Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

А. О. Звонарёва

ДВУЧЛЕННЫЕ НАКЛОНЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ НАД АЛГЕБРАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ДЕРЕВЬЯМ БРАУЭРА

§1. Введение

Пусть A – алгебра, соответствующая дереву Брауэра Γ с кратностью исключительной вершины, равной 1, $\mathrm{TrPic}(A)$ – производная группа Пикара алгебры A, то есть группа стандартных автоэквивалентностей производной категории A по модулю естественных изоморфизмов. Рассмотрим производный группоид Пикара, объекты которого соответствуют алгебрам с деревом Брауэра с s ребрами и кратностью исключительной вершины 1, а морфизмы – стандартные производные эквивалентности между ними. $\mathrm{TrPic}(A)$ является группой эндоморфизмов объекта A в этой категории. Вычисление группоида Пикара кажется нам более простой задачей, чем вычисление $\mathrm{TrPic}(A)$. Полностью производная группа Пикара вычислена только для случая алгебры с двумя простыми модулями [1]. В остальных случаях известны лишь действия различных групп кос на $\mathrm{TrPic}(A)$ [1–3]. С другой стороны, по результату Абе и Хошино [4] производный группоид Пикара, соответствующий классу алгебр Брауэра с кратностью исключительной вершины t и с зафиксированным количеством простых модулей s, порожден одночленными и двучленными наклоняющими комплексами. Таким образом, описав все двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй A, мы получим порождающее множество группоида Пикара.

Вычисление группоида Пикара было основной мотивацией при написании данной работы, однако двучленные наклоняющие комплексы также связаны с теорией τ-наклонений [5] и с "simple-minded" системами [6].

Ключевые слова: алгебры, соответствующие деревьям Брауэра, двучленные наклоняющие комплексы.

Работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 13-01-00902) и при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

Данная работа является продолжением совместной статьи с М. Антиповым [7], в которой мы классифицировали все неразложимые двучленные частично наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. В пункте 3 описаны двучленные наклоняющие комплексы над такими алгебрами. Для того, чтобы классифицировать все двучленные наклоняющие комплексы T, необходимо и достаточно классифицировать наборы из s попарно ортогональных неизоморфных неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов $\{T_1, \dots, T_s\}$ [4]. Комбинаторное условие того, что два неразложимых двучленных частично наклоняющих комплекса ортогональны, приведено в теореме 1. В пункте 4 вычислено кольцо эндоморфизмов произвольного двучленного наклоняющего комплекса.

Я бы хотела выразить свою благодарность Михаилу Антипову за многочисленные и плодотворные обсуждения.

§2. Предварительные сведения

Пусть K – алгебраически замкнутое поле, A – конечномерная алгебра над K. Обозначим через A-mod категорию конечно порожденных левых A-модулей, $K^b(A)$ – ограниченную гомотопическую категорию и $D^b(A)$ – ограниченную производную категорию категории A-mod. Функтор сдвига на производной категории будем обозначать [1]. Обозначим A-perf полную подкатегорию $D^b(A)$, состоящую из совершенных комплексов, т.е. ограниченных комплексов конечно порожденных проективных A-модулей. В алгебрах путей колчанов произведение стрелок $\xrightarrow{a}\xrightarrow{b}$ будем записывать в виде ab.

Определение 1. *Комплекс $T \in A$-perf называется наклоняющим, если*

(1) $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$, *при* $i \neq 0$*;*
(2) T *порождает* A-perf *как триангулированную категорию.*

Определение 2. *Комплекс $T \in A$-perf называется частично наклоняющим, если выполнено условие* 1 *из определения* 1.

Определение 3. *Наклоняющий комплекс $T \in A$-perf называется базисным, если в нем нет изоморфных прямых слагаемых, или, что то же самое, если* $\mathrm{End}_{D^b(A)}(T)$ *– базисная алгебра.*

Будем называть (частично) наклоняющий комплекс двучленным, если он сосредоточен не более, чем в двух соседних степенях. Для определенности будем полагать, что это степени 0 и 1.

Определение 4. *Пусть Γ – дерево с s ребрами и одной отмеченной вершиной, которой приписана кратность $t \in \mathbb{N}$ (эта вершина называется исключительной, t называется кратностью исключительной вершины), и пусть в Γ зафиксирован циклический порядок ребер, инцидентных каждой вершине (в случае, когда Γ лежит на плоскости, будем считать, что ребра упорядочены по часовой стрелке). В этом случае Γ называется деревом Брауэра типа (s,t).*

Каждому дереву Брауэра типа (s,t) можно поставить в соответствие алгебру $A(s,t)$. Алгебра $A(s,t)$ – это алгебра путей колчана с соотношениями. По дереву Брауэра Γ построим колчан Брауэра Q_Γ. Вершины Q_Γ – это ребра Γ; если ребра i и j инцидентны одной вершине в Γ и ребро j следует за ребром i в соответствии с циклическим порядком ребер, ицидентных их общей вершине, то из вершины i в вершину j в Q_Γ есть стрелка. Q_Γ обладает следующими свойствами: Q_Γ является объединением ориентированных циклов, соответствующих вершинам Γ, каждая вершина Q_Γ лежит ровно на двух циклах. Цикл, соответствующий исключительной вершине, называется исключительным. Стрелки Q_Γ можно разбить на два семейства α и β так, что стрелки, принадлежащие пересекающимся циклам, принадлежат разным семействам.

Определение 5. *Базисная алгебра Брауэра $A(s,t)$, соответствующая дереву Γ типа (s,t), изоморфна KQ_Γ/I, где идеал I порожден соотношениями вида:*

(1) $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$;
(2) *для любой вершины x, не принадлежащей исключительному циклу, $e_x\alpha^{x_\alpha}e_x = e_x\beta^{x_\beta}e_x$, где x_α, соответственно x_β – длина α-, соответственно β-цикла, содержащего x;*
(3) *для любой вершины x, принадлежащей исключительному α-циклу (соответственно β-циклу), $e_x(\alpha^{x_\alpha})^t e_x = e_x\beta^{x_\beta}e_x$ (соответственно $e_x\alpha^{x_\alpha}e_x = e_x(\beta^{x_\beta})^t e_x$).*

здесь e_x – идемпотент, соответствующий вершине x. Алгебра называется алгеброй Брауэра типа (s,t), если она Морита-эквивалентна алгебре $A(s,t)$ для некоторого дерева Брауэра Γ типа (s,t).

Заметим, что идеал I не является допустимым идеалом. Далее для удобства все алгебры предполагаются базисными.

Рикард доказал, что две алгебры, соответствующие деревьям Брауэра Γ и Γ', производно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы (s,t) и (s',t') совпадают [10], а из результата Габриэля и Ридтманн вытекает, что класс алгебр Брауэра замкнут относительно производной эквивалентности [11].

В статье [7] мы классифицировали все неразложимые двучленные частично наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Заметим, что любой неразложимый двучленный комплекс либо является комплексом, состоящим из неразложимого проективного модуля, сосредоточенного в одной степени (такие комплексы очевидно являются частично наклоняющими), либо является минимальным проективным представлением некоторого неразложимого непроективного A-модуля.

Теорема [**7**] *Пусть A – алгебра Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Минимальное проективное представление неразложимого непроективного A-модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P.*

§3. Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1

Далее будем предполагать, что рассматриваемая алгебра имеет кратность исключительной вершины 1.

Для того, чтобы классифицировать все базисные двучленные наклоняющие комплексы $T = \oplus_{i=1}^{s} T_i$, необходимо и достаточно классифицировать наборы из s попарно ортогональных неизоморфных неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов $\{T_1, \ldots, T_s\}$ [4].

Пусть $T_i = P_0 \xrightarrow{f} P_1 \in A\text{-perf}$ – минимальное проективное представление неразложимого непроективного модуля M, и пусть модуль M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P. В силу известной классификации неразложимых A-модулей (см. [8, 9]), диаграмма модуля M является зигзагом. Пусть $P_0 = \bigoplus_{l \in L} Ae_l$, $P_1 = \bigoplus_{l \in J} Ae_l$. Заметим, что в силу того, что у M нет повторяющихся композиционных факторов, и того, что M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P, каждый индекс может встречаться только один раз и только в одном из множеств. Двучленному комплексу $T = P_0 \xrightarrow{f} P_1$ сопоставим следующую диаграмму на колчане алгебры A.

