Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

А. Э. Дружинин

СОХРАНЕНИЕ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ ПРЕДПУЧКОВ С Witt-ТРАНСФЕРАМИ ПРИ ПУЧКОВАНИИ ПО НИСНЕВИЧУ.

§1. Введение

В. А. Воеводский в [1] построил триангулированную категорию мотивов $DM^-(k)$, И. А. Панин поставил задачу построения триангулированной категории Witt-мотивов. Необходимым этапом решения этой задачи является доказательство гомотопической инвариантности пучка Нисневича, ассоциированного с гомотопически инвариантным предпучком с Witt-трансферами. В данной статье это и доказано (Теорема 4).

В параграфе 2 фиксируется некоторое поле k ($\mathrm{char}(k) \neq 2$), даётся определение категории Wor, объекты которой – k-гладкие аффинные многообразия. Там же указывается функтор из категории гладких аффинных многообразий над k в категорию Wor. Предпучки абелевых групп с Witt-трансферами на категории гладких аффинных многообразий над полем k определяются как предпучки абелевых групп на категории Wor. Далее формулируются основные свойства категории Wor и предпучков с Witt-трансферами, а также дается определение (ожидаемое) гомотопической инвариантности для таких предпучков. Наконец, определяется категория $\overline{Wor}$, объекты которой те же, что и в категории Wor, а морфизмы – это морфизмы в категории Wor по модулю наивного отношения $\mathbb{A}^1$-эквивалентности. Легко видеть, что гомотопически инвариантные предпучки с Witt-трансферами – это в точности те предпучки на категории Wor, которые пропускаются через категорию $\overline{Wor}$.

В параграфе 3 доказываются две теоремы об изоморфизмах вырезания (Теоремы 1 и 2). Теорема 1 – это теорема об изоморфизме

Ключевые слова: предпучок с трансферами, гомотопическая инвариантность, изоморфизм вырезания.

Настоящая работа поддержана грантом РФФИ 14-01-31095. Автор благодарен И. А. Панину за постановку задачи.

вырезания на аффинной прямой для гомотопически инвариантного предпучка с Witt-трансферами. Данная теорема утверждает, что гомоморфизм

$$\frac{\mathscr{F}(V-z)}{\mathscr{F}(V)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)},$$

индуцированный вложением $U \hookrightarrow V$ – окрестностей по Зарискому точки $z \in \mathbb{A}^1$, является изоморфизмом. Доказательство осуществляется путём построения специального морфизма в категории $\overline{Wor}$, являющегося обратным к вложению $U \hookrightarrow V$. Теорема 2 – это теорема об изоморфизме этального вырезания в размерности 1 для гомотопически инвариантного предпучка с Witt-трансферами. Данная теорема утверждает, что для этального морфизма существенно гладких локальных одномерных схем, $\pi\colon U \to U'$, задающего изоморфизм на полях вычетов замкнутых точек z и z', индуцированный гомоморфизм

$$\pi^*\colon \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathscr{F}(U'-z')}{\mathscr{F}(U')},$$

является изоморфизмом. Доказательство осуществляется путём построения специальных морфизмов в категории $\overline{Wor}$, являющихся в некотором смысле обратными к π.

В параграфе 4 из изоморфизмов вырезания выводится Теорема 4, утверждающая гомотопическую инвариантность пучка Нисневича, ассоциированного с гомотопически инвариантным предпучком с Witt-трансферами. А именно, доказывается, что для любого аффинного k-гладкого многообразия X естественный гомоморфизм

$$\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(X) \simeq \mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1 \times X)$$

является изоморфизмом.

§2. Предпучки с Witt-трансферами

В настоящей статье k – это поле характеристики не равной 2. Пусть Sm_k – категория аффинных гладких многообразий над полем k. Определим аддитивную категорию Wor_k.

Определение 1 (Wor_k).

