Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

И. М. Певзнер

ШИРИНА ГРУППЫ $\mathrm{GL}(6,K)$ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА КВАЗИКОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

Напомним, что ширина группы G относительно множества образующих S – это либо минимальное натуральное число n, такое, что любой элемент группы G представляется в виде произведения не более чем n элементов из S, либо ∞, если такого n не существует. Это определение иногда обобщают, говоря про ширину группы G относительно произвольного множества $S \subset G$. В этом случае шириной G относительно S называется ширина группы $\langle S \rangle$ относительно S. При изучении в работе автора [12] ширины группы $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ относительно множества корневых элементов этой группы возник вопрос о ширине ее подгруппы, изоморфной $\mathrm{GL}(6,K)$, относительно множества "образов" корневых элементов группы $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ (в настоящей работе эти "образы" называются квазикорневыми элементами). В [12] было доказано, что эта ширина не превосходит четырех. В настоящей работе полностью описана структура группы $\mathrm{GL}(6,K)$ относительно множества квазикорневых элементов над полем K, в котором любой многочлен степени не выше шестой имеет корень.

Точнее, будем называть матрицу $A \in \mathrm{GL}(6,K)$ квазикорневой, если она сопряжена одной из матриц

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

Ключевые слова: полная линейная группа, ширина группы, корневые элементы.
Настоящая работа выполнена при содействии проектов РФФИ 11-01-00811-а, 12-01-00947-а, 14-01-00820-а, а также РГПУ им. А. И. Герцена.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы, только без условия обратимости, возникали и активно использовались в работе [12] как подматрицы корневых и унипотентных элементов. А именно, в ней рассматривались подматрицы размером 6×6, расположенные в левом верхнем и правом нижнем углах матрицы корневого элемента из $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, а также подматрица размером 6×6, расположенная в правом верхнем углу унипотентного элемента из U_2, и доказывалось, что они сопряжены матрице

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & kx & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & ky & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & kz \\ yz & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & xy & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

для некоторых $a, b, k, x, y, z \in K$. В работе [12] они назывались матрицами вида †. Если в поле K каждый квадратный многочлен имеет корень, то обратимые матрицы вида † – это в точности квазикорневые матрицы. Также стоит отметить, что любой корневой элемент из $\mathrm{GL}(6, K)$ также является квазикорневым, поэтому название “квазикорневой” для таких элементов выглядит вполне оправданным.

Тогда основной результат настоящей работы выглядит следующим образом.

Основная теорема. *Пусть в поле K любой непостоянный многочлен степени не выше шестой имеет корень. Тогда любая матрица $A \in \mathrm{GL}(6, K)$ есть произведение трех квазикорневых элементов. Матрица A есть произведение двух квазикорневых элементов тогда и только тогда, когда ее собственные числа могут быть разбиты на пары таким образом, чтобы произведения чисел в каждой паре были* *равны, и ее жорданова форма отлична от*

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

для всех $a \neq b$.

Изучению ширины групп относительно того или иного множества образующих посвящены тысячи работ. Прежде всего, это статьи про ширину групп относительно множества коммутаторов и множества инволюций. Даже работ, посвященных изучению ширины полной и специальной линейных групп, о которых идет речь в настоящей работе, существуют многие десятки; некоторые из них упомянуты в списке литературы настоящей работы. Для групп Шевалле естественным множеством образующих является также множество корневых элементов. В работе Дьедонне [21] найдена ширина классических групп в корневых элементах. Позднее результаты Дьедонне были расширены на группы, сохраняющие квадратичную форму с ненулевым радикалом. Более подробно вопросы, связанные с историей изучения ширины различных групп в тех или иных образующих, освещены в [12].

В отличие от классического случая, про ширину в корневых элементах исключительных групп до недавнего времени ничего, кроме естественных оценок снизу, известно не было. А именно, исследуя вычеты матриц, несложно убедиться, что ширина группы $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ не может быть меньше 5. Не так давно Коэн, Штайнбах, Усиробира и Уэльс [19] доказали, что $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ порождается некоторыми пятью корневыми подгруппами. Из этого можно вывести, что ширина группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ не больше 10. В работе [12] автор доказывает, что ширина группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ над полем, в котором любой непостоянный многочлен степени не выше шестой имеет корень, не больше 8. В ее продолжении [13] эта оценка улучшается до 7. Стоит отметить, что из результата настоящей статьи и работы [12] оценка 7 получается сразу же.

Настоящая работа устроена следующим образом. В первом параграфе вводятся основные определения и обозначения. Во втором параграфе доказывается, что собственные числа произведения двух квазикорневых матриц могут быть разбиты на пары таким образом, чтобы произведения чисел в каждой паре были равны. Также во втором параграфе доказывается следующее предложение, любопытное и само по себе.

Предложение. *Пусть в поле K любой непостоянный многочлен степени не выше $2n$ имеет корень, V – $2n$-мерное пространство над K, а V_1, V_2, V_3 и V_4 – n-мерные подпространства в V. Тогда существует двумерное подпространство W, пересекающееся с каждым из V_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, не по нулю.*

В третьем параграфе доказывается, что матрица

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

при $a \neq b$ не является произведением двух квазикорневых элементов. В четвертом параграфе доказывается, что все остальные матрицы, собственные числа которых могут быть разбиты на пары таким образом, чтобы произведения чисел в каждой паре были равны, являются произведением двух квазикорневых элементов. Наконец, в пятом параграфе доказывается, что любая матрица $A \in \mathrm{GL}(6, K)$ есть произведение трех квазикорневых элементов.

§1. Основные определения и обозначения

В настоящей статье нам придется много работать с матрицами и их жордановыми формами. Для краткости, будем обозначать через $D(B_1, \ldots, B_k)$ блочно-диагональную матрицу с блоками $B_1, \ldots, B_k$;

жордановы блоки мы будем обозначать как $(a, \dots, a)$, где a – соответствующее собственное число, а их количество – размер клетки. Например, запись $D(a, a, (b, b), b)$ обозначает матрицу

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Большинство последующих теорем использует в доказательстве, а иногда и в формулировке, собственные числа, собственные векторы и даже жордановы формы матриц. Это накладывает, к сожалению, естественные ограничения на поле K. Нам заведомо, разумеется, подойдет любое алгебраически замкнутое поле, однако это условие можно несколько ослабить. А именно, дадим следующее определение (к сожалению, автору не удалось найти в литературе общеупотребительный термин для таких полей).