Определение 6. *Отметим на колчане алгебры A вершины, соответствующие множеству $L \cup J$. Также отметим на колчане алгебры A путь из l в j, $l \in L$, $j \in J$, если у f есть ненулевая компонента между соответствующими прямыми слагаемыми P_0 и P_1. Полученную диаграмму будем называть диаграммой проективного представления $T = P_0 \xrightarrow{f} P_1$. Вершины, соответствующие множеству $L \cup J$, будем называть выделенными вершинами диаграммы.*

Полученная диаграмма представляет собой связный путь без самопересечений, меняющий цикл и ориентацию в каждой из вершин множества $L \cup J$. Это выполнено в силу того, что для любого индекса $j \in J$ существует не более двух индексов из L таких, что соответствующие компоненты f ненулевые, и наоборот: для любого индекса $l \in L$ существует не более двух индексов из J таких, что соответствующие компоненты f ненулевые. Следовательно, любому связному пути Θ без самопересечений, меняющему ориентацию при каждой смене цикла и состоящему больше чем из одной вершины, можно поставить в соответствие двучленный частично наклоняющий комплекс следующим образом: положим множество L множеством индексов, соответствующих истокам Θ, J – множеством индексов, соответствующих стокам Θ. Тогда $P_0 = \bigoplus_{l \in L} Ae_l$, $P_1 = \bigoplus_{l \in J} Ae_l$, а f составлено из морфизмов, соответствующих направленным подпутям из истоков в стоки. (Проективные модули, соответствующие соседним стоку и истоку, лежат на одном цикле, и, с точностью до обратимой константы, между ними существует единственный морфизм. Выбор коэффициента не имеет значения, будем считать, что в качестве морфизма мы всегда выбираем домножение на соответствующий путь.) Таким образом мы получили взаимно однозначное соответствие между минимальными проективными представлениями непроективных модулей, неизоморфных $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P, и связными путями Θ на колчане алгебры A такими, что Θ – путь без самопересечений, меняет ориентацию при каждой смене цикла и состоит больше чем из одной вершины.

Диаграмму, соответствующую минимальному проективному представлению, и само минимальное проективное представление мы часто будем обозначать одинаково.

Определение 7. *Пусть T_i и T_j – диаграммы двух минимальных проективных представлений, пересекающиеся больше, чем по одной вершине так, что пересечение состоит из одной компоненты связности. Сужение T_i относительно T_j – это пересечение диаграммы T_i и объединения тех циклов алгебры, на которых лежит хотя бы одна выделенная вершина T_j. Будем обозначать сужение T_i относительно T_j через $T_i|_{T_j}$.*

Диаграмму, состоящую больше чем из одной вершины и полностью лежащую на одном цикле, будем называть струной. Как и в [7], будем обозначать такую диаграмму $(k,\dots,l)$, где k – сток, а l – исток струны.

Замечание 1. Определение сужения подобрано так, что между проективными слагаемыми компонент T_i и T_j, которые соответствуют вершинам, не попавшим в сужения, нет ненулевых морфизмов.

Теорема 1. *Пусть T_i и T_j – неразложимые неизоморфные двучленные частично наклоняющие комплексы. Комплекс $T_i \oplus T_j$ является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий.*

В предположении, что T_i и T_j – минимальные проективные представления некоторых модулей, являющиеся неразложимыми двучленными частично наклоняющими комплексами.

а) *Диаграммы, соответствующие T_i и T_j, не пересекаются, причем не существует цикла Υ такого, что на Υ лежит исток степени один диаграммы T_j (соответственно T_i) и сток степени один диаграммы T_i (соответственно T_j), и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j, лежащие на Υ.*

б) *Диаграммы, соответствующие T_i и T_j, пересекаются по вершине k, причем либо k не является выделенной вершиной ни T_i, ни T_j, либо k является стоком степени один и T_i, и T_j, либо k является истоком степени один и диаграммы T_i, и диаграммы T_j.*

в) *Пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Диаграммы,* *соответствующие* T_i *и* T_j*, пересекаются так, что одна крайняя вершина пересечения является стоком, а другая истоком. Кроме того,* $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$ *или* $T_j|_{T_i} \subseteq T_i|_{T_j}$.

г) *Пересечение диаграмм* T_i *и* T_j *имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Диаграммы, соответствующие* T_i *и* T_j*, пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются стоками, при этом либо диаграммы* T_i *и* T_j *имеют общую вершину степени один, либо* $T_i|_{T_j} \nsubseteq T_j|_{T_i}$ *и* $T_j|_{T_i} \nsubseteq T_i|_{T_j}$.

д) *Пересечение диаграмм* T_i *и* T_j *имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Диаграммы, соответствующие* T_i *и* T_j*, пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются истоками, при этом либо диаграммы* T_i *и* T_j *имеют общую вершину степени один, либо* $T_i|_{T_j} \nsubseteq T_j|_{T_i}$ *и* $T_j|_{T_i} \nsubseteq T_i|_{T_j}$.

В предположении, что T_i *– минимальное проективное представление некоторого модуля, которое является неразложимым двучленным частично наклоняющим комплексом,* T_j *– неразложимый комплекс, состоящий из проективного неразложимого модуля* P.

е) P *сосредоточен в* 0*, и либо вершина, соответствующая* P*, совпадает с истоком степени один диаграммы* T_i*, либо вершина, соответствующая* P*, не лежит на диаграмме* T_i*, и не существует цикла* Υ *такого, что на* Υ *лежит вершина, соответствующая* P*, и сток степени один диаграммы* T_i *так, что этот сток является единственной вершиной* T_i*, которая лежит на* Υ.

ж) P *сосредоточен в* 1*, и либо вершина, соответствующая* P*, совпадает со стоком степени один диаграммы* T_i*, либо вершина, соответствующая* P*, не лежит на диаграмме* T_i*, и не существует цикла* Υ *такого, что на* Υ *лежит вершина, соответствующая* P*, и исток степени один диаграммы* T_i *так, что этот исток является единственной вершиной* T_i*, которая лежит на* Υ.

В предположении, что T_i, T_j *– два неразложимых комплекса, каждый из которых сосредоточен в одной степени.*

з) *Либо вершины, соответствующие* T_i *и* T_j*, не лежат на одном цикле, либо вершины, соответствующие* T_i *и* T_j*, лежат на одном цикле, и* T_i, T_j *сосредоточены в одной и той же степени.*

Доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть раздела 3.

Как мы уже отмечали ранее, для того, чтобы классифицировать все базисные двучленные наклоняющие комплексы, необходимо и достаточно классифицировать наборы из s неизоморфных неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов $\{T_1, \dots, T_s\}$ таких, что $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$ (см. [4]). В силу следующего замечания Хаппеля [12] достаточно проверить лишь одно из этих условий, например, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

Замечание 2. Пусть B – конечномерная алгебра над полем K, B-proj, B-inj – категории конечнопорожденных проективных и инъективных B-модулей, $K^b(B\text{-proj})$, $K^b(B\text{-inj})$ – соответствующие ограниченные гомотопические категории, D – двойственность относительно K. Тогда функтор Накаямы ν индуцирует эквивалентность триангулированных категорий $K^b(B\text{-proj}) \to K^b(B\text{-inj})$, и существует естественный изоморфизм $\mathrm{DHom}(P, -) \to \mathrm{Hom}(-, \nu P)$, $P \in K^b(B\text{-proj})$.

Если Ae_j, Ae_i – проективные модули, лежащие на одном цикле, то будем обозначать через $Ae_j \to Ae_i$ комплекс (сосредоточенный в двух соседних степенях), в котором дифференциал индуцирован домножением на путь из j в i.

Сначала рассмотрим случай двух минимальных проективных представлений некоторых непроективных модулей.

Лемма 1. *Пусть не существует цикла, содержащего вершины диаграмм и T_i, и T_j, тогда* $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$.

Доказательство. Следует из того, что между слагаемыми компонент T_i и T_j нет ненулевых морфизмов. □

Лемма 2. *Пусть существует цикл Υ такой, что Υ содержит вершины и T_i, и T_j, но диаграммы, соответствующие T_i и T_j, не пересекаются. Тогда условие* $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ *выполнено во всех случаях кроме случая, когда на Υ лежит исток степени один диаграммы T_j (соответственно T_i) и сток степени один диаграммы T_i (соответственно T_j), и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j, лежащие на Υ.*

Доказательство. Заметим, что если диаграммы T_i и T_j проходят по одному циклу Υ, но не пересекаются, то они не проходят одновременно ни по какому другому циклу, так как Γ – дерево. Эта ситуация может реализовываться в случаях, когда на Υ лежат струна T_i и струна T_j; струна T_i и вершина T_j; вершина T_i и вершина T_j.

1) На Υ лежат струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и струна $(j_1, \ldots, j_2)$, принадлежащая T_j, но эти струны не пересекаются. Докажем, что между T_i и $T_j[-1]$ не может быть ненулевого цепного отображения. Понятно, что ненулевые морфизмы существуют только между теми прямыми слагаемыми компонент T_i и T_j, вершины которых лежат на Υ (то есть между Ae_{i_1}, Ae_{i_2}, Ae_{j_1}, Ae_{j_2}), так как все остальные проективные слагаемые компонент T_i и T_j лежат на разных циклах. Следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}, (Ae_{j_2} \to Ae_{j_1})[-1]) = 0$. Последнее верно, так как струны $(i_1, \ldots, i_2)$ и $(j_1, \ldots, j_2)$ не пересекаются.

2) На Υ лежат струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и вершина, принадлежащая T_j и не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j. $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$, так как проективные слагаемые компонент T_i и T_j лежат на разных циклах. $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$ по тем же причинам.

3) На Υ лежат струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и вершина (j_1) принадлежащая T_j, являющаяся стоком степени один. Тогда из Ae_{i_1} нет ненулевых морфизмов в компоненту $T_j[-1]$, сосредоточенную в степени 1, то есть

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0.$$

Имеем: $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(0 \to Ae_{j_1}, (Ae_{i_2} \to Ae_{i_1})[-1]) = 0.$$

Последнее верно, так как струна $(i_1, \ldots, i_2)$ не содержит (j_1).