- $\mathrm{Ob}\, Wor_k = \mathrm{Ob}\, Sm$;
- $Wor_k(X,Y)$ – *группа Витта категории пучков* $\mathscr{O}(X \times Y)$-*модулей, конечно порождённых проективных над* $\mathscr{O}(X)$, *с*

двойственностью $P \mapsto \widehat{P_{\mathscr{O}(X)}} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(X)}(P, \mathscr{O}(X))$ *(в соответствии с определением* 27 *из* [2]);

- *композиция морфизмов* $\Phi \in Wor_k(X,Y)$ *и* $\Psi \in Wor_k(Y,Z)$ *определяется как тензорное произведение над* $\mathscr{O}(Y)$ *соответствующих квадратичных пространств (см. Замечание* 1.1*);*
- *тождественный морфизм определяется диагональю, т.е. пучком* ${}_{\mathscr{O}(X)}\mathscr{O}(X)_{\mathscr{O}(X)}$ *и каноническим изоморфизмом* $\mathscr{O}(X) \simeq \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(X)}(\mathscr{O}(X), \mathscr{O}(X))$ *(такое квадратичное пространство будем обозначать* $E_{\mathscr{O}(X)}$*).*

Замечание 1.

1. Для определения композиции используются канонические гомоморфизмы:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(Y)}(P_Y, \mathscr{O}(Y)) \otimes_{\mathscr{O}(Y)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(X)}(P_X, \mathscr{O}(X))\\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(Y)}(P_Y, \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(X)}(P_X, \mathscr{O}(X)))\\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(X)}(P_Y \otimes_{\mathscr{O}(Y)} P_X, \mathscr{O}(X)),\end{aligned}$$

первый из которых является изоморфизмом, когда P_Y – конечно порождённый проективный над $\mathscr{O}(Y)$.

2. Определим функтор $Sm_k \to Wor_k$ как тождественный на объектах и переводящий регулярное отображение $f\colon X \to Y$ в морфизм, определяемый пучком ${}_{\mathscr{O}(X)}\mathscr{O}(X)_{\mathscr{O}(Y)}$ и каноническим изоморфизмом $\mathscr{O}(X)_{\mathscr{O}(Y)} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(X)}(\mathscr{O}(X)_{\mathscr{O}(Y)}, \mathscr{O}(X))$.

3. Квадратичное пространство, определяющее композицию $\Phi \in Wor_k(X,Y)$ с регулярным отображением $f\colon Y \to Z$, является “прямым образом” квадратичного пространства, определяющего Φ, вдоль $\mathrm{id}_X \times f$.

3′. Квадратичное пространство, определяющее композицию $\Phi \in Wor_k(Y,Z)$ с регулярным отображением $f\colon X \to Y$, является обратным образом квадратичного пространства, определяющего Φ, вдоль $f \times \mathrm{id}_Z$.

4. Wor_k можно расширить на существенно гладкие схемы, присоединив их как формальные пределы (другими словами, рассмотреть подкатегорию категории про-объектов Wor_k, состоящую из диаграмм, в которых все морфизмы являются открытыми вложениями).

5. Для $K = k(X)$ – поля частных произвольного гладкого аффинного многообразия X, имеется функтор (расширение скаляров) из категории Wor_k в категорию Wor_K.

6. Категорию Wor_k можно расширить на пары (X_1, X_2), где X_2 – открытое подмножество X_1, определив морфизмы между парами

$$i_X\colon X_2 \hookrightarrow X_1, \quad i_Y\colon Y_2 \hookrightarrow Y_1:$$

$$\begin{aligned} &Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \\ &\quad = \operatorname{coker}(Wor_k(X_1, Y_2) \xrightarrow{(i_Y\circ -, -\circ i_X)} Wor_k^{\cdot\to\cdot}(X_2 \to X_1, Y_2 \to Y_1)), \end{aligned}$$

где $Wor_k^{\cdot\to\cdot}$ – категория стрелок. Т.е. морфизм $Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))$ определяется парой $\Phi_i \in Wor_k(X_i, Y_i)$, $i = 1, 2$, согласованной с вложениями (т.е. $\Phi_1 \circ i_X = i_Y \circ \Phi_2$), и пары вида $(i_Y \circ \Xi, \Xi \circ i_X)$, для $\Xi \in Wor_k(X_1, Y_2)$ считаются равными 0.

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "\Phi_2"] & X_1 \arrow[d, "\Phi_1"] \\ Y_2 \arrow[r, hook, "i_Y"] & Y_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "\Xi\circ i_X"'] & X_1 \arrow[d, "i_Y\circ\Xi"] \arrow[dl, "\Xi"] \\ Y_2 \arrow[r, hook, "i_Y"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Определим также категорию $\overline{Wor_k}$, в которой гомотопные морфизмы отождествляются. А именно, дадим

Определение 2 ($\overline{Wor_k}$).