Определение 1. *Поле называется k-замкнутым, если в нем любой непостоянный многочлен степени не выше k имеет корень.*

В дальнейшем у нас будут встречаться 2-замкнутые и 6-замкнутые поля. Очевидно, что если $k < n$, то n-замкнутое поле будет и k-замкнутым. Также несложно видеть, что k-замкнутое поле (при $k > 1$) является бесконечным. Алгебраическое замыкание поля K обозначается в дальнейшем тексте через $\overline{K}$.

Наконец, повторим в менее громоздком виде определение, уже формулировавшееся в вводной части.

Определение 2. *Матрицы из $\mathrm{GL}(6, K)$, имеющие жорданову форму $D(a, a, a, b, b, b)$ для некоторых $a \neq b$, $D((a, a), (a, a), (a, a))$, $D((a, a), a, a, a, a)$ или $D(a, a, a, a, a, a)$, будем называть квазикорневыми.*

§2. Произведение двух квазикорневых матриц: необходимое условие

Пусть K, если не оговорено противное, произвольное поле.

Определение 3. *Матрица $A \in \mathrm{GL}(2n, K)$ будет называться $2n$-хорошей, если выполняется одно из следующих условий.*

(1) *Матрица A имеет жорданову форму* $D(\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{n},\underbrace{a_2,\dots,a_2}_{n})$ *при* $a_1 \neq a_2 \in \overline{K}$.
(2) *Матрица A имеет собственное число $a \in \overline{K}$ кратности $2n$, и все ее жордановы клетки имеют размер не больший двух.*

Если выполняется первый случай, будем говорить про $2n$-хорошие матрицы первого типа, если второй – второго типа. Если размер матрицы заранее известен или не важен, мы будем говорить просто про хорошие матрицы. Понятно, что любая квазикорневая матрица является хорошей.

Утверждение 1. *Пусть V – произвольное конечномерное векторное пространство и $A, B \in \mathrm{GL}(V, K)$ – произвольные обратимые матрицы.*

(1) *Если A является хорошей матрицей, то $A^2x \in \langle x, Ax\rangle$ для любого вектора $x \in V$.*
(2) *Если $A^2x \in \langle x, Ax\rangle$, то подпространство $\langle x, Ax\rangle$ является инвариантным для A.*
(3) *Пусть A и B – две хорошие матрицы, а $v \in V$ – собственный вектор матрицы AB. Тогда подпространство $\langle v, Av\rangle = \langle v, Bv\rangle$ является инвариантным для A, B и AB.*

Доказательство. Первый пункт утверждения легко проверяется по определению, второй пункт очевиден. Докажем третий пункт. По второму пункту подпространство $\langle v, Bv\rangle$ инвариантно для матрицы B. Поскольку вектор v собственный для матрицы AB, то вектор ABv кратен v. Поэтому $\langle v, Bv\rangle = \langle Bv, ABv\rangle$. Снова используя предыдущее утверждение, получаем, что $\langle v, Bv\rangle$ инвариантно для матрицы A. Поэтому $Av \in \langle v, Bv\rangle$ и $\langle v, Av\rangle \subset \langle v, Bv\rangle$. Если $\dim\langle v, Av\rangle = 2$, то $\langle v, Av\rangle = \langle v, Bv\rangle$ по размерности. Пусть $\dim\langle v, Av\rangle = 1$, то есть Av кратно v. Тогда, поскольку ABv кратно v и матрица A обратима, мы получаем что Bv также кратно v, поэтому $\langle v, Av\rangle = \langle v, Bv\rangle$ в обоих случаях. Осталось заметить, что если подпространство $\langle v, Av\rangle = \langle v, Bv\rangle$ инвариантно для матриц A и B, то оно инвариантно и для их произведения AB. □

Лемма 1. *Пусть V – $2n$-мерное пространство над полем K, $x \in V$ – некоторый вектор, а $V_1, V_2 \subset V$ – два n-мерных подпространства.*

Тогда существует двумерное подпространство W, содержащее вектор x и пересекающееся с V_1 и V_2 не по нулю.

Доказательство. Если вектор x принадлежит одному из подпространств, утверждение леммы становится очевидным. Пусть $x \notin V_1$ и $x \notin V_2$. Тогда размерность подпространства $\langle x, V_1 \rangle$ равна $n+1$. По условию, размерность V равна $2n$, а размерность V_2 равна n, поэтому подпространства $\langle x, V_1 \rangle$ и V_2 пересекаются. Пусть $y \in \langle x, V_1 \rangle \cap V_2$. Отметим, что y не кратен x, поскольку $x \notin V_2$. Тогда подпространство $W = \langle x, y \rangle$, как можно видеть, удовлетворяет условию. $\square$

Предложение 1. *Пусть K – $2n$-замкнутое поле, V – $2n$-мерное пространство над полем K, $A, B \in \mathrm{GL}(V)$ – две хорошие матрицы, а $x \in V$ – собственный вектор матрицы AB. Тогда существует инвариантное для матриц A и B двумерное подпространство W, содержащее x, причем $A|_{V/W}$ и $B|_{V/W}$ хорошие и:*

a) *если матрицы A и B первого типа с собственными числами a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно, то $\det(A|_W) = a_1 a_2$ и $\det(B|_W) = b_1 b_2$;*
b) *если матрица A первого типа с собственными числами a_1, a_2, а матрица B второго типа с собственным числом b, то $\det(A|_W) = a_1 a_2$ и $\det(B|_W) = b^2$;*
c) *если матрица A второго типа с собственным числом a, а матрица B первого типа с собственными числами b_1, b_2, то $\det(A|_W) = a^2$ и $\det(B|_W) = b_1 b_2$;*
d) *если матрицы A и B второго типа с собственными числами a и b соответственно, то $\det(A|_W) = a^2$ и $\det(B|_W) = b^2$.*

Доказательство. 1. Пусть вектор x не является собственным для матриц A и B. Тогда можно положить $W = \langle x, Bx \rangle = \langle x, Ax \rangle$. Это подпространство инвариантно для матриц A и B по утверждению 1.

Пусть матрица $A \sim D(\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{n}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{n})$, $a_1 \neq a_2$. Тогда, поскольку вектор x не является собственным, $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \neq 0$ – собственный вектор для собственного числа a_1, а $x_2 \neq 0$ – для a_2. Поэтому $Ax = a_1 x_1 + a_2 x_2$, откуда $x_1 = \frac{1}{a_1 - a_2}(Ax - a_2 x) \in W$ и $x_2 = x - x_1 \in W$. Таким образом, матрица $A|_W$ имеет собственные векторы для собственных чисел a_1 и a_2. Следовательно, $\det(A|_W) = a_1 a_2$ и матрица $A|_{V/W}$ хорошая.