4) На Υ лежат струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и вершина (j_1), принадлежащая T_j и являющаяся истоком степени один. Этот случай аналогичен предыдущему.

5) На Υ лежат вершина (i_1), принадлежащая T_i, и вершина (j_1), принадлежащая T_j, обе являются истоками степени один, и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j, лежащие на Υ. Модули Ae_{i_1} и Ae_{j_1} – единственные проективные слагаемые компонент T_i и T_j, между которыми существуют ненулевые морфизмы, они сосредоточены в одной степени, значит после сдвига ненулевых морфизмов нет.

6) На Υ лежат вершина (i_1), принадлежащая T_i, и вершина (j_1), принадлежащая T_j, обе являются стоками степени один. Доказательство аналогично предыдущему.

7) На Υ лежат сток степени один диаграммы T_i и неотмеченная вершина, принадлежащая T_j, эти вершины – единственные вершины

T_i и T_j, лежащие на Υ. $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$, так как проективные слагаемые компонент T_i и T_j лежат на разных циклах.

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$$

по тем же причинам.

8) На Υ лежат исток степени один диаграммы T_i и неотмеченная вершина, принадлежащая T_j, эти вершины – единственные вершины T_i и T_j, лежащие на Υ. Этот случай аналогичен предыдущему.

9) На Υ лежат неотмеченная вершина диаграммы T_i и неотмеченная вершина, принадлежащая T_j, эти вершины – единственные вершины T_i и T_j, лежащие на Υ. Этот случай аналогичен предыдущему.

10) На Υ лежат вершина (i_1), принадлежащая T_i, являющаяся стоком степени один, и вершина (j_1), принадлежащая T_j, являющаяся истоком степени один. В этом случае Ae_{i_1} и Ae_{j_1} – проективные слагаемые компонент T_i и T_j, сосредоточенных в разных степенях, после сдвига они сосредоточены в одной степени, и между ними существует ненулевой морфизм, индуцирующий цепное отображение. Имеем $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) \neq 0$. □

Лемма 3. *Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j, имеют пересечение, состоящее более, чем из одной компоненты связности. Тогда хотя бы одно из пространств*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]), \quad \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$$

ненулевое.

Доказательство. Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j, имеют пересечение, состоящее хотя бы из трех компонент связности. Тогда одна из них является изолированной вершиной k (в силу того, что Γ – дерево, с одного цикла на другой можно попасть только пройдя по единственной вершине, а так как диаграммы имеют пересечение, состоящее хотя бы из трех компонент связности, они рядом с этой вершиной имеют разную ориентацию). Следовательно, для одной из диаграмм эта вершина является стоком (например, T_i), для другой – истоком (соответственно, для T_j). Из Ae_k в себя существует ненулевой морфизм, образ которого является цоколем Ae_k, он индуцирует ненулевой морфизм из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j, имеют пересечение, состоящее из двух компонент связности. Обе компоненты лежат на одном цикле, так как Γ – дерево. Пусть $(i_1, \ldots, i_2)$, $(j_1, \ldots, j_2)$ – подструны T_i и T_j, соответствующие ограничениям T_i и T_j на этот цикл, их вершины на цикле упорядочены следующим образом i_1, i_2, j_1, j_2, причем i_1 может совпадать с j_2, а j_1 может совпадать с i_2. Из Ae_{i_1} в Ae_{j_2} существует ненулевой морфизм (в случае, когда i_1 совпадает с j_2, – это морфизм, образ которого является цоколем Ae_{i_1}), он индуцирует цепное отображение. □

Лемма 4. *Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j, пересекаются по вершине k, тогда условие*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$$

выполнено тогда и только тогда, когда либо k не является выделенной вершиной ни T_i, ни T_j, либо k является стоком степени один и T_i, и T_j, либо k является истоком степени один и T_i, и T_j.

Доказательство. Заметим, что не существует цикла, одновременно пересекающегося с T_i и T_j, но не содержащего вершину k (так как Γ – дерево). Вершина k может быть стоком степени один, истоком степени один или невыделенной вершиной как T_i, так и T_j, а значит необходимо рассмотреть 6 случаев.

1) Пусть k не является выделенной вершиной ни T_i, ни T_j. Тогда выделенные вершины T_i и выделенные вершины T_j лежат на разных циклах и между соответствующими проективными модулями нет ненулевых морфизмов.

2) Пусть k является стоком степени один и T_i, и T_j. Пространство $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$ нулевое тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_2} \to Ae_k, (Ae_{j_2} \to Ae_k)[-1]) = 0$$

(где i_2, j_2 – соседние с k выделенные вершины диаграмм T_i и T_j, соответственно), но это верно, так как единственный (с точностью до константы) ненулевой морфизм из $\mathrm{Hom}_A(Ae_k, Ae_{j_2})$ не индуцирует цепное отображение. $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$ по тем же причинам.

3) Случай, когда k – исток степени один и T_i, и T_j, аналогичен предыдущему.

Проверим, что во всех остальных случаях хотя бы одно из пространств $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ не равно нулю.

4) Случай, когда k – исток T_i и сток T_j : гомоморфизм $Ae_k \to Ae_k$, образом которого является цоколь Ae_k, аннулирует любой необратимый гомоморфизм между неразложимыми проективными модулями, поэтому он индуцирует ненулевое цепное отображение из

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]).$$

5) Случай, когда k является истоком T_i, но не является выделенной вершиной T_j. Пусть $(j_1, \dots, j_2)$ – подструна T_j, содержащая k, $(i_1, \dots, k)$ – подструна T_i, а соответствующие вершины расположены на одном цикле в порядке j_2, k, j_1. Морфизм $Ae_{j_1} \to Ae_k$ индуцирует цепное отображение из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$.

6) Случай, когда k является стоком T_i, но не является выделенной вершиной T_j аналогичен предыдущему. □

Если T_i и T_j пересекаются больше, чем по одной вершине, то возможны следующие типы пересечения: пересечение, у которого одна крайняя вершина (вершина степени один) является стоком, а другая истоком; пересечение, у которого обе крайние вершины являются стоками; пересечение, у которого обе крайние вершины являются истоками.

Лемма 5. *Пусть пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Предположим, что диаграммы, соответствующие T_i и T_j, пересекаются так, что одна крайняя вершина пересечения является стоком, а другая истоком.* $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ *тогда и только тогда, когда $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$ или $T_j|_{T_i} \subseteq T_i|_{T_j}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случаи, когда крайние вершины пересечения совпадают с выделенными вершинами лишь одной из диаграмм (случаи 1 и 2), после этого рассмотрим случаи, когда крайние вершины пересечения совпадают с выделенными вершинами обеих диаграмм (случаи 3, 4, 5).

1) Предположим, что $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$, крайние вершины пересечения T_i и T_j не совпадают с выделенными вершинами T_j. Соответствующие сужения на колчане алгебры A расположены следующим образом:

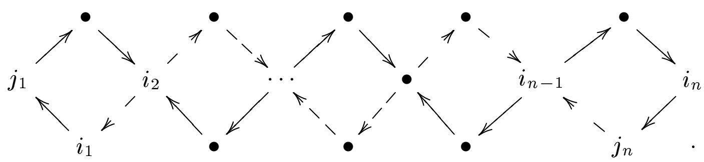
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dr] & \\
i_1 \arrow[ur] & & i_2 \arrow[ur, dashed] \arrow[dl, dashed] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dl] & & \bullet \arrow[ur, dashed] \arrow[dl, dashed] & & i_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dl] & & i_n \arrow[dl] \\
 & j_1 \arrow[ul] & & \bullet \arrow[ul] & & \bullet \arrow[ul, dashed] & & \bullet \arrow[ul] & & j_n \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd},
$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – выделенные вершины T_i (содержащиеся в сужении), причем вершины с нечетными индексами – истоки, а вершины с четными индексами – стоки; $j_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, j_n$ – выделенные вершины T_j (содержащиеся в сужении), причем вершины с нечетными индексами – истоки, а вершины с четными индексами – стоки ($i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$). Дифференциалы на сужениях T_i и T_j индуцированы морфизмами из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$ и в $Ae_{i_{k+1}}$ для нечетных $k = 3, \ldots, n-3$, а также морфизмами из Ae_{i_1} в Ae_{i_2}, из Ae_{j_1} в Ae_{i_2}, из $Ae_{i_{n-1}}$ в $Ae_{i_{n-2}}$ и Ae_{i_n}, из $Ae_{i_{n-1}}$ в $Ae_{i_{n-2}}$ и Ae_{j_n}. Соответствующие морфизмы заданы домножением на единственные ненулевые пути в колчане алгебры A. Как было замечено ранее, между проективными слагаемыми компонент T_i и T_j, не попавшими в сужения, нет ненулевых морфизмов.