- $\operatorname{Ob} \overline{Wor_k} = \operatorname{Ob} Wor_k$.
- $\overline{Wor_k}(X, Y) = \operatorname{coker}(Wor_k(\mathbb{A}^1 \times X, Y) \xrightarrow{(-\circ i_0)-(-\circ i_1)} Wor_k(X, Y))$, *где* $i_0, i_1\colon X \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times X$ *– нулевое и единичное сечения* $\mathbb{A}^1 \times X$.

Замечание 2. 1. В категории $\overline{Wor_k}$ проекции $\mathbb{A}^1 \times X \to X$ являются изоморфизмами для всех X.

2. Категорию $\overline{Wor_k}$ можно расширить на существенно гладкие схемы, добавив их как формальные пределы.

3. Аналогично Wor_k, категория $\overline{Wor_k}$ расширяется на пары (X_1, X_2):

$$\begin{aligned} &\overline{Wor_k}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \\ &\qquad = \operatorname{coker}(Wor_k((\mathbb{A}^1 \times X_1, \mathbb{A}^1 \times X_2), (Y_1, Y_2)) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow{(-\circ i_0)-(-\circ i_1)} Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))). \end{aligned}$$

Определение 3 (Предпучок с Witt-трансферами)**.** *Предпучок абелевых групп с* Witt-*трансферами – это произвольный предпучок*

$$F\colon Wor_k \to Ab$$

абелевых групп на категории Wor_k.

Замечание 3. 1. Для гладкой схемы X и её точки x определим росток произвольного предпучка F стандартным образом, положив

$$\mathscr{F}\Big(\varprojlim_{z\in U\subset X} U\Big) = \varinjlim_{z\in U\subset X} \mathscr{F}(U).$$

Зададим значения произвольного предпучка на существенно гладкой схеме как индуктивный предел значений этого предпучка на гладких схемах.

2. Для произвольного предпучка абелевых групп $\mathscr{F}$ можно определить предпучок $\mathscr{F}'$ на парах (X_1, X_2) (X_2 – открытое в X_1):

$$\mathscr{F}'((X_1, X_2)) = \frac{\mathscr{F}(X_2)}{\mathscr{F}(X_1)};$$

При этом, если $\mathscr{F}$ – предпучок с Witt-трансферами, то определённый таким образом $\mathscr{F}'$ является функтором на расширенной в смысле замечания 1.6 категории Wor_k.

3. *Пучком* с Witt-трансферами называется предпучок с Witt-трансферами, ограничение которого на категорию Sm_k является пучком.

4. Предпучок с Witt-трансферами называется *гомотопически инвариантным*, если он гомотопически инвариантен после ограничения на Sm_k. Такой предпучок пропускается через $Wor_k \to \overline{Wor_k}$. Обратно, всякий предпучок на $Wor_k \to \overline{Wor_k}$ гомотопически инвариантен.

§3. Изоморфизмы вырезания

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{F}$ *– гомотопически инвариантный предпучок с* Witt-*трансферами, тогда для двух вложенных окрестностей по Зарискому* $U \subset V$ *точки* z *в* ${\mathbb{A}^1}_K$ *(для* $K = k(X)$ *– поле частных многообразия* X*) ограничение*

$$i^*\colon \frac{\mathscr{F}(V-z)}{\mathscr{F}(V)} \to \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)}$$

является изоморфизмом (i *обозначает вложение* U *в* V*).*

Замечание 4. 1. Предпучок $\mathscr{F}$ можно ограничить на схемы над K, и в терминах замечания 3.2 теорема 1 означает, что $i^*\colon \mathscr{F}'(V, V-z) \to \to \mathscr{F}'(U, U-z)$ – изоморфизм.

2. Поскольку гомотопически инвариантный предпучок с Witt-трансферами как предпучок на категории Wor_k пропускается через категорию $\overline{Wor_k}$, то теорема 1 следует из следующей леммы.