Пусть матрица A имеет собственное число a кратности $2n$ и все ее жордановы клетки имеют размер не больший двух. Тогда, поскольку вектор x не является собственным, вектор $y = Ax - ax \in W$ не равен нулю и является собственным для собственного числа a. Поэтому $\det(A|_W) = a^2$ и матрица $A|_{V/W}$ хорошая. Для матрицы B рассуждения аналогичные.

2. Пусть вектор x является собственным для матриц A и B. Докажем пункт a). Пусть вектор x является собственным вектором матрицы A для собственного числа a_1 и собственным вектором матрицы B для собственного числа b_1. Рассмотрим собственное подпространство V_1 для собственного числа a_2 матрицы A и собственное подпространство V_2 для собственного числа b_2 матрицы B. Эти подпространства имеют размерность n, поэтому можно применить лемму 1. Рассмотрим подпространство W из леммы 1. По его выбору, матрица $A|_W$ имеет собственные векторы для собственных чисел a_1 и a_2, поэтому подпространство W инвариантное для матрицы A. Следовательно, $\det(A|_W) = a_1 a_2$ и матрица $A|_{V/W}$ хорошая. Для матрицы B рассуждения аналогичные.

Докажем пункт b). Пусть вектор x является собственным вектором матрицы A для собственного числа a_1, а V_1 – собственное подпространство для собственного числа a_2 матрицы A. Рассмотрим множество $V_2' = \{v \in V; Bv - bv = \alpha x, \alpha \in K\}$. Оно, очевидно, является подпространством, причем содержащим все собственные векторы матрицы B. Докажем, что его размерность не меньше $n+1$. Размерность собственного подпространства матрицы B для собственного числа b не меньше n. Если она больше n, то размерность V_2' тем более больше n. Если же она равна n, то жорданова форма матрицы B имеет вид $D(\underbrace{(b,b),\ldots,(b,b)}_{n})$. Тогда существует вектор $v \in V_2'$, такой что $Bv - bv = x$, то есть подпространство V_2' будет больше собственного подпространства. Поэтому $\dim(V_2') \geqslant n+1$. Осталось заметить, что подпространство V_1, как и в прошлом случае, имеет размерность n, поэтому $V_1 \cap V_2' \neq 0$. Если $y \in V_1 \cap V_2'$, то можно положить $W = \langle x, y\rangle$. Как и в предыдущем случае, матрица $A|_W$ имеет собственные векторы для собственных чисел a_1 и a_2, поэтому подпространство W инвариантное для матрицы A. Следовательно, $\det(A|_W) = a_1 a_2$ и матрица $A|_{V/W}$ хорошая. Поскольку $y \in V_2'$, то подпространство W инвариантное и для матрицы B. Как можно видеть, при этом $\det(B|_W) = b^2$ и матрица $B|_{V/W}$ тоже хорошая. Доказательство в случае c) ничем не отличается от доказательства в случае b).

Осталось рассмотреть случай d). Рассмотрим подмножества $V_1' = \{v \in V; Av - av = \alpha x, \alpha \in K\}$ и $V_2' = \{v \in V; Bv - bv = \alpha x, \alpha \in K\}$. Как и в предыдущем случае, это подпространства размерности не меньше $n+1$ каждое. Значит, они пересекаются по подпространству размерности не меньше 2, содержащему вектор x. Пусть W – двумерное подпространство, содержащее вектор x и лежащее в этом пересечении. Тогда, как и в предыдущем случае, подпространство W инвариантное для матриц A и B, $\det(A|_W) = a^2$, $\det(B|_W) = b^2$ и матрицы $A|_{V/W}$ и $B|_{V/W}$ хорошие. □

Следствие 1. *Пусть в обозначениях предложения* 1 *вектор* x *является собственным вектором для собственного числа* c *матрицы* AB *и* $\det(AB|_W) = k \neq c^2$. *Тогда построенное в предложении подпространство* W *содержит собственный вектор* y *для собственного числа* $\frac{k}{c}$ *матрицы* AB. *При этом* $W = \langle x, y \rangle$ *и все собственные векторы матрицы* $AB|_W$ *кратны векторам* x *или* y.

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 1. *Пусть* K – $2n$*-замкнутое поле,* V – $2n$*-мерное пространство над полем* K*, а* $A, B \in \mathrm{GL}(V)$ – *две хорошие матрицы. Тогда собственные числа матрицы* AB *могут быть разбиты на пары таким образом, чтобы произведения чисел в каждой паре были равны.*

Доказательство. Теорема легко следует из предложения 1 по индукции. □

Следующее предложение может представлять и самостоятельный интерес.

Предложение 2. *Пусть* K – $2n$*-замкнутое поле,* V – $2n$*-мерное пространство над* K*, а* V_1, V_2, V_3 *и* V_4 – n*-мерные подпространства в* V. *Тогда существует двумерное подпространство* W*, пересекающееся с каждым из* V_i*,* $1 \leqslant i \leqslant 4$*, не по нулю.*

Доказательство. Предположим, что все V_i друг с другом пересекаются только по нулю, и пусть $a, b \neq \pm 1$ – некоторые ненулевые числа. Тогда можно выбрать оператор A, умножающий векторы из V_1 на a, а векторы из V_2 – на $\frac{1}{a} \in K$; A, таким образом, имеет жорданову форму

$D(\underbrace{a,\dots,a}_{n},\underbrace{\frac{1}{a},\dots,\frac{1}{a}}_{n})$. Аналогично можно выбрать оператор B, умножающий векторы из V_3 на b, а векторы из V_4 – на $\frac{1}{b}$; B, таким образом, имеет жорданову форму $D(\underbrace{b,\dots,b}_{n},\underbrace{\frac{1}{b},\dots,\frac{1}{b}}_{n})$. Матрицы A и B хорошие. Далее, поскольку поле K является $2n$-замкнутым, то у матрицы AB есть собственный вектор x. При этом он не может быть собственным вектором для A и B, так как все V_i друг с другом не пересекаются. Тогда, по утверждению 1, подпространство $W = \langle x, Ax\rangle$ является инвариантным для A, B и AB. Поскольку x не лежит ни в одном V_i, то $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \neq 0 \in V_1$, $x_2 \neq 0 \in V_2$. Поэтому $Ax = ax_1 + \frac{1}{a}x_2$, откуда $x_1 = \frac{1}{a^2-1}(aAx - x) \in W \cap V_1$ и $x_2 = x - x_1 \in W \cap V_2$. Таким образом, W пересекается с V_1 и V_2 не по нулю. С V_3 и V_4 ситуация аналогичная.