Предположим, что из сужения T_j в сужение T_i, сдвинутое на -1, существует ненулевое цепное отображение g. Оно должно быть ненулевым на некотором проективном слагаемом компоненты T_j (сконцентрированной в степени 1). Пусть g, суженное на Ae_{i_k}, не равняется нулю, где k четно. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, композиция g и дифференциала должна быть равна нулю, а композиция $Ae_{i_k} \to Ae_{i_{k-1}} \to Ae_{i_k}$ (где $Ae_{i_k} \to Ae_{i_{k-1}}$ – соответствующая ненулевая компонента g, а $Ae_{i_{k-1}} \to Ae_{i_k}$ – соответствующая компонента дифференциала) не равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k+1}}$, но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{k+1}} \to Ae_{i_k} \to Ae_{i_{k+1}}$ не равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из $Ae_{i_{k+2}}$ в $Ae_{i_{k+1}}$. Продолжая таким образом, получаем, что у g должна быть ненулевая компонента из Ae_{j_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{j_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ не равна нулю. Следовательно, если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, то g не может быть цепным отображением. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k+1}}$, то доказательство того, что g не может быть цепным отображением, проводится аналогично.

Перейдем к $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$. Предположим, что из сужения T_i в сужение T_j, сдвинутое на -1, существует ненулевое цепное отображение g. Оно должно быть ненулевым на некотором проективном слагаемом компоненты T_i (сконцентрированной в степени 1). Пусть g, суженное на Ae_{i_k}, не равняется нулю, где k четно. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, композиция g и дифференциала должна быть равна нулю, а для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{k-1}} \to Ae_{i_k} \to Ae_{i_{k-1}}$ не равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из $Ae_{i_{k-2}}$ в $Ae_{i_{k-1}}$, но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{k-2}} \to Ae_{i_{k-1}} \to Ae_{i_{k-2}}$ не равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из $Ae_{i_{k-2}}$ в $Ae_{i_{k-3}}$. Таким образом, получаем, что у g должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{j_1}, но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{j_1}$ не равна нулю. Следовательно, если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, то g не может быть цепным отображением. Аналогично доказывается, что, если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k+1}}$, то g не может быть цепным отображением. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{j_1}, то сразу получаем, что g не может быть цепным отображением.

2) Рассмотрим случай, когда $T_i|_{T_j} \nsubseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \nsubseteq T_i|_{T_j}$, причем $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$. Это выполнено, если исток степени один сужения T_i не лежит в пересечении, а сток степени один T_i лежит в пересечении (либо то же выполнено для T_j, но этот случай полностью аналогичен). Соответствующие поддиаграммы на колчане алгебры A расположены следующим образом (в обозначениях из пункта 1):



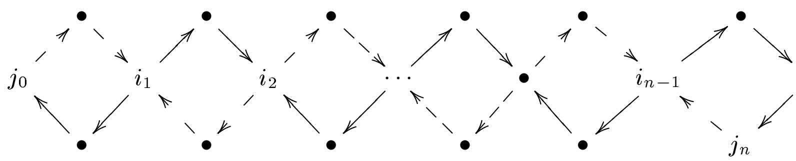
Построим ненулевой морфизм из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$. Опишем, как этот морфизм действует на компонентах: выберем произвольный ненулевой морфизм $Ae_{i_2} \to Ae_{j_1}$. Заметим, что композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{j_1}$ (где первая стрелка – ненулевая компонента дифференциала T_i, а вторая – соответствующий ненулевой морфизм) равна нулю. Выберем морфизм $Ae_{i_2} \to Ae_{i_3}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_2} \to Ae_{j_1} \to Ae_{i_2}$ равнялась композиции

$Ae_{i_2} \to Ae_{i_3} \to Ae_{i_2}$ с противоположным знаком. Выберем морфизм $Ae_{i_4} \to Ae_{i_3}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_3} \to Ae_{i_2} \to Ae_{i_3}$ равнялась композиции $Ae_{i_3} \to Ae_{i_4} \to Ae_{i_3}$ с противоположным знаком; будем продолжать строить морфизм таким образом, пока не дойдем до $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}}$, который подобран так, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_{n-2}} \to Ae_{i_{n-1}}$ равняется композиции $Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}}$ с противоположным знаком. Видим, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{j_n}$ равняется нулю. Таким образом построено ненулевое цепное отображение из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

3) Пусть теперь $i_1 = j_1$, а $i_n \neq j_n$, предположим, что i_n лежит в сужении T_j, как и ранее мы используем обозначения из пункта 1. Возможны следующие три варианта: а) вершина i_1 является истоком степени один и у T_i, и у T_j; б) вершина i_1 является истоком степени один у T_i, но не у T_j; в) вершина i_1 является истоком степени один у T_j, но не у T_i.

а) Вершина i_1 является истоком степени один и у T_i, и у T_j. Как и раньше видим, что если из сужения T_j в сужение T_i, сдвинутое на -1, существует ненулевое цепное отображение g, то оно должно иметь ненулевую компоненту из Ae_{i_2} в $Ae_{j_1} = Ae_{i_1}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{j_1} = Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением, а значит $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$. Понятно, что $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$ по тем же причинам.

б) Вершина i_1 является истоком степени один у T_i, но не у T_j. Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j, соседняя с j_1, но отличная от i_2. На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:

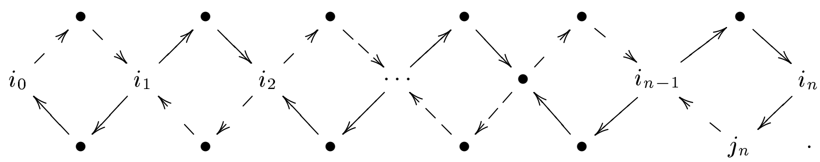


.

Как и раньше видим, что если из сужения T_i в сужение T_j, сдвинутое на -1, существует ненулевое цепное отображение g, то оно должно иметь ненулевую компоненту из Ae_{i_2} в Ae_{i_1}, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением, а значит

$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. Перейдем к $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$. Если из сужения T_j в сужение T_i, сдвинутое на -1, существует ненулевое цепное отображение g, то оно должно иметь ненулевую компоненту из Ae_{j_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{j_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением.

в) Вершина i_1 является истоком степени один у T_j, но не у T_i. Пусть i_0 – отмеченная вершина T_i, соседняя с i_1, но отличная от i_2. На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:

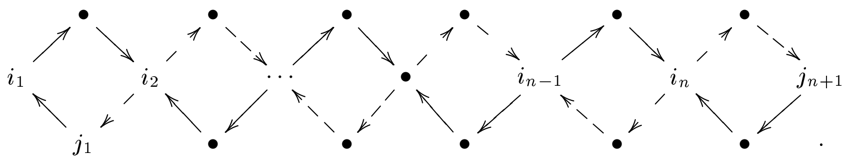


Построим ненулевой морфизм из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$. Этот морфизм строится аналогично случаю, когда $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$, но $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$. Построение морфизма на компонентах необходимо начать с морфизма $Ae_{i_0} \to Ae_{i_1}$. Будем строить морфизм описанным ранее образом, пока не дойдем до $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}}$, который подобран так, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_{n-2}} \to Ae_{i_{n-1}}$ равняется композиции $Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}}$ с противоположным знаком. Видим, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{j_n}$ равняется нулю. Таким образом построено ненулевое цепное отображение из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

4) Пусть теперь $i_n = j_n$, $i_1 \neq j_1$, как и ранее мы используем обозначения из пункта 1. Предположим, что i_1 лежит в сужении T_j. Возможны следующие три варианта: а) вершина i_n является стоком степени один и у T_i, и у T_j; б) вершина i_n является стоком степени один у T_i, но не у T_j; в) вершина i_n является стоком степени один у T_j, но не у T_i.

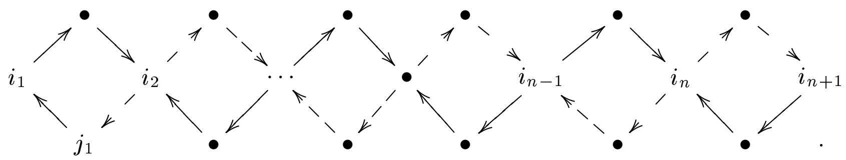
а) Вершина i_n является стоком степени один и у T_i, и у T_j. У ненулевого морфизма из сужения T_i в сужение T_j, сдвинутое на -1, должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{j_n} = Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. По тем же причинам, что и раньше, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$.

б) Вершина i_n является стоком степени один у T_i, но не у T_j. Пусть j_{n+1} – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_n, но отличная от i_{n-1}. На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



У ненулевого морфизма из сужения T_i в сужение T_j, сдвинутое на -1, должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{j_1}, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{j_1}$ не равна нулю, следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. Если из сужения T_j в сужение T_i, сдвинутое на -1, существует ненулевое цепное отображение g, то оно должно иметь ненулевую компоненту из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением.

в) Вершина i_n является стоком степени один у T_j, но не у T_i. Пусть i_{n+1} – отмеченная вершина T_i, соседняя с i_n, но отличная от i_{n-1}. На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



Построим ненулевой морфизм из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$. Этот морфизм строится аналогично случаю, когда $T_i|_{T_j} \nsubseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \nsubseteq T_i|_{T_j}$, причем $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$. Начнем построение морфизма на компонентах с отображения $Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}$. Будем строить морфизм описанным ранее образом, пока не дойдем до $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}}$, который подобран так, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_{n-2}} \to Ae_{i_{n-1}}$ равняется композиции $Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}}$ с противоположным знаком. Видим, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ не равняется нулю. Выберем морфизм $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n+1}}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n+1}} \to Ae_{i_n}$ равнялась композиции

$Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ с противоположным знаком. Таким образом построено ненулевое цепное отображение из $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$.

