Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

И. Б. Жуков

ЭЛЕМЕНТАРНО АБЕЛЕВ КОНДУКТОР

Данная работа посвящена изучению ветвления в расширениях полных дискретно нормированных полей L/K с несовершенным полем вычетов характеристики p и развивает подход, начатый в [1].

В работе показано, что из произвольного конечного расширения L/K можно получить расширение LK'/K' с нулевой глубиной ветвления, где K'/K представляет собой бесконечное элементарно абелево p-расширение с ограниченной глубиной ветвления. В частности, в качестве K'/K подходят, при достаточно большом i, расширения K_i/K из [1] – композиты всех циклических расширений степени p с числом ветвления Суона, не превосходящим заданного $i > 0$. Рассмотрение минимального такого i ведёт к определению нового инварианта ветвления для расширения L/K, который можно рассматривать как аналог кондуктора и использовать для определения фильтрации ветвления в случае несовершенного поля вычетов.

Изучению свойств этого инварианта и сравнению с другими версиями кондуктора (см. [2, §6]) будет посвящена отдельная статья.

Обозначения и терминология

Мы свободно используем обозначения из [1]. В частности, буква K всюду обозначает полное дискретно нормированное поле характеристики $p > 0$ такое, что $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$. Например, K может быть двумерным локальным полем $\mathbb{F}_q((t))((\pi))$.

Расширение L/K степени p^2 будем называть смешанным, если

$$e(L/K) = f_{\text{ins}}(L/K) = p.$$

Пусть E – поле, являющееся бесконечным алгебраическим расширением K с конечной глубиной ветвления (например, $E = K_i$, см. [1]), L/E – конечное расширение. Тогда глубина ветвления L/E определяется как

$$d_K(L/E) = d_K(L/K) - d_K(E/K);$$

Ключевые слова: полное дискретно нормированное поле, несовершенное поле вычетов, двумерное локальное поле, ветвление, кондуктор.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00393-А.

очевидно, для $K' \subset K$ выполнено $d_{K'}(L/E) = e(K/K')d_K(L/E)$.

§1. Вспомогательные утверждения

При доказательстве следующей леммы мы будем пользоваться тем, что для циклического расширения L/K степени p, определяемого многочленом Артина–Шрайера $X^p - X - a$ с минимальным $-v_K(a)$, его число ветвления Суона $s(L/K)$ и глубина ветвления $d_K(L/K)$ связаны формулой

$$\frac{s(L/K)}{e(L/K)} = \frac{1}{p-1}d_K(L/K) = \frac{-v_K(a)}{p}.$$

Лемма 1.1. *Пусть N – натуральное число; K'/K и K''/K – циклические расширения степени p; обозначим $M = K'K''$, $d_1 = d_K(K'/K)$, $d_2 = d_K(K''/K)$, $\tilde{d}_2 = d_K(M/K')$. Предположим, что*

(i) *M/K смешанное;*

(ii) *$p\tilde{d}_2 - d_2 - \max(0, (p-1)(d_2 - d_1)) \geqslant \frac{p-1}{p}N$;*

(iii) *$pd_1 \geqslant N$.*

Тогда любой $a \in K^*$ в поле M представляется в виде $b^p + c$, где $v_M(c) \geqslant v_M(a) + N$.

Доказательство. Пусть сперва K'/K дикое, тем самым M/K' свирепое. Согласно лемме 3.5 в [3], можно выбрать униформизирующие элементы π_K и $\pi_{K'}$ в K и K' соответственно такие, что $\pi_K = \pi_{K'}^p + \delta$, где $v_{K'}(\delta) = p + pd_1$.

Расширение K''/K задаётся многочленом $X^p - X - a$, где $-v_K(a) = \frac{p}{p-1}d_2$. Используя представление $\pi_K = \pi_{K'}^p + \delta$, мы получаем, что

$$a \in \mathfrak{m}_{K'}^{-i_0} + \mathfrak{m}_{F((\pi_{K'}^p))}^{-j_0},$$

где F – произвольное подполе представителей в K; $j_0 = \frac{p}{p-1}d_2$ и $i_0 = -\frac{p^2}{p-1}d_2 + pd_1$. Переходя от $X^p - X - a'$ к многочлену $X^p - X - a'$ с минимальным $-v(a')$, который также задаёт M/K', получаем

$$a' \in \mathfrak{m}_{K'}^{-i} + \mathfrak{m}_{F((\pi_{K'}^p))}^{-j},$$

где $j = \frac{p}{p-1}\tilde{d}_2$ и $i = \max(\frac{p}{p-1}d_2, -\frac{p^2}{p-1}d_2 + pd_1)$. Тогда из леммы 1.2 в [1] следует, что $F \subset \mathcal{O}_{K'}^p + \mathfrak{m}_{K'}^{pj-i}$. Поскольку $pj - i \geqslant N$, отсюда следует утверждение леммы.