Осталось рассмотреть случай, когда какие-нибудь два подпространства из V_i, например V_1 и V_2, пересекаются не по нулю. Пусть $x \in V_1 \cap V_2$, $x \neq 0$. Тогда искомое подпространство W существует по лемме 1. □

§3. Матрица $D((c_1, c_1, c_1), c_2, c_2, c_2)$

В этом параграфе поле K предполагается 6-замкнутым.

Лемма 2. *Предположим, что матрицы A и B квазикорневые, а $C = AB$ имеет жорданову форму $D((c_1, c_1, c_1), c_2, c_2, c_2)$ при $c_1 \neq c_2$. Тогда собственный вектор w для собственного числа c_1 матрицы C будет собственным и для матриц A и B.*

Доказательство. Вектор w, очевидно, единственный собственный вектор для собственного числа c_1 матрицы C с точностью до кратности. Рассмотрим произвольный собственный вектор v для собственного числа c_2 матрицы C. Полагая в предложении 1 и следствии из него вектор x равным вектору v, получаем, что существует инвариантное для всех трех матриц подпространство W, содержащее v и w. Рассмотрим собственный вектор v_1 для собственного числа c_2 матрицы C, не кратный v, и соответствующее ему по предложению 1 подпространство W_1. Поскольку v и v_1 не кратны друг другу, то, по следствию из предложения 1, W не совпадает с W_1. С другой точки зрения, они оба содержат вектор w, то есть $W \cap W_1 = \langle w \rangle$. При этом $Aw \in W, W_1$, поскольку подпространства W и W_1 инвариантны для матрицы A, поэтому $Aw \in W \cap W_1 = \langle w \rangle$. Таким образом, вектор w является собственным для матриц A и B, что и требовалось. $\square$

Лемма 3. *Предположим, что матрицы A и B квазикорневые, а $C = AB$ имеет жорданову форму $D((c_1, c_1, c_1), c_2, c_2, c_2)$ при $c_1 \neq c_2$. Тогда существует двумерное подпространство U, все ненулевые векторы которого являются собственными для собственного числа c_2 матрицы C и собственными для матриц A и B.*

Доказательство. Пусть v – произвольный собственный вектор для собственного числа c_2 матрицы C, а W – инвариантное подпространство, получаемое в предложении 1 из вектора $x = v$. Тогда по предложению 1 и следствию из него, подпространство $\langle v, Av \rangle$ либо одномерно, либо совпадает с W и содержит собственный вектор для собственного числа c_1 матрицы C. Это вектор w из леммы 2. Таким образом, $Av \in \langle v, w \rangle$ для любого собственного вектора v для собственного числа c_2 матрицы C. Рассмотрим отображение, переводящее каждый такой вектор v в проекцию вектора Av на подпространство $\langle w \rangle$ параллельно v. Очевидно, что это отображение является линейным и переводит трехмерное подпространство собственных векторов для собственного числа c_2 матрицы C в одномерное подпространство $\langle w \rangle$. Поэтому ядро этого отображения имеет размерность 2 или 3, и все векторы из этого ядра являются собственными для собственного числа c_2 матрицы C и собственными для матриц A и B. Отсюда следует требуемое.

$\square$

Теорема 2. *Матрица $C \in \mathrm{GL}(6, K)$, имеющая жорданову форму $D((c_1, c_1, c_1), c_2, c_2, c_2)$ при $c_1 \neq c_2$, не является произведением двух квазикорневых матриц.*

Доказательство. Предположим противное – пусть матрицы A и B квазикорневые, а матрица $C = AB$ имеет жорданову форму $D((c_1, c_1, c_1), c_2, c_2, c_2)$ при $c_1 \neq c_2$. Тогда по лемме 2 собственный вектор w для собственного числа c_1 матрицы C будет собственным и для матриц A и B, а по лемме 3 будет существовать двумерное подпространство U, состоящее целиком из векторов, являющихся собственными для собственного числа c_2 матрицы C и собственными для матриц A и B. Выберем какой-нибудь базис подпространства U,

$U = \langle u_1, u_2\rangle$. Подпространство W, построенное как в предложении 1 по вектору u_1, будет равно $\langle u_1, w\rangle$, поскольку должно содержать вектор w. Рассмотрим факторпространство V/W. По предложению 1, матрицы $A|_{V/W}$ и $B|_{V/W}$ являются хорошими. Проекция вектора u_2 на факторпространство V/W является собственным вектором матрицы $AB|_{V/W}$, и можно применить предложение 1. Пусть W_1 – соответствующее подпространство. Дополним проекцию вектора u_2 до базиса этого подпространства, $W_1 = \langle \overline{u_2}, z\rangle$, и рассмотрим какой-нибудь прообраз вектора z в V. Пусть $\overline{w_2} = z$. Наконец, дополним систему векторов $\{w_2, u_2, w, u_1\}$ до базиса всего пространства V векторами e_1, e_2. Рассмотрим, какими могут быть матрицы A и B.

1. Пусть матрицы A и B второго типа с собственными числами a и b соответственно. Тогда, поскольку вектор w является собственным для этих матриц, то $Aw = aw$ и $Bw = bw$. Поэтому $c_1 w = Cw = ABw = abw$, значит $c_1 = ab$. Аналогично, $Au_1 = au_1$, $Bu_1 = bu_1$ и $c_2 u_1 = Cu_1 = ABu_1 = abu_1$, значит $c_2 = ab = c_1$ – противоречие.

2. Пусть матрица $A \sim D(a,a,a,a,a,a)$ или матрица $A \sim D((a,a),a,a,a,a)$, а матрица $B \sim D(b_1,b_1,b_1,b_2,b_2,b_2)$, где $b_1 \neq b_2$. Тогда размерность собственного подпространства для собственного числа a матрицы A равна шести или пяти, и размерность пересечения этого подпространства с собственными подпространствами матрицы B будет равна двум или трем. Поэтому матрица AB будет иметь двух или трехмерные собственные подпространства для собственных чисел ab_1 и ab_2, что противоречит условию.

3. Пусть матрица $A \sim D((a,a),(a,a),(a,a))$, а матрица $B \sim D(b_1,b_1,b_1,b_2,b_2,b_2)$, где $b_1 \neq b_2$. Рассмотрим вектор w. Он собственный для матриц A и B; можно считать, что он собственный для собственных чисел a и b_1 соответственно. Поэтому $c_1 w = Cw = ABw = ab_1 w$, значит $c_1 = ab_1$. Изменим первые три базисных вектора так, чтобы матрица B стала диагональной. Собственное трехмерное подпространство матрицы A нам уже известно, это $\langle u_2, w, u_1\rangle$. Поэтому в новом базисе матрицы A и B приобретают вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & a & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & a & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Их произведение, соответственно, имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & c_2 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & c_1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Как можно видеть, матрица $C - c_1E$ имеет ранг 4 или 3, поэтому жорданова форма матрицы C не $D((c_1, c_1, c_1), c_2, c_2, c_2)$ – противоречие.