5) Наконец, рассмотрим случай $i_1 = j_1$, $i_n = j_n$, как и ранее мы используем обозначения из пункта 1. Возможны следующие подслучаи: а) i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один T_i, но не T_j; б) i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один и T_i, и T_j; в) i_1 – исток степени один и T_i, и T_j, i_n – сток степени один T_i, но не T_j; г) i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один T_j, но не T_i.

а) Вершина i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один T_i, но не T_j. Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_1, но отличная от i_2, а j_{n+1} – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_n, но отличная от i_{n-1}. У ненулевого морфизма из сужения T_i в сужение T_j, сдвинутое на -1, должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{i_1}, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. У морфизма из сужения T_j в сужение T_i, сдвинутое на -1, должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$.

б) Вершина i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один и T_i, и T_j. Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_1, но отличная от i_2. Как и в предыдущем случае, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. У ненулевого морфизма из сужения T_j в сужение T_i, сдвинутое на -1, должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$.

в) Вершина i_1 – исток степени один и T_i, и T_j, i_n – сток степени один T_i, но не T_j. По тем же причинам, что и в случае (а), имеем $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$. У ненулевого морфизма из сужения T_i в сужение T_j, сдвинутое на -1, должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{i_1}, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$.

г) Вершина i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один T_j, но не T_i. Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_1, но отличная от i_2, а i_{n+1} – отмеченная вершина T_i, соседняя с i_n, но отличная от i_{n-1}. Начнем построение ненулевого отображения из T_j в $T_i[-1]$ с произвольного ненулевого морфизма $Ae_{j_0} \to Ae_{i_1}$. Выберем морфизм

$Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{j_0} \to Ae_{i_1}$ равнялась композиции $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}$ с противоположным знаком. Как и прежде будем строить морфизм из T_j в $T_i[-1]$ так, чтобы его композиция с дифференциалами T_j и $T_i[-1]$ равнялась 0. Закончим построение, выбрав морфизм $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n+1}}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n-1}} \to Ae_{i_n}$ равнялась композиции $Ae_{i_n} \to Ae_{i_{n+1}} \to Ae_{i_n}$ с противоположным знаком. Таким образом, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) \neq 0$. □

Лемма 6. *Пусть пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Предположим, что диаграммы, соответствующие T_i и T_j, пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются стоками.* $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:* 1) $T_i|_{T_j} \nsubseteq T_j|_{T_i}$ *и* $T_j|_{T_i} \nsubseteq T_i|_{T_j}$; 2) *диаграммы T_i и T_j имеют общую вершину степени один.*

Лемма 7. *Пусть пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Предположим, что диаграммы, соответствующие T_i и T_j, пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются истоками.* $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:* 1) $T_i|_{T_j} \nsubseteq T_j|_{T_i}$ *и* $T_j|_{T_i} \nsubseteq T_i|_{T_j}$; 2) *диаграммы T_i и T_j имеют общую вершину степени один.*

Доказательство. Доказательство лемм 6 и 7 проводится полностью аналогично доказательству леммы 5 и оставляется читателю. □

Замечание 3. Из лемм 5, 6 и 7 видно, что вне зависимости от типа пересечения, если две диаграммы имеют общий сток или исток степени один, то прямая сумма соответствующих комплексов является частично наклоняющим комплексом.

Теперь разберем случай, когда хотя бы один из рассматриваемых комплексов сосредоточен в одной степени. Заметим, что если P – неразложимый комплекс, состоящий из проективного модуля, сосредоточенного в 0, а комплекс T_i сосредоточен в степенях 0 и 1, то условие $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(P, T_i[-1]) = 0$ выполнено автоматически. Аналогично, если P сосредоточен в степени 1, то $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$.

Лемма 8. *Пусть T_i – неразложимый частично наклоняющий комплекс, соответствующий минимальному проективному представлению некоторого модуля, P – неразложимый комплекс, состоящий из проективного модуля, сосредоточенного в* 0. $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:* 1) *вершина, соответствующая P, совпадает с истоком степени один диаграммы T_i;* 2) *вершина, соответствующая P, не лежит на диаграмме T_i, и не существует цикла Υ такого, что на Υ лежат вершина, соответствующая P, и сток степени один диаграммы T_i так, что этот сток является единственной вершиной T_i, которая лежит на Υ.*

Доказательство. Нужно рассмотреть следующие случаи: 1) вершина, соответствующая P, не лежит на диаграмме T_i; 2) вершина, соответствующая P, совпадает с истоком T_i; 3) вершина, соответствующая P, совпадает со стоком T_i; 4) вершина, соответствующая P, совпадает с невыделенной вершиной T_i.

1) Если вершина, соответствующая P, не лежит ни на одном из циклов, по которым проходит T_i, то $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$. Если же вершина, соответствующая P, лежит на некотором цикле, по которому проходит T_i, причем на этом цикле лежит подструна T_i, то любой ненулевой морфизм из стока T_i, лежащего на том же цикле, в P не индуцирует цепное отображение. Следовательно, $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$. Если вершина, соответствующая P, лежит на некотором цикле, по которому проходит T_i, причем на этом цикле лежит лишь исток T_i, то из $(T_i)^1$ в P вообще нет ненулевых морфизмов. В случае, когда вершина, соответствующая P, лежит на некотором цикле, по которому проходит T_i, причем на этом цикле лежит лишь сток T_i, ненулевой морфизм из этого стока T_i в P индуцирует ненулевое цепное отображение.

2) Пусть вершина, соответствующая P, совпадает с истоком i_1 степени один диаграммы T_i. Пусть i_2 – выделенная вершина T_i, соседняя с i_1. Пространство $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1])$ нулевое тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_1} \to Ae_{i_2}, Ae_{i_1}[-1]) = 0$. Это выполнено, так как любой ненулевой морфизм $Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}$ не индуцирует цепное отображение. Пусть вершина, соответствующая P, совпадает с истоком i_2 степени 2 диаграммы T_i. Пусть i_1, i_3 – соседние с i_2 выделенные вершины T_i, тогда построим ненулевой морфизм $T_i \to P[-1]$ следующим образом. Выберем произвольное ненулевое ограничение этого морфизма на $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2}$, а ограничение на $Ae_{i_3} \to Ae_{i_2}$ выберем так, чтобы

для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_2} \to Ae_{i_1} \to Ae_{i_2}$ равнялась композиции $Ae_{i_2} \to Ae_{i_3} \to Ae_{i_2}$ с противоположным знаком, остальные компоненты положим равными нулю. Получаем, что $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) \neq 0$.

3) Если вершина, соответствующая P, совпадает со стоком i_1 диаграммы T_i, то отображение $Ae_{i_1} \to Ae_{i_1}$, образом которого является цоколь Ae_{i_1}, индуцирует ненулевое цепное отображение, и

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) \neq 0.$$

4) Осталось рассмотреть случай, когда вершина k, соответствующая P, совпадает с неотмеченной вершиной диаграммы T_i. Пусть i_1, i_2 – исток и сток подструны T_i, содержащей k. $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_1} \to Ae_{i_2}, Ae_k[-1]) = 0$. Понятно, что ненулевой морфизм $Ae_{i_2} \to Ae_k$ индуцирует цепное отображение, так как для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \to Ae_{i_2} \to Ae_k$ равна нулю. □

Лемма 9. *Пусть T_i – неразложимый частично наклоняющий комплекс, соответствующий минимальному проективному представлению некоторого модуля, P – неразложимый комплекс, состоящий из проективного модуля, сосредоточенного в* 1. $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(P, T_i[-1]) = 0$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:* 1) *вершина, соответствующая P, совпадает со стоком степени один диаграммы T_i;* 2) *вершина, соответствующая P, не лежит на диаграмме T_i, и не существует цикла Υ такого, что на Υ лежат вершина, соответствующая P, и исток степени один диаграммы T_i так, что этот исток является единственной вершиной T_i, которая лежит на Υ.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 8. □

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 10. *Пусть P_i, P_j – два неразложимых комплекса, состоящих из проективных модулей, сосредоточенных в одной степени.* $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(P_i, P_j[-1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(P_j, P_i[-1])$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:* 1) *вершины, соответствующие P_i и P_j, не лежат на одном цикле,* 2) *вершины, соответствующие P_i и P_j, лежат на одном цикле, при этом P_i и P_j сосредоточены в одной и той же степени.*

Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено.