Рассмотрим оставшийся случай, когда расширение K'/K свирепое, а M/K' дикое. Тогда K'/K задаётся многочленом $X^p - X - \pi^{-pj}c$, где

$\bar{c} \notin (\bar{K})^p$, π – униформизирующий в K. Поскольку $\bar{c}$ представляет собой дифференциальный базис $\bar{K}$ над простым подполем, в K найдётся подполе представителей F, содержащее c. Тогда по лемме 1.2 в [1] (для $i = j = \frac{d_1}{p-1}$) получаем $F \subset \mathcal{O}_{K'}^p + \mathfrak{m}_{K'}^{(p-1)j}$. Поскольку $K = F((\pi))$, остаётся проверить, что $\pi = \pi_M^p + \delta$, где π_M – униформизирующий в M, и $v_M(\delta) \geqslant p+N$. Лемма 3.5 в [3] даёт такое представление для некоторого униформизирующего $\pi_{K'}$ поля K', после чего можно использовать формулу из доказательства этой леммы, связывающую $\pi_{K'}$ с априорно заданным униформизирующим $\pi_0 = \pi$. □

Следствие 1.1.1. *Пусть $D > \varepsilon$ – положительные рациональные числа; K'/K, K''/K и L/K – циклические расширения степени p; обозначим $M = K'K''$, $d_1 = d_K(K'/K)$, $d_2 = d_K(K''/K)$, $\tilde{d}_2 = d_K(M/K')$. Предположим, что*

(i) *M/K смешанное;*

(ii) *$D \leqslant d_1, d_2, \tilde{d}_2 \leqslant D + \varepsilon$;*

(iii) *$d_K(L/K) \leqslant D - \frac{p}{p-1}\varepsilon$.*

Тогда $d_K(ML/M) \leqslant \frac{1}{p} d_K(L/K)$.

Доказательство. Пусть L/K задаётся многочленом Артина–Шрайера $X^p - X - a$ с минимальным $-v_K(a)$; положим $N = -(p-1)v_K(a)$. Имеем

$$\begin{aligned} p\tilde{d}_2 - d_2 - \max(0, (p-1)(d_2 - d_1)) &\geqslant pD - (D+\varepsilon) - (p-1)\varepsilon \\ &= (p-1)D - p\varepsilon \\ &\geqslant (p-1)d_K(L/K) \\ &= \frac{p-1}{p}N. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$pd_1 \geqslant pD > pd_K(L/K) = N.$$

Получаем по лемме, что в поле M выполнено $a = b^p + c$, где $v_M(c) \geqslant pv_K(a) + N = v_K(a)$; с другой стороны, $v_M(b^p) = v_M(a)$, откуда $v_M(b) = v_K(a)$. Поскольку ML/M может быть задано многочленом $X^p - X - (b+c)$, заключаем

$$\begin{aligned}
d_K(ML/M) &= \frac{1}{p} d_M(ML/M) \\
&\leqslant -\frac{p-1}{p^2} v_M(b+c) \\
&\leqslant -\frac{p-1}{p^2} v_K(a) \\
&= \frac{1}{p} d_K(L/K). \qquad \square
\end{aligned}$$

Лемма 1.2. *Пусть L/K – элементарно абелево расширение степени p^2,*

$$D = \min\{d_K(M/K) | M \subset L, [M : L] = p\},$$
$$d = \min\{d_K(L/M) | M \subset L, [M : L] = p\}.$$

Предположим, что $d > D/p$. Тогда L/K является смешанным.

Доказательство. Предположим, что $\bar{L}/\bar{K}$ сепарабельное. Тогда $\frac{p^2}{p-1}d$ и $\frac{p}{p-1}D$ представляют собой минимальный скачок ветвления L/K в верхней и нижней нумерации соответственно, откуда $pd = D$, что противоречит условию. Случай $e(L/K) = 1$ рассматривается аналогично, поскольку из $[K : K^p] = p$ следует, что $\mathcal{O}_L$ порождается одним элементом как $\mathcal{O}_K$-алгебра. $\square$

§2. Конструкция кондуктора

Теорема 2.1. *Пусть L/K – конечное сепарабельное расширение. Тогда найдётся $i_0 \geqslant 0$ такое, что для любого $i \geqslant i_0$, где i – натуральное число, не кратное p, и любого i-полного расширения E/K выполнено $d_K(EL/E) = 0$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что L/K нормальное. Положим $h = d_K(L/K)$ и покажем, что $i_0 = 8h$ (грубая оценка) удовлетворяет условию. Рассмотрим башню полей

$$K = K^{(0)} \subset K^{(0+)} \subset K^{(1)} \subset K^{(1+)} \subset \dots$$

из определения i-полного расширения. Индукцией по s будет показано, что $d_K(LK^{(s)}/K^{(s)}) \leqslant h/p^s$, откуда в пределе получается утверждение теоремы.