4. Случай, когда матрица $A \sim D(a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_2)$, где $a_1 \neq a_2$, а B имеет единственное собственное число b, сводится к уже рассмотренным случаям 2 и 3 транспонированием матриц. А именно, вместо матриц A, B и $C = AB$ стоит рассматривать матрицы B^T, A^T и $B^TA^T = (AB)^T = C^T$.

5. Осталось рассмотреть случай, когда матрицы A и B первого типа. Рассмотрим вектор w. Он собственный для матриц A и B; можно считать, что он собственный для собственных чисел a_1 и b_1 соответственно. Таким образом, получаем $c_1w = ABw = a_1b_1w$, откуда $c_1 = a_1b_1$. Тогда в базисе $\{e_1, e_2, w_2, u_2, w, u_1\}$ матрицы A и B приобретают вид:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & b_1 & g_1 & g_2 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Их произведение, соответственно, имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & c_1 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица A имеет жорданову форму $D(a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_2)$, то коэффициент f_2 должен равняться 0. Аналогично, $g_2 = 0$. Тогда коэффициент $h_2 = a_1g_2+f_2b_1$ также равен 0, поэтому матрица C имеет два не кратных собственных вектора для числа c_1 – противоречие. □

§4. Произведение двух квазипростых матриц: достаточное условие

Следующая лемма – это исправленная и уточненная лемма 4.1 из работы [12].

Лемма 4. *Предположим, что поле K 2-замкнуто, а A и B – две произвольные нескалярные матрицы из* $\mathrm{SL}(2, K)$.

(1) *Любая нескалярная матрица из* $\mathrm{SL}(2, K)$ *представляется в виде произведения матриц $A'B'$, где $A' \sim A$ и $B' \sim B$.*
(2) *Матрицы A и B имеют одинаковые наборы собственных чисел тогда и только тогда, когда единичная матрица E может быть представлена в виде произведения матриц $A'B'$, где $A' \sim A$ и $B' \sim B$.*
(3) *Матрицы A и B имеют различающиеся знаком наборы собственных чисел тогда и только тогда, когда матрица $-E$ может быть представлена в виде произведения матриц $A'B'$, где $A' \sim A$ и $B' \sim B$.*
(4) *Если $A, B \sim D(\sqrt{-1}, -\sqrt{-1})$, то любая матрица из* $\mathrm{SL}(2, K)$ *представляется в виде произведения матриц $A'B'$, где $A' \sim A$ и $B' \sim B$.*

Доказательство. Докажем пункт 1. Заметим, что если след матрицы $C \in \mathrm{SL}(2, K)$ не равен ± 2, то ее жорданова форма определена однозначно. Если же ее след равен ± 2, то существует две жордановы формы с этим следом, скалярная и нескалярная. Сопрягая все матрицы, можно считать, что

$$A' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Чтобы матрица B' имела при этом нужную жорданову форму, достаточно, чтобы $xt-yz = 1, x+t = \mathrm{Tr}(B)$ и хотя бы один из коэффициентов y, z не равнялся 0; последнее условие для того, чтобы матрица B' не оказалась скалярной (отметим, что если $\mathrm{Tr}(B) \neq \pm 2$, то последнее условие не является необходимым). Произведение $A'B'$ тогда имеет вид

$$\begin{pmatrix} ax+z & ay+t \\ \frac{1}{a}z & \frac{1}{a}t \end{pmatrix},$$

его след равен $ax+z+\frac{1}{a}t$. Получается система

$$\begin{cases} xt-yz &= 1 \\ x+t &= \mathrm{Tr}(B) \\ ax+z+\frac{1}{a}t &= k \end{cases}$$

для произвольных $\mathrm{Tr}(B), k \in K$. Если $a \neq \frac{1}{a}$, то есть $a \neq \pm 1$, то подсистема

$$\begin{cases} x+t &= \mathrm{Tr}(B) \\ ax+z+\frac{1}{a}t &= k \end{cases}$$

имеет одно решение при любом z. Поэтому можно положить $z = 1$ – при этом матрицы B' и $A'B'$ заведомо нескалярны, а система, как несложно видеть, имеет единственное решение. Далее, если $a = \frac{1}{a}$, то есть $a = \pm 1$, то z однозначно определено и равно $k - a\,\mathrm{Tr}(B)$. Если это число не равно 0, то матрицы B' и $A'B'$ нескалярны; при этом система

$$\begin{cases} xt - y(k-a\,\mathrm{Tr}(B)) &= 1 \\ x+t &= \mathrm{Tr}(B) \end{cases}$$

имеет решения. Наконец, если $z = k - a\,\mathrm{Tr}(B) = 0$, то полученная система

$$\begin{cases} xt &= 1 \\ x+t &= \mathrm{Tr}(B) \end{cases}$$

снова имеет решение и не зависит от y. Поэтому нужно выбрать y так, чтобы матрицы B' и $A'B'$ были нескалярны, то есть $y \neq 0$ и $ay+t \neq 0$. Такое число можно найти, поскольку поле K содержит больше двух элементов.

Докажем пункт 2. Пусть $A'B' = E$. При сопряжении обеих частей равенство не нарушается и матрица E не изменяется. Поэтому матрицу A' можно привести к жордановой форме $D(a, \frac{1}{a})$ при $a \neq \pm 1$ или $D((a,a))$ при $a = \pm 1$. В обоих случаях матрица $B' = (A')^{-1}$ имеет, как несложно видеть, те же самые собственные числа. В другую сторону утверждение доказывается таким же переходом к жордановой форме матрицы A' и выбором матрицы B'.