§4. Кольца эндоморфизмов

В предыдущем пункте мы описали все двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, как суммы из s неразложимых частично наклоняющих комплексов, которые попарно удовлетворяют некоторым условиям. В этом пункте мы опишем кольца эндоморфизмов таких комплексов. Хорошо известно, что они изоморфны алгебрам, соответствующим некоторым деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Пусть T – двучленный наклоняющий комплекс, для того, чтобы описать его кольцо эндоморфизмов достаточно определить разбиение вершин колчана $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ на циклы, или, что то же самое, описать то, какие ребра дерева Брауэра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ инцидентны одной и той же вершине, и циклический порядок ребер вокруг вершин в дереве Брауэра. Вершинам колчана $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ соответствуют неразложимые слагаемые T, две вершины i, j лежат на одном цикле тогда и только тогда, когда для соответствующих им слагаемых T_i, T_j выполнено $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) \neq 0$. Это условие легко проверить с помощью хорошо известной формулы Хаппеля [13]: пусть $Q = (Q^r)_{r\in\mathbb{Z}}, R = (R^s)_{s\in\mathbb{Z}} \in A$-perf, тогда

$$\sum_i (-1)^i \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Q, R[i]) = \sum_{r,s} (-1)^{r-s} \dim_K \mathrm{Hom}_A(Q^r, R^s). \quad (1)$$

Заметим, что если $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Q, R[i]) = 0$ при всех $i \neq 0$ (например, в случае, когда Q, R – слагаемые наклоняющего комплекса), то левая часть равенства превращается в $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Q, R)$.

Напомним, что удобно считать, что в колчане алгебры A каждая вершина лежит на двух циклах. То есть, если у какой-то вершины степень 2, то мы считаем, что в ней имеется формальная петля, равная циклу, который проходит через эту вершину, и эта петля – второй цикл, содержащий эту вершину.

Предложение 1. *Пусть T_i, T_j – минимальные проективные представления неизоморфных неразложимых непроективных A-модулей такие, что их прямая сумма – частично наклоняющий комплекс. $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) \neq 0$ тогда и только тогда, когда стоки степени один диаграмм T_i и T_j лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j, которые лежат на этом цикле, либо истоки* *степени один диаграмм T_i и T_j лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j, которые лежат на этом цикле.*

Доказательство. Заметим, что условие: стоки степени один диаграмм T_i и T_j лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j, которые лежат на этом цикле, выполнено в следующих случаях: диаграммы T_i и T_j не пересекаются, их стоки степени один лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j, которые лежат на этом цикле; T_i и T_j пересекаются и имеют общий сток степени один. Случай истоков рассматривается аналогично.

По предположению прямая сумма T_i и T_j – частично наклоняющий комплекс, вычислим размерность пространства $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j)$ для случаев, описанных в теореме 1. Заметим также, что, в силу замечания 2, условие $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) \neq 0$ или условие $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$ симметрично по i и j.

1) Пусть диаграммы T_i и T_j не проходят по одному циклу, легко видеть $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

2) Пусть диаграммы T_i и T_j не пересекаются, но проходят по одному циклу Υ. Пусть на Υ лежит струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и струна $(j_1, \ldots, j_2)$, принадлежащая T_j, но эти струны не пересекаются. Следовательно,

$$\begin{aligned}\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}, Ae_{j_2} \to Ae_{j_1}) \\ = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь на Υ лежит струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и вершина, принадлежащая T_j, но не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j. Получаем $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$, так как проективные слагаемые компонент T_i и T_j не лежат на одном цикле. Если на Υ лежит сток степени один, принадлежащий T_i, и вершина, принадлежащая T_j, но не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j; или исток степени один, принадлежащий T_i, и вершина, принадлежащая T_j, но не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j, то $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$ по тем же причинам. Пусть на Υ лежат струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и вершина (j_1), принадлежащая T_j, являющаяся стоком степени один. Тогда $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}, 0 \to Ae_{j_1}) = -1 + 1 = 0$. Случай, когда на Υ лежат струна $(i_1, \ldots, i_2)$, принадлежащая T_i, и вершина (j_1), принадлежащая T_j, являющаяся истоком степени один, аналогичен предыдущему. Пусть теперь на Υ лежат вершина (i_1), принадлежащая T_i, и вершина (j_1), принадлежащая T_j, и пусть они обе являются истоками степени один. Тогда

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_1} \to 0, Ae_{j_1} \to 0) = 1.$$

Случай, когда на Υ лежат сток степени один (i_1), принадлежащий T_i, и сток степени один (j_1), принадлежащий T_j, аналогичен.

3) Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j, пересекаются по одной вершине k. Пусть k не является выделенной вершиной T_i и T_j, тогда выделенные вершины T_i и выделенные вершины T_j лежат на разных циклах, и между соответствующими проективными модулями нет ненулевых морфизмов, $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$. Пусть k является стоком степени один T_i и T_j, тогда

$$\begin{aligned}\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \to Ae_k, Ae_{j_2} \to Ae_k)\\ = -1 - 1 + 2 = 0,\end{aligned}$$

где i_2 – исток T_i, соседний с k, j_2 – исток T_j, соседний с k, причем i_2 и j_2 лежат на разных циклах. Случай, когда k – исток степени один и T_i, и T_j, аналогичен предыдущему.

4) Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j, пересекаются так, что одна крайняя вершина пересечения является стоком, а другая истоком (пересечение содержит больше одной вершины). Предположим, что $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$. Соответствующие поддиаграммы на колчане алгебры A расположены следующим образом (в случае, когда $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr, dashed] & & \bullet \arrow[dr] & \\
i_1 \arrow[ur] & & i_2 \arrow[ur, dashed] \arrow[dl, dashed] & & \cdots \arrow[ur] \arrow[dl] & & \bullet \arrow[ur, dashed] \arrow[dl, dashed] & & i_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dl] & & i_n \arrow[dl] \\
 & j_1 \arrow[ul] & & \bullet \arrow[ul] & & \bullet \arrow[ul, dashed] & & \bullet \arrow[ul] & & j_n \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd},$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – выделенные вершины T_i (содержащиеся в сужении), вершины с нечетными индексами – истоки, вершины с четными индексами – стоки; $j_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, j_n$ – выделенные вершины T_j (содержащиеся в сужении), вершины с нечетными индексами – истоки, вершины с четными индексами – стоки. Между следующими проективными модулями пространство гомоморфизмов одномерно: Ae_{i_k} и $Ae_{i_{k-1}}, Ae_{i_{k+1}}$ для $k = 2, 3, \ldots, n-1$; между Ae_{i_1}, Ae_{i_2}, Ae_{j_1}, а также между $Ae_{i_{n-1}}$ и $Ae_{i_{n-2}}$, и между Ae_{i_n}, $Ae_{i_{n-1}}$ и Ae_{j_n}. Как было замечено ранее, между проективными слагаемыми компонент T_i и T_j, не попавшими в сужения T_j и T_i, нет ненулевых морфизмов. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^0)\\ = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n-1,\end{aligned}$$

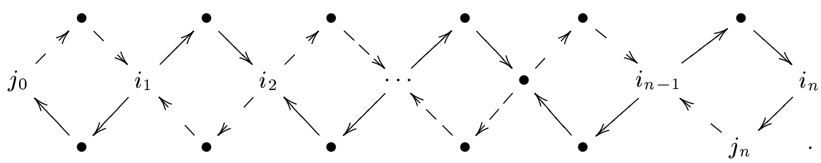
следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \operatorname{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Пусть теперь $i_1 = j_1$, $i_n \neq j_n$, предположим, что i_n лежит в сужении T_j, вершина i_1 является истоком степени один и у T_i, и у T_j. Тогда

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = n, \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^0)\\ = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n-1,\end{aligned}$$

следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \operatorname{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

Пусть вершина i_1 является истоком степени один у T_i, но не у T_j. Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j, соседняя с j_1, но отличная от i_2. На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



Имеем

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = n,\\ \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n-1,\end{aligned}$$

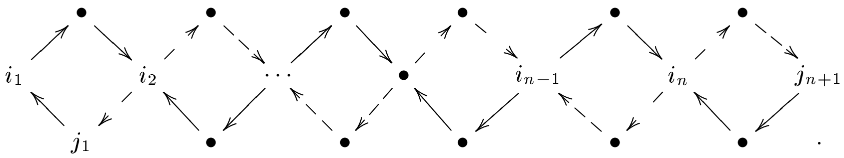
следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \operatorname{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Пусть теперь $i_n = j_n$, $i_1 \neq j_1$. Предположим, что i_1 лежит в сужении T_j, а вершина i_n является стоком степени один и у T_i, и у T_j. Тогда

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = n-1,\\ \dim_K \operatorname{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n,\end{aligned}$$

следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \operatorname{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

Пусть теперь вершина i_n является стоком степени один у T_i, но не у T_j. Пусть j_{n+1} – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_n, но отличная от i_{n-1}. На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



Тогда,

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = n-1,$$
$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n,$$

следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Наконец, рассмотрим случай $i_1 = j_1$, $i_n = j_n$. Пусть вершина i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один T_i, но не T_j. Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_1, но отличная от i_2, а j_{n+1} – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_n, но отличная от i_{n-1}. Тогда

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^0)$$
$$= \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n,$$

следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Пусть теперь вершина i_1 – исток степени один T_i, но не T_j, i_n – сток степени один и T_i, и T_j. Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j, соседняя с i_1, но отличная от i_2. Тогда

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n,$$
$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = n-1,$$

следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

Пусть вершина i_1 – исток степени один и T_i, и T_j, i_n – сток степени один T_i, но не T_j. Тогда

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n,$$
$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = n-1,$$

следовательно, по формуле (1) получаем $\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