Лемма 3.1. *Морфизм включения* $[i]\colon (U, U-z) \to (V, V-z)$ *в* $\overline{Wor_k}$ *является изоморфизмом.*

Замечание 5. a) Чтобы найти правый обратный к $[i]$ в $\overline{Wor_K}$ достаточно найти элементы $\Phi \in Wor_K((V, V-z), (U, U-z))$ и $\Theta \in \in Wor_K((V \times \mathbb{A}^1, (V-z) \times \mathbb{A}^1), (V, V-z))$ такие, что

$$\Theta \circ j_0 = i \circ \Phi,\ \Theta \circ j_1 = \mathrm{id}, \tag{3.1}$$

где j_0, j_1 – вложения нулевого и единичного сечений в $(V, V-z) \times \mathbb{A}^1$.

b) Чтобы найти левый обратный к $[i]$ в $\overline{Wor_K}$ достаточно найти элементы $\Psi \in Wor_K((V, V-z), (U, U-z))$ и $\Xi \in Wor_K((U \times \mathbb{A}^1, (U - - z) \times \mathbb{A}^1), (U, U-z))$ такие, что

$$\Xi \circ j_0 = \Psi \circ i,\ \Xi \circ j_1 = \mathrm{id}, \tag{3.2}$$

где j_0, j_1 – вложения нулевого и единичного сечений в $(U, U-z) \times \mathbb{A}^1$.

a) Чтобы найти элементы Φ и Θ, удовлетворяющие свойствам (3.1) и (3.2), достаточно найти

1. конечно порождённый $K[U \times V]$-модуль P (проективный над $K[V]$) и симметрический $K[U \times V]$-линейный изоморфизм $\phi : P \simeq \simeq \mathrm{Hom}(P, K[V])$,

2. конечно порождённый $K[V \times V \times \mathbb{A}^1]$-модуль H (проективный над $K[V \times \mathbb{A}^1]$) и симметрический $K[V \times V \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм $\psi : H \simeq \mathrm{Hom}(H, K[V \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что выполнены следующие свойства:

3. канонические отображения

$$P \otimes_{K[V]} K[V-z] \to K[U-z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V-z],$$
$$H \otimes_{K[V]} K[V-z] \to K[V-z] \otimes_{K[V]} H \otimes_{K[V]} K[V-z]$$

являются изоморфизмами (здесь одна из структур $K[V]$-модуля на H подразумевается правой, а другая – левой). Условие 3 означает, что (P, ϕ) и (H, ψ) задают морфизмы пар.

4. в группе Витта категории $K[V \times V]$-модулей, конечно порождённых, проективных над второй компонентой $K[V]$, с функтором двойственности $\mathrm{Hom}_{K[V]}(-, K[V])$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \big[(H,\psi) \otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V\times 0]\big] &= \big[\,{}_{K[V]}K[U] \otimes {}_{K[U]}(P,\phi)\big] \\ \big[(H,\psi) \otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V\times 1]\big] &= \big[E_{K[V]}\big]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

(Условие 4 означает выполнение равенств (3.1)).

Рассмотрим $V \times V$ и $U \times V$ как открытые подмножества в $\mathbb{A}^2_K$ и обозначим координаты соответственно X и Y. Положим

$$P = K[U \times V]/(f_0)$$
$$H = K[V \times \mathbb{A}^1 \times V]/(f)$$

где $f_0 \in K[X,Y]$ и $f \in K[X,Y,t]$ – многочлены, имеющие достаточно большую степень n и старший коэффициент 1 по X, и такие, что

$$f_0\big|_{(z\cup D)\times V} = (X-Y)^n,\ f_0\big|_{(V\setminus U)\times V} = 1$$
$$f\big|_{(z\cup D)\times V\times\mathbb{A}^1} = (X-Y)^n,\ f\big|_{\mathbb{A}^1\times V\times 0} = f_0,\ f\big|_{\mathbb{A}^1\times V\times 1} = (X-Y)^n.$$

(где $D = {\mathbb{A}^1}_K \setminus V$). Многочлен f_0, удовлетворяющий указанным свойствам, можно найти по интерполяционной теореме, а f положим равным $f_0 \cdot (1-t) + (X-Y)^n \cdot t$.

Структуру квадратичного пространства ψ на H зададим с помощью отображения

$$F = (f, \mathrm{pr}_{V\times\mathbb{A}^1})\colon S = \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 = T.$$

Для этого рассмотрим кольцо $A = K[T]$ и кольцо $B = K[S]$, рассматриваемое как A-алгебра посредством гомоморфизма F^*. Ясно, что B как A-модуль является конечно порожденным и свободным. Изоморфизм A-модулей $\omega(B/A) \simeq \mathrm{Hom}_A(B,A)$, построенный в утверждении 2.1 из [4], и тривиализации канонических классов $\omega_{S/K}$ и $\omega_{T/K}$ задают некоторую структуру квадратичного пространства на B как на A-модуле.