Пункт 3 сводится к пункту 2 умножением матрицы B на -1, пункт 4 сразу следует из первых трех пунктов. $\square$

Лемма 5. *Пусть поле K является 2-замкнутым, а матрица $C \in \mathrm{SL}(6, K)$ может быть представлена в блочно-диагональном виде с тремя блоками 2×2, определители которых равны 1. Тогда C есть произведение двух квазикорневых матриц.*

Доказательство. Пусть $C = D(C_1, C_2, C_3)$, где C_1, C_2, C_3 – диагональные блоки 2×2, определители которых равны 1. Далее, пусть $A = D(a, a, a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ и $B = D(b, b, b, \frac{1}{b}, \frac{1}{b}, \frac{1}{b})$, $a, b \neq \pm 1$. Разобьем матрицы A и B на блоки $A = D(A_1, A_2, A_3)$ и $B = D(B_1, B_2, B_3)$, где $A_1 = A_2 = A_3 = D(a, \frac{1}{a})$ и $B_1 = B_2 = B_3 = D(b, \frac{1}{b})$. По предыдущей лемме, матрица C_1 может быть представлена как произведение матриц $A'_1 B'_1$, где $A'_1 \sim A_1$, а $B'_1 \sim B_1$. При этом если C_1 нескалярна, то a и b любые, если C_1 – единичная матрица, то полагаем $a = b$, а если C_1 – минус единичная матрица, то $a = -\frac{1}{b}$. Аналогичные утверждения верны и для других блоков. Пусть $A'_i = X_i A_i X_i^{-1}$, $B'_i = Y_i B_i Y_i^{-1}$ для $i = 1, 2, 3$, и $X = D(X_1, X_2, X_3)$, $Y = D(Y_1, Y_2, Y_3)$. Наконец, положим $A' = D(A'_1, A'_2, A'_3)$ и $B' = D(B'_1, B'_2, B'_3)$. Тогда, как можно видеть, $A'B' = C$, $A' = XAX^{-1}$ и $B' = YBY^{-1}$. Таким образом, мы представили матрицу C как произведение двух квазикорневых матриц. Необходимо отметить, что условия, налагаемые на a и b в каждом из блоков, не противоречат друг другу – если $\operatorname{char} K \neq 2$, то всегда можно положить $a = b = -\frac{1}{b} = \sqrt{-1}$, если же $\operatorname{char} K = 2$, то можно взять произвольные $a = b$. □

Теорема 3. *Пусть поле K является 6-замкнутым, собственные числа матрицы $C \in \mathrm{GL}(6, K)$ могут быть разбиты на пары таким образом, чтобы произведения чисел в каждой паре были равны и, при этом, матрица C имеет жорданову форму, отличную от $D((c_1, c_1, c_1), c_2, c_2, c_2)$ для всех $c_1 \neq c_2$. Тогда C есть произведение двух квазикорневых матриц.*

Доказательство. Отметим, что умножая, в случае необходимости, матрицу C и одну из квазикорневых матриц на подходящий скалярный множитель, можно считать, что собственные числа матрицы C разбиваются на пары взаимно обратных чисел. Более того, можно считать, что среди собственных чисел матрицы C кратность 1 не меньше, чем кратность -1. По предыдущей лемме, нам осталось рассмотреть случай, когда матрица C не может быть представлена в блочно-диагональном виде с тремя блоками 2×2, определители которых равны 1. Иначе говоря, диагональные блоки оказываются связаны между собой. Это возможно, если различные блоки имеют одинаковые собственные числа, а соответствующая жорданова клетка содержит числа из разных блоков. Отметим также, что если один из диагональных блоков не связан с другими, то его, как и в предыдущей лемме, легко получить и можно здесь не учитывать. Отдельно стоит рассмотреть случаи с одинаковыми собственными числами в одном блоке – тогда жорданова клетка может содержать оба собственных числа. Когда собственные числа в “повторяющемся” блоке различны, получаются случаи $C \sim D((c,c), \frac{1}{c}, \frac{1}{c})$, $D((c,c),(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}))$, $D((c,c,c),(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}), \frac{1}{c})$ или $D((c,c,c),(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}))$, где $c \neq \pm 1$. Далее, если собственные числа в “повторяющемся” блоке одинаковые, то, поскольку среди собственных чисел матрицы C кратность 1 не меньше, чем кратность -1, то эти собственные числа в “повторяющемся” блоке равны 1. Тогда получаются случаи $C \sim D((1,1,1),1)$, $D((1,1,1,1))$, $D((1,1,1),(1,1,1))$, $D((1,1,1,1,1),1)$ или $D((1,1,1,1,1,1))$. Рассмотрим все случаи по очереди и укажем в каждом из них соответствующую пару квазикорневых матриц.

Мы будем полагать, что $A \sim B \sim D(a,a,a,\frac{1}{a},\frac{1}{a},\frac{1}{a})$ во всех случаях, кроме, разумеется, матриц 4×4 – там мы обойдемся матрицами $A \sim B \sim D(a,a,\frac{1}{a},\frac{1}{a})$. В случаях с различными собственными числами, мы также будем полагать, что $c = a^2$. Пусть $X = D(a,\frac{1}{a},a,\frac{1}{a},a,\frac{1}{a})$, $X' = D(a,\frac{1}{a},a,\frac{1}{a})$, $Y = D(\frac{1}{a},a,\frac{1}{a},a,\frac{1}{a},a)$, $Y' = D(\frac{1}{a},a,\frac{1}{a},a)$, а E_{ij} – это матрица с 1 на позиции (i,j) и 0 на всех остальных местах. Соответствующие каждому случаю примеры описаны в следующей таблице.

A	B	Жорданова форма AB
$X' + E_{12}$	$X' + E_{23}$	$D((c,c),\frac{1}{c},\frac{1}{c})$
$X' + E_{12} + E_{34}$	$X' + E_{23}$	$D((c,c),(\frac{1}{c},\frac{1}{c}))$
$X + E_{12} + E_{34}$	$X + E_{23} + E_{45}$	$D((c,c,c),(\frac{1}{c},\frac{1}{c}),\frac{1}{c})$
$X + E_{12} + E_{34} + E_{56}$	$X + E_{23} + E_{45}$	$D((c,c,c),(\frac{1}{c},\frac{1}{c},\frac{1}{c}))$
$X' + E_{12}$	$Y' + E_{23}$	$D((1,1,1),1)$
$X' + E_{12} + E_{34}$	$Y' + E_{23}$	$D((1,1,1,1))$
$X + E_{12} + E_{45}$	$Y + E_{23} + E_{56}$	$D((1,1,1),(1,1,1))$
$X + E_{12} + E_{34}$	$Y + E_{23} + E_{45}$	$D((1,1,1,1,1),1)$
$X + E_{12} + E_{34} + E_{56}$	$Y + E_{23} + E_{45}$	$D((1,1,1,1,1,1))$

□

§5. Произведение трех квазикорневых матриц

Цель настоящего параграфа – доказать, что любая матрица $A \in \mathrm{GL}(6,K)$ над 6-замкнутым полем K есть произведение трех квазикорневых матриц. Отметим, что чуть более слабое утверждение уже было доказано в работе автора [12]; а именно, теорема 5 из [12] утверждает, что любая матрица $A \in \mathrm{GL}(6,K)$ над 6-замкнутым полем K есть произведение четырех квазикорневых матриц. Фактически, там перебирались возможные жордановы формы матрицы A и доказывалось, что все они, кроме $D(a,a,a,a,a,b)$, есть произведение трех квазикорневых матриц. В настоящем параграфе мы повторим это доказательство и убедимся, что матрица с жордановой формой $D(a,a,a,a,a,b)$ также есть произведение трех квазикорневых матриц.