Как мы замечали ранее, возможны следующие типы пересечений двух диаграмм: пересечение, у которого одна крайняя вершина является стоком, а другая истоком (этот случай мы только что разобрали); пересечение, у которого обе крайние вершины являются стоками; пересечение, у которого обе крайние вершины являются истоками. Случаи, когда обе крайние вершины являются стоками, или обе крайние вершины являются истоками, разбираются аналогично пункту 4 и оставляются читателю. □

Предложение 2. *Пусть T_i – минимальное проективное представление неразложимого непроективного A-модуля, P – неразложимый комплекс, сосредоточенный в степени* 0, *и пусть $T_i \bigoplus P$ – частично наклоняющий комплекс.* $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда исток степени один диаграммы T_i и вершина, соответствующая P, лежат на одном цикле, и этот исток – единственная вершина T_i, лежащая на этом цикле.*

Доказательство. Обозначим через j вершину, соответствующую P. Понятно, что если j и диаграмма T_i не лежат на одном цикле, то $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = 0$. Пусть j и диаграмма T_i лежат на одном цикле Υ, но не пересекаются. Возможны следующие варианты: 1) на Υ лежит $(i_1, \ldots, i_2)$ – подструна T_i, 2) на Υ лежит лишь исток T_i степени один, обозначим его через k. В первом случае

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \to Ae_{i_1}, Ae_j) = 0.$$

Во втором случае

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Ae_k, Ae_j) = 1.$$

Пусть теперь j лежит на диаграмме T_i, то есть j совпадает с истоком степени один T_i. Обозначим через k выделенный сток T_i, соседний с j. Тогда

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Ae_j \to Ae_k, Ae_j) = 2 - 1 = 1.$$

□

Предложение 3. *Пусть T_i – минимальное проективное представление неразложимого непроективного A-модуля, P – неразложий комплекс, сосредоточенный в степени* 1, *и пусть $T_i \bigoplus P$ – частично наклоняющий комплекс.* $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) \neq 0$ *тогда и только тогда,* *когда сток степени один диаграммы T_i и вершина, соответствующая P, лежат на одном цикле, и этот сток – единственная вершина T_i, лежащая на этом цикле.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 2. □

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 11. *Пусть P_i, P_j – комплексы, состоящие из неразложимых проективных модулей, сосредоточенные в одной степени, и пусть $P_i \bigoplus P_j$ – частично наклоняющий комплекс.* $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_i, P_j) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда P_i и P_j сосредоточены в одной и той же степени, и вершины, соответствующие P_i и P_j, лежат на одном цикле.*

Из описания матрицы Картана получаем, что в $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ существует два типа циклов: циклы, соответствующие истокам, и циклы, соответствующие стокам. В циклы, соответствующие истокам, входят все неразложимые частично наклоняющие комплексы такие, что истоки степени один их диаграмм лежат на некотором зафиксированном цикле Υ алгебры A таким образом, что это единственные вершины этих диаграмм на Υ, а также все неразложимые комплексы, соответствующие проективным модулям, сосредоточенным в 0, таким, что вершины, соответствующие этим проективным модулям, лежат на Υ. В циклы, соответствующие стокам, входят все неразложимые частично наклоняющие комплексы такие, что стоки степени один их диаграмм лежат на некотором зафиксированном цикле Υ алгебры A таким образом, что это единственные вершины этих диаграмм на Υ, а также все неразложимые комплексы, соответствующие проективным модулям, сосредоточенным в 1, таким, что вершины, соответствующие этим проективным модулям, лежат на Υ.

Опишем циклический порядок на неразложимых слагаемых T, лежащих на цикле, соответствующем истокам. Для этого введем некоторое подобие циклического лексикографического порядка. Зафиксируем некоторую вершину Υ и будем считать ее наибольшей (вершину, в которую идет стрелка из зафиксированной вершины, будем считать меньше, следующую еще меньше, и так далее), а остальные вершины Υ будем считать упорядоченными линейно. Диаграмме с истоком степени один на Υ поставим в соответствие упорядоченный набор вершин колчана A следующим образом: первая вершина – это исток степени один, лежащий на Υ, дальше берем все выделенные вершины диаграммы по порядку. Комплексу, состоящему из неразложимого проективного модуля, поставим в соответствие набор, состоящий из вершины, соответствующей этому модулю. Далее рассмотрим обычный лексикографический порядок на наборах вершин (за исключением того, что пустое место на четной позиции мы считаем наименьшим, а на нечетной – наибольшим): если первая вершина набора, соответствующего T_i, меньше первой вершины набора, соответствующего T_j, то $T_i < T_j$; если эти вершины равны, то вторые вершины наборов, соответствующих T_i и T_j, лежат на одном цикле, первая вершина наборов тоже лежит на этом цикле, будем считать первую вершину наибольшей (среди вершин) на этом цикле, тогда на нем можно рассмотреть линейный порядок (так же, как выше), и если вторая вершина набора, соответствующего T_i, меньше второй вершины набора, соответствующего T_j, то $T_i < T_j$. Если все вершины от первой до i-ой наборов, соответствующих T_i и T_j, совпадают, а $i+1$-ые различны, то i-ая вершина обоих наборов и $i+1$-ые вершины лежат на одном цикле. Считая i-ую вершину наибольшей (среди вершин, т.е. без учета пустого места, которое может быть бóльшим), можем сравнить $i+1$-ые. Описанный линейный порядок индуцирует циклический порядок стандартным способом.

Напомним, что мы отождествляем неразложимые слагаемые T и ребра дерева Брауэра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$.

Предложение 4. *В дереве Брауэра алгебры* $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ *циклический порядок ребер, инцидентных вершине, соответствующей циклу истоков, совпадает с введенным циклическим порядком.*

Доказательство. Пусть Υ – некоторый цикл алгебры A. Обозначим цикл $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующий истокам, лежащим на Υ, через Ψ. Допустим, что на цикле Ψ лежит r вершин. Тогда для того, чтобы установить циклический порядок на Ψ, достаточно построить r морфизмов между соответствующими слагаемыми T так, чтобы их последовательная композиция не была гомотопна 0. Сначала построим морфизмы, идущие из большего слагаемого в меньшее для линейного порядка, из которого склеен циклический, после чего построим морфизм из наименьшего слагаемого в наибольшее.

Построим морфизм $\alpha_{j,i}$ комплексов по наборам, соответствующим слагаемым T_i, T_j, у которых совпадают первые k вхождений, а $k+1$-ые вхождения отличаются, $T_i < T_j$. Обозначим через $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ проективные модули, которые соответствуют первым k вершинам из наборов T_i, T_j, обозначим через $P_{i_{k+1}}$ модуль, соответствующий $k+1$-ой вершине из набора T_i, через $P_{i_{k+2}}$ – модуль, соответствующий $k+1$-ой вершине из набора T_j. Теперь зададим морфизм $\alpha_{j,i} : T_j \to T_i$ так, что на совпадающих модулях $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ – это тождественный морфизм, а $\alpha_{j,i}|_{P_{i_{k+2}} \to P_{i_{k+1}}}$ – домножение на единственный путь в колчане A между соответствующими вершинами. Все остальные морфизмы нулевые. Проверим, что отображение, полученное таким образом, является цепным. Коммутативность квадрата

$$\begin{tikzcd}
T_j^0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{j,i}^0"] & T_j^1 \arrow[d, "\alpha_{j,i}^1"] \\
T_i^0 \arrow[r] & T_i^1
\end{tikzcd}$$

можно проверять отдельно для квадратов, составленных из прямых слагаемых $T_j^0, T_j^1, T_i^0, T_i^1$. Квадраты, на вертикальных сторонах которых стоят только тождественные отображения или только нулевые отображения, коммутативны. Пусть k нечетно, квадрат вида

$$\begin{tikzcd}
P_{i_k} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & P_{i_{k+2}} \arrow[d, "\alpha_{j,i}^1"] \\
P_{i_k} \arrow[r] & P_{i_{k+1}}
\end{tikzcd}$$

коммутативен, так как в алгебре A путь из вершины, соответствующей P_{i_k}, в вершину, соответствующую $P_{i_{k+1}}$, проходит через вершину, соответствующую $P_{i_{k+2}}$. Если $P_{i_{k+1}} = 0$, то квадрат остается коммутативным.

Пусть k четно, квадрат вида

$$\begin{tikzcd}
P_{i_{k+2}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{j,i}^0"] & P_{i_k} \arrow[d, "1"] \\
P_{i_{k+1}} \arrow[r] & P_{i_k}
\end{tikzcd}$$

коммутативен, так как в алгебре A путь из вершины, соответствующей $P_{i_{k+2}}$, в вершину, соответствующую P_{i_k}, проходит через вершину, соответствующую $P_{i_{k+1}}$. Если $P_{i_{k+2}} = 0$, то квадрат остается коммутативным. Второй квадрат, содержащий $\alpha_{j,i}|_{P_{i_{k+2}} \to P_{i_{k+1}}}$, коммутативен, так как модули, которые в него входят, лежат на разных циклах и соответствующие композиции равны 0.

