ такие, что $Y^{(5)} = Y^{(3)}Y^{(4)}$.*

(б) Пусть $Y^{(10)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(6)}$ такие, что $Y^{(10)} = Y^{(3)}Y^{(6)}$.

(в) Пусть $Y^{(17)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(15)}$ такие, что $Y^{(17)} = Y^{(3)}Y^{(15)}$.

(г) Пусть $Y^{(19)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(18)}$ такие, что $Y^{(19)} = Y^{(3)}Y^{(18)}$.

(д) Пусть $Y^{(21)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(20)}$ такие, что $Y^{(21)} = Y^{(3)}Y^{(20)}$.

Доказательство. Степень 1 есть степень типа 3, для любого s. Остается использовать соотношения для типа (3). □

Литература

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv., **55** (1980), 199–224.
2. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math., **11** (1999) 177–201.
3. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
4. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
5. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 210–246.
6. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.
7. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 100–128.
9. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
10. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 100–118.
11. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 140–173.
12. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math., **1404** (1989), 108–126.

13. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.
14. M. Pustovykh, *Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_6.* — http://arxiv.org/abs/1311.4756

Pustovykh M. A. Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_6.

The Hochschild cohomology ring are described for algebras from one of the two families of self-injective algebras of tree class E_6. The description is given in terms of generators and relations.

ООО "Артфон"
ул. Красная, 11
г. Гатчина,
188300 Ленинградская обл.,
Россия
E-mail: mashakachalova@mail.ru

Поступило 20 февраля 2014 г.