Лемма 6 (Лемма 5.2 из работы [12]). *Предположим, что поле K является 2-замкнутым, и пусть матрица $A \in \mathrm{GL}(6,K)$ является блочно-верхнетреугольной с тремя блоками 2×2 на диагонали. Далее, предположим, что все блоки на диагонали не являются скалярными, или из трех блоков на диагонали ровно один является скалярным. Тогда A является произведением трех квазикорневых матриц.*

Теорема 4. *Предположим, что поле K является 6-замкнутым. Тогда произвольная матрица $A \in \mathrm{GL}(6,K)$ есть произведение трех квазикорневых матриц.*

Доказательство. Поскольку поле K 6-замкнуто, то все собственные числа матрицы A лежат в K. Поэтому жорданова форма матрицы A лежит в $\mathrm{GL}(6,K)$, и A с ней сопряжена. Далее, поскольку квазикорневые матрицы определены с точностью до сопряжения, то можно считать, что A совпадает со своей жордановой формой. Перечислим все жордановы формы для матриц из $\mathrm{GL}(6,K)$. Для удобства, они разбиты нами на группы по наборам собственных чисел.
I $D(a,b,c,d,e,f)$;

II a) $D(a,b,c,d,e,e)$, b) $D(a,b,c,d,(e,e))$;

III a) $D(a,b,c,d,d,d)$, b) $D(a,b,c,d,(d,d))$, c) $D(a,b,c,(d,d,d))$;

IV a) $D(a,b,c,c,d,d)$, b) $D(a,b,c,c,(d,d))$, c) $D(a,b,(c,c),(d,d))$;

V a) $D(a,b,c,c,c,c)$, b) $D(a,b,c,c,(c,c))$, c) $D(a,b,c,(c,c,c))$, d) $D(a,b,(c,c),(c,c))$, e) $D(a,b,(c,c,c,c))$;

VI a) $D(a,b,b,c,c,c)$, b) $D(a,b,b,c,(c,c))$, c) $D(a,b,b,(c,c,c))$, d) $D(a,(b,b),c,c,c)$, e) $D(a,(b,b),c,(c,c))$, f) $D(a,(b,b),(c,c,c))$;

VII a) $D(a,a,b,b,c,c)$, b) $D(a,a,b,b,(c,c))$, c) $D(a,a,(b,b),(c,c))$, d) $D((a,a),(b,b),(c,c))$;

VIII a) $D(a,b,b,b,b,b)$, b) $D(a,b,b,b,(b,b))$, c) $D(a,b,b,(b,b,b))$, d) $D(a,b,(b,b),(b,b))$, e) $D(a,b,(b,b,b,b))$, f) $D(a,(b,b),(b,b,b))$, g) $D(a,(b,b,b,b,b))$;

IX a) $D(a,a,b,b,b,b)$, b) $D(a,a,b,b,(b,b))$, c) $D(a,a,b,(b,b,b))$, d) $D(a,a,(b,b),(b,b))$, e) $D(a,a,(b,b,b,b))$, f) $D((a,a),b,b,b,b)$, g) $D((a,a),b,b,(b,b))$, h) $D((a,a),b,(b,b,b))$, i) $D((a,a),(b,b),(b,b))$, j) $D((a,a),(b,b,b,b))$;

X a) $D(a,a,a,b,b,b)$, b) $D(a,a,a,b,(b,b))$, c) $D(a,a,a,(b,b,b))$, d) $D(a,(a,a),b,(b,b))$, e) $D(a,(a,a),(b,b,b))$, f) $D((a,a,a),(b,b,b))$;

XI a) $D(a,a,a,a,a,a)$, b) $D(a,a,a,a,(a,a))$, c) $D(a,a,a,(a,a,a))$, d) $D(a,a,(a,a),(a,a))$, e) $D(a,a,(a,a,a,a))$, f) $D(a,(a,a),(a,a,a))$, g) $D(a,(a,a,a,a,a))$,
h) $D((a,a),(a,a),(a,a))$, i) $D((a,a),(a,a,a,a))$, j) $D((a,a,a),(a,a,a))$,
k) $D((a,a,a,a,a,a))$.

Поскольку квазикорневые матрицы можно умножать на скаляры, то в случае XI можно считать, что $a = 1$.

Как несложно видеть, под условие леммы 6 подпадают случаи I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII без подслучая a), IX, X и XI без подслучаев a)-c). Таким образом, нам осталось рассмотреть варианты VIII a) и XI a)-c). Далее, очевидно, что для случая XI c) хватает двух, для XI b) – одной, а для XI a), в некотором смысле, нуля матриц с жордановой формой $D(1,1,1,1,(1,1))$.

Осталось рассмотреть случай $D(a,b,b,b,b,b)$. Поскольку, как мы уже отмечали, квазикорневые матрицы можно умножать на скаляры, то можно считать, что $a = \frac{1}{b^5}$. Пусть $A = D(\frac{1}{b^5},b,b,b,b,b) = D(A_1,A_2,A_3)$, где $A_1 = D(\frac{1}{b^5},b)$, а $A_2 = A_3 = D(b,b)$. Далее, положим $B = D(B_1,B_2,B_3)$, где $B_1 = D(b,\frac{1}{b})$, $B_2 = D(b,b)$ и $B_3 = D(\frac{1}{b},\frac{1}{b})$; как можно видеть, матрица B является квазикорневой. Поскольку матрицы $X = b^2 A_1$ и B_1 имеют определитель, равный 1, то, по лемме 4, существуют матрицы $X' \sim X$ и $B_1' \sim B_1$, такие что $X'B_1' = D((1,1))$. Полагая $A_1' = \frac{1}{b^2}X'$, получаем $A_1' \sim A_1$ и $A_1'B_1' = D((\frac{1}{b^2},\frac{1}{b^2}))$. Наконец, если $A' = D(A_1',A_2,A_3)$, а $B' = D(B_1',B_2,B_3)$, то $A' \sim A$,

$B' \sim B$ и $A'B' = D((\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^2}), b^2, b^2, 1, 1)$. По теореме 3 полученная матрица $D((\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^2}), b^2, b^2, 1, 1)$ есть произведение двух квазикорневых матриц. Тогда $A \sim A' = D((\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^2}), b^2, b^2, 1, 1) \cdot (B')^{-1}$ есть произведение трех квазикорневых матриц, что и требовалось. □

Из теорем 1, 2, 3 и 4 непосредственно следует основной результат настоящей работы.