Построим морфизм из наименьшего слагаемого T в наибольшее, $\alpha_m : T_{\min} \to T_{\max}$. Проективные модули, соответствующие первым вершинам из наборов $T_{\min}, T_{\max}$, обозначим $P_{\min}, P_{\max}$ соответственно. Если $P_{\min} \neq P_{\max}$, то в качестве компоненты $\alpha_m | P_{\min} \to P_{\max}$ возьмем соответствующий единственный путь, а все остальные компоненты положим равными нулю. Если $P_{\min} = P_{\max}$, то в качестве компоненты $\alpha_m | P_{\min} \to P_{\max}$ возьмем домножение на длинный путь, то есть отображение, образом которого является цоколь $P_{\max}$, а все остальные компоненты положим равными нулю. Коммутативность

$$\begin{tikzcd} T^0_{\min} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0_m"] & T^1_{\min} \arrow[d, "\alpha^1_m"] \\ T^0_{\max} \arrow[r] & T^1_{\max} \end{tikzcd}$$

следует из коммутативности

$$\begin{tikzcd} P_{\min} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0_m"] & P_{m_1} \arrow[d, "0"] \\ P_{\max} \arrow[r] & P_{m_2}, \end{tikzcd}$$

где P_{m_1}, P_{m_2} – модули, соответствующие вторым вхождениям наборов $T_{\min}, T_{\max}$ соответственно (заметим, что P_{m_1}, P_{m_2} могут быть равны 0). Если $P_{\min} \neq P_{\max}$, то $P_{\min}$ и P_{m_2} лежат на разных циклах, следовательно, композиция $P_{\min} \to P_{\max} \to P_{m_2}$ равна 0. Если $P_{\min} = P_{\max}$, то композиция $P_{\min} \to P_{\max} \to P_{m_2}$ равна 0, так как образом $P_{\min} \to P_{\max}$ является цоколь $P_{\max}$.

Цикл Ψ состоит из r вершин, нам осталось проверить, что последовательная композиция r построенных морфизмов не гомотопна 0. То есть, что для любого неразложимого слагаемого T (обозначим его T_i) композиция $\alpha_{i,i} : T_i \to T_i$ не гомотопна 0. Пусть P_{i_1} – модуль, соответствующий первой вершине набора T_i. Легко видеть, что $\alpha_{i,i}|_{P_{i_1} \to P_{i_1}}$ – это домножение на длинный путь, то есть отображение, образом которого является цоколь P_{i_1}, все остальные компоненты $\alpha_{i,i}$ равны нулю.

Проверим, что этот морфизм не гомотопен 0. Если $T_i = P_{i_1}$, то проверять нечего. Предположим, что $T_i \neq P_{i_1}$, так же для определенности предположим, что в наборе, соответствующем T_i четное число элементов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, обозначим через d дифференциал T_i. Предположим, что существует гомотопия $h : T_i^1 \to T_i^0$ такая, что $hd|_{T^0 \to T^0} = \alpha_{i,i}|_{T^0 \to T^0}$, $dh|_{T^1 \to T^1} = \alpha_{i,i}|_{T^1 \to T^1}$. Тогда $hd|_{P_{i_1} \to P_{i_1}}$ – это домножение на длинный путь, $hd|_{P_j \to P_j} = 0$, где $j = i_3, i_5, \dots, i_{k-1}$, $dh|_{P_j \to P_j} = 0$, где $j = i_2, i_4, \dots, i_k$. Условие $dh|_{P_{i_k} \to P_{i_k}} = 0$ влечет $h|_{P_{i_k} \to P_{i_{k-1}}} = 0$. Условия $h|_{P_{i_k} \to P_{i_{k-1}}} = 0$ и $hd|_{P_{i_{k-1}} \to P_{i_{k-1}}} = 0$ влекут $h|_{P_{i_{k-2}} \to P_{i_{k-1}}} = 0$. По индукции получаем, что $h|_{P_{i_2} \to P_{i_1}} = 0$, а это противоречит условию, что $hd|_{P_{i_1} \to P_{i_1}}$ – это домножение на длинный путь. □

Опишем циклический порядок на неразложимых слагаемых T, лежащих на цикле, соответствующем стокам. Он отличается от порядка на цикле, соответствующем истокам, только тем, что диаграммам соответствует упорядоченный набор вершин, начинающийся со стока степени один, лежащего на Υ, и тем, что пустое место на нечетной позиции мы считаем наименьшим, а на четной – наибольшим. А именно, зафиксируем некоторую вершину Υ и будем считать ее наибольшей, а остальные вершины Υ будем считать упорядоченными линейно. Диаграмме со стоком степени один на Υ поставим в соответствие упорядоченный набор вершин колчана A следующим образом. Первая вершина – это сток степени один, лежащий на Υ, дальше берем все выделенные вершины диаграммы по порядку. Комплексу, состоящему из неразложимого проективного модуля, поставим в соответствие набор, состоящий из вершины, соответствующей этому модулю. Далее рассмотрим лексикографический порядок на наборах вершин (за исключение того, что пустое место на нечетной позиции мы считаем наименьшим, а на четной наибольшим) так же, как в предыдущем случае, этот линейный порядок индуцирует циклический. Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 4.

Предложение 5. *В дереве Брауэра алгебры* $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ *циклический порядок ребер, инцидентных вершине, соответствующей циклу стоков, совпадает с введенным циклическим порядком.*

Предложение 6. *Над любой алгеброй A, соответствующей дереву Брауэра, существует двучленный наклоняющий комплекс T такой, что алгебра* $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ *изоморфна алгебре, соответствующей звезде Брауэра.*

Доказательство. Зафиксируем некоторый цикл Υ алгебры A. Для каждой вершины x алгебры A построим двучленный неразложимый частично наклоняющий комплекс T_x так, чтобы сумма по всем вершинам давала искомый T. Все слагаемые T будут лежать на цикле $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующем истокам. Если вершина x лежит на цикле Υ, то в качестве T_x возьмем комплекс, состоящий из одного проективного модуля, соответствующего x, сосредоточенного в 0. Если вершина x не лежит на цикле Υ, то рассмотрим диаграмму такую, что один ее конец – это x, а другой – некоторая вершина y, лежащая на Υ, причем y – единственная вершина этой диаграммы лежащая на Υ, и y – исток. Поскольку граф Брауэра алгебры A – дерево, то такая диаграмма существует и она единственная; в качестве T_x возьмем неразложимый комплекс, соответствующий этой диаграмме. Из построения видно, что $T := \bigoplus_{x\in A} T_x$ является наклоняющим комплексом: во-первых, в T нужное количество неизоморфных прямых слагаемых, во-вторых, T является частично наклоняющим. Если диаграммы, соответствующие различным вершинам x и y, не пересекаются, то пользуемся леммой 2, если пересекаются, то замечанием 3, если одна из вершин лежит на Υ, то леммой 8, если обе вершины лежат на Υ, то леммой 10. □

Замечание 4. Понятно, что аналогично построению из предложения 6 мы могли бы построить наклоняющий комплекс T такой, что алгебра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ изоморфна алгебре, соответствующей звезде Брауэра и все слагаемые T лежат на цикле $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующем стокам.

Замечание 5. Над алгеброй A, соответствующей дереву Брауэра с s ребрами, существует ровно $2(s+1)$ неизоморфных базисных двучленных комплексов T таких, что что алгебра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$ изоморфна алгебре, соответствующей звезде Брауэра. Каждый цикл из $s+1$ цикла алгебры A может порождать комплекс T, все слагаемые которого лежат на цикле $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующем стокам или истокам.

Литература

1. R. Rouquier, A. Zimmermann, *Picard groups for derived module categories.* — Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), no. 1, 197–225.
2. I. Muchtadi-Alamsyah, *Braid action on derived category of Nakayama algebras.* — Comm. Algebra **36** (2008), no. 7, 2544–2569.

3. M. Schaps, E. Zakay-Illouz, *Braid group action on the refolded tilting complex of the Brauer star algebra.* — In: Proceedings ICRA IX (Beijing). Vol. 2 (2002), pp. 434–449.
4. H. Abe, M. Hoshino, *On derived equivalences for selfinjective algebras.* — Comm. Algebra **34** (2006), no. 12, 4441–4452.
5. T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory.* To appear in Compos. Math.; `arXiv:1210.1036` (2012).
6. A. Chan, *Two-term tilting complexes of Brauer star algebra and simple-minded systems.* `arXiv:1304.5223` (2013).
7. М. А. Антипов, А. О. Звонарёва, *Частично наклоняющие двучленные комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 5–25.
8. И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, *Неразложимые представления группы Лоренца.* — УМН **23** (1968), no. 2(140), 3–59.
9. B. Wald, J. Waschbüsch, *Tame biserial algebras.* — J. Algebra **95** (1985), 480–500.
10. J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence.* — J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.
11. P. Gabriel, C. Riedtmann, *Group representations without groups.* — Comment. Math. Helv. **54** (1979), 240–287.
12. D. Happel, *Auslander–Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras.* — Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 641–648.
13. D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1988.

Zvonareva A. O. Two-term tilting complexes over Brauer tree algebras.

In this paper, two-term tilting complexes over a Brauer tree algebra with multiplicity one are described using a classification of indecomposable two-term partial tilting complexes obtained earlier in a joint paper with M. Antipov. The endomorphism rings of such complexes are computed.

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия В.О., д. 29Б, Санкт-Петербург,
199178, Россия
E-mail: `zvozvo@list.ru`

Поступило 24 марта 2014 г.