Пусть L^{tr}/K – максимальное ручное подрасширение в L/K; тогда L/L^{tr} раскладывается в башню циклических расширений степени p. Таким образом, достаточно показать, что для любого промежуточного циклического расширения N/F степени p в L/K выполнено $d_K(NK^{(s)}/FK^{(s)}) \leqslant d_K(N/F)/p^s$.

При всех s имеем

$$d_K(K^{(s+)}/K^{(s)}) = d_K(K^{(s+1)}/K^{(s+)}) = \frac{p-1}{p^{s+1}}i.$$

Более того, если M – любое строго промежуточное поле в $K^{(s+1)}/K^{(s)}$, то нетрудно проверить, что $d_K(M/K^{(s)}) = \frac{p-1}{p^{s+1}}i$. Поскольку по индукционному предположению $d_K(FK^{(s)}/K^{(s)}) \leqslant h/p^s$, получаем

$$\frac{p-1}{p^{s+1}}i - \frac{h}{p^s} \leqslant d_K(MF/K^{(s)}F) \leqslant \frac{p-1}{p^{s+1}}i$$

и

$$\frac{p-1}{p^{s+1}}i - \frac{h}{p^s} \leqslant d_K(K^{(s+1)}F/MF) \leqslant \frac{p-1}{p^{s+1}}i$$

для всех таких M. Поскольку

$$\frac{p-1}{p^{s+1}}i - \frac{h}{p^s} > \frac{1}{p} \cdot \frac{p-1}{p^{s+1}}i,$$

из леммы 1.2 следует, что расширение $K^{(s+1)}F/K^{(s)}F$ смешанное. Из условия $i \geqslant 8h$ нетрудно получить, что для $K^{(s+1)}F/K^{(s)}F$ и $K^{(s)}N/K^{(s)}F$ выполняются условия следствия 1.1.1 с $D = \frac{p-1}{p^{s+1}}i - \frac{h}{p^s}$ и $\varepsilon = \frac{h}{p^s}$. Тем самым

$$d_K(NK^{(s+1)}/FK^{(s+1)}) \leqslant \frac{1}{p} d_K(NK^{(s)}/FK^{(s)}),$$

и остаётся использовать индукционное предположение. □

Замечание 2.1.1. Для i-полного расширения E/K условие $d_K(LE/E) = 0$ равносильно $d_K(LK_i/K_i) = 0$. В самом деле, из предложения 2.1 и теоремы 2.2 в [1] следует, что $d_K(K_i/E) = 0$.

Данное свойство позволяет для произвольного конечного сепарабельного расширения L/K определить предварительный вариант кондуктора $c_0(L/K)$ как наименьшее натуральное, взаимно простое с p число i такое, что $d_K(LK_i/K_i) = 0$. Мы модифицируем это определение так, чтобы кондуктор мог принимать дробные значения (что может быть актуальным для неабелевых расширений), натуральные значения, кратные p (для абелевых расширений, не являющихся элементарно абелевыми), а также значение 0 (для ручных расширений).

Предложение 2.2. *Пусть L/K – конечное сепарабельное расширение, K'/K – конечное ручное расширение с $e(K'/K) = l$. Тогда*

$$l(c_0(L/K) - 1) < c_0(LK'/K') \leqslant lc_0(L/K).$$

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из того, что для i-полного E/K расширение EK'/K' является li-полным. $\square$

Для конечного сепарабельного расширения L/K определим его элементарно абелев кондуктор как

$$c_{\mathrm{ea}}(L/K) = \inf\left\{\frac{c_0(LK'/K')}{e(K'/K)}\,\middle|\, K'/K \text{ конечное ручное}\right\}.$$

Из последнего предложения сразу следует, что

$$c_0(L/K) - 1 \leqslant c_{\mathrm{ea}}(L/K) \leqslant c_0(L/K).$$

Литература

1. И. Б. Жуков, *Ветвление элементарно абелевых расширений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 106–114.
2. L. Xiao, I. Zhukov, *Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions.* — Preprint, 2013, `http://math.usask.ca/fvk/Xiao-Zhukov.pdf`
3. Е. Ф. Лысенко, *Ветвление циклического расширения степени p^2 полного дискретно нормированного поля простой характеристики p с несовершенным полем вычетов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 153–172.

Zhukov I. B. Elementary abelian conductor.

The paper is devoted to ramification theory for a class of complete discrete valuation fields that includes 2-dimensional local fields of prime characteristic p. It is proved that any finite extension of such a field can be modified into an extension with zero ramification depth by means of an infinite elementary abelian base change.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: igor.zhukov@mail.ru

Поступило 4 мая 2014 г.