Основная теорема. *Предположим, что поле K 6-замкнуто. Тогда любая матрица $A \in \mathrm{GL}(6, K)$ есть произведение трех квазикорневых матриц. Матрица A есть произведение двух квазикорневых матриц тогда и только тогда, когда ее собственные числа могут быть разбиты на пары таким образом, чтобы произведения чисел в каждой паре были равны, и ее жорданова форма отлична от $D((a, a, a), b, b, b)$ для всех $a \neq b$.*

Литература

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — В кн.: Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., 1973, с. 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Главы IV–VI, Мир, М. (1972).
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Главы VII–VIII, Мир, М. (1978).
4. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
5. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
6. М. А. Всемирнов, *Является ли группа* $\mathrm{SL}(6, \mathbb{Z})$ (2,3)-*порожденной*? Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 101–130.
7. М. А. Всемирнов, *О* (2,3)-*порождении матричных групп над кольцом целых чисел.* — Алгебра и анализ **19** (2007), No. 6, 22–58.
8. А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Некоторые факты из жизни* $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 153–163.
9. О. О'Мира, *Лекции о линейных группах.* — В кн.: Автоморфизмы классических групп, Мир, М. (1976), с. 57–167.
10. О. О'Мира, *Лекции о симплектических группах.* Мир, М. (1979).
11. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ **23** (2011), No. 3, 261–309.
12. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, I. — Алгебра и анализ **23** (2011), No. 5, 155–198.
13. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 242–264.
14. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, М. (1989), с. 5–136.

15. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1975).
16. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* Наука, М. (1980).
17. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* МЦНМО, М. (2003).
18. C. S. Ballantine, *Products of involutory matrices.* I. — Linear and Multilinear Algebra **5**, no. 1 (1977–1978), 53–62.
19. A. Cohen, A. Steinbach, R. Ushirobira, and D. Wales, *Lie algebras generated by extremal elements.* — J. Algebra **236**, no. 1 (2001), 122–154.
20. R. R. Dennis, L. N. Vaserstein, *On a question of M. Newman on the number of commutators.* — J. Algebra **118**, no. 1 (1988), 150–161.
21. J. Dieudonné, *Sur les générateurs des groupes classiques.* — Summa Brasil. Math. **3** (1955), 149–179.
22. D. Ž. Djoković, J. G. Malzan, *Products of reflections in the general linear group over a division ring.* — Linear Algebra Appl. **28** (1979), 53–62.
23. E. W. Ellers, *Products of involutions in simple Chevalley groups.* — J. Geom. **69**, no. 1–2 (2000), 68–72.
24. E. W. Ellers, R. Frank, *Products of quasireflections and transvections over local rings.* — J. Geom. **31**, no. 1–2 (1988), 69–78.
25. E. W. Ellers, H. Ishibashi, *Factorization of transformations over a local ring.* — Linear Algebra Appl. **85** (1987), 12–27.
26. E. W. Ellers, H. Lausch, *Length theorems for the general linear group of a module over a local ring.* — J. Austral. Math. Soc. Ser. A **46**, no. 1 (1989), 122–131.
27. E. W. Ellers, H. Lausch, *Generators for classical groups of modules over local rings.* — J. Geom. **39**, no. 1–2 (1990), 60–79.
28. B. M. Gillio, M. C. Tamburini, *Alcuni classi di gruppi generati da tre involuzioni.* — Rend. Ist. Lombardo Ser. A **116** (1982), 191–209.
29. H. Gustafson, P. R. Halmos, H. Radjavi, *Products of involutions.* — Linear Algebra and Appl. **13**, no. 1–2 (1976), 157–162.
30. W. van der Kallen, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}[x])$ *does not have bounded word length.* — Algebraic K-Theory, Lecture Notes in Math. **966**, Berlin et al., Springer (1982), 357–361.
31. F. Knüpel, K. Nielsen, $\mathrm{SL}(V)$ *is 4-reflectional.* — Geom. Dedicata **38**, no. 3 (1991), 301–308.
32. G. Malle, J. Saxl, T. S. Weigel, *Generation of classical groups.* — Geom. Dedicata **49**, no. 1 (1994), 85–116.
33. M. Newman, *Unimodular commutators.* — Proc. Amer. Math. Soc. **101**, no. 4 (1987), 605–609.
34. A. S. Sivatski, A. V. Stepanov, *On the word length of commutators in* $\mathrm{GL}_n(R)$. — K-Theory **17**, no. 4 (1999), 295–302.
35. T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston (1998).
36. W. Thurston, L. N. Vaserstein, *On* K_1*-theory of the Euclidean space.* — Topology Appl. **23**, no. 2 (1986), 145–148.
37. L. N. Vaserstein, *On* K_1*-theory of topological spaces.* — Contemp. Math. **55** (1986), 729–740.
38. L. N. Vaserstein, *Reduction of a matrix depending on parameters to a diagonal form by addition operations.* — Proc. Amer. Math. Soc. **103**, no. 3 (1988), 741–746.

39. L. N. Vaserstein, E. Wheland, *Factorization of invertible matrices over rings of stable rank one.* — J. Austral. Math. Soc. Ser. A **48**, no. 3 (1990), 455–460.
40. M. A. Vsemirnov, *The group* $\mathrm{GL}(6,\mathbb{Z})$ *is* (2,3)*-generated.* — J. Group Theory **10**, no. 4 (2007), 425–430.
41. J. W. Wood, *Bundles with totally disconnected structure group.* — Comment. Math. Helv. **46** (1971), 257–273.

Pevzner I. M. Width of $\mathrm{GL}(6, K)$ with respect to quasi-root elements.

We study structure of $GL(6, K)$ with respect to a certain family of conjugacy classes, whose elements are called quasi-root. Namely, we prove that any element of $GL(6, K)$ is a product of three quasi-root elements, and completely describe the elements that are products of two quasi-root elements. The result arises in the study of width of exceptional groups of type E_6, but also is of independent interest.

Российский
Государственный Педагогический
Университет им. А.И. Герцена,
набережная реки Мойки, д.48
191186 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 15 сентября 2013 г.