Обратный образ этой квадратичной формы вдоль вложения $V \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow T$ $((v,t) \mapsto (0,v,t))$ даст искомую квадратичную форму ψ на H. Требуемая структура квадратичного пространства ϕ на P определяется как обратный образ квадратичного пространства ψ на H относительно вложения $j_0 : V \hookrightarrow V \times \mathbb{A}^1$. Ясно, что тогда выполняется первое из равенств (3.3).

Для обеспечения второго из равенств (3.3) сначала проверяется, что для любого нечётного n и любого симметрического $K[V \times V]$-линейного изоморфизма $K[V\times V]/(X-Y)^n \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}_{K[V]}(K[V\times V]/(X-Y)^n, K[V])$ найдется обратимая функция в $\lambda \in K[V]$ такая, что в группе $Wor(V,V)$ имеет место равенство $[K[V \times V]/(X-Y)^n, \theta] = [K[V \times V]/(X-Y), \lambda]$. Заменяя квадратичные пространства ψ, ϕ и θ на $(\lambda)^{-1}\psi$, $(\lambda)^{-1}\phi$ и $(\lambda)^{-1}\theta$ соответственно, мы обеспечим выполнение каждого из равенств в (3.3). Лемма доказана и Теорема 1 тоже доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{F}$ – гомотопически инвариантный предпучок с* Witt-*трансферами, и $\pi\colon X' \to X$ – этальный морфизм гладких кривых над полем K, являющимся полем частных некоторого гладкого аффинного многообразия. Пусть $z \in X$– замкнутая точка такая, что $(\pi)^{-1}(z)$ состоит из одной точки, скажем z', и индуцированный на полях вычетов этих точек гомомофизм является изоморфизмом. Тогда π индуцирует изоморфизм*

$$\pi^*\colon \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathscr{F}(U'-z)}{\mathscr{F}(U')},$$

где $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$, $U' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',z'})$.

Замечание 6. Подробное доказательство этой теоремы приведено в [7]. В терминах замечания 3.2 теорема 2 означает, что

$$i^*\colon \mathscr{F}'(U, U-z) \to \mathscr{F}'(U', U'-z)$$

– изоморфизм.

Лемма 3.2. *Пусть $\pi\colon X \to X'$– этальный морфизм гладких кривых с тривиальными каноническими классами, z и z' – точки X и X' такие, что $\pi(z') = z$ и поля вычетов z и z' изоморфны,*

$$U = \varprojlim_{z\in V\subset X} V, \quad U' = \varprojlim_{z'\in V'\subset X'} V',$$

тогда:

a) *существует $\Phi \in Wor_K((U,U-z),(X',X'-z'))$ такой, что $[\pi\circ\Phi] = [i]$ в $\overline{Wor_K}((U,U-z),(X,X-z))$;*

b) *существует $\Psi \in Wor_K((U,U-z),(X',X'-z'))$ такой, что $[\Psi\circ\pi] = [i']$ в $\overline{Wor_K}((U',U'-z'),(X',X'-z'))$.*

Замечание 7. Утверждение Леммы 3.2 означает, что в $\overline{Wor_K}((U, U - z), (X, X - z'))$

$$[\pi \circ \Phi] = [i] + [\Omega], \text{ где } \Omega \in Wor_K(U, X - z) \quad \text{и}$$
$$[\Psi \circ \pi] = [i'] + [\Omega'], \text{ где } \Omega' \in Wor_k(U', X' - z').$$

Это может быть обеспечено следующими коммутативными диаграммами в Wor_K.

$$\begin{tikzcd}
 & (U-z)\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\Theta'"] & U\times\mathbb{A}^1 \arrow[dd, "\Theta"] & \\
(U-z) \arrow[r, hook] \arrow[ur, "j_0"] \arrow[dr, "\pi\circ\Phi"'] & U \arrow[ur] \arrow[dr] & & (U-z) \arrow[r, hook] \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[dl, "i+\Omega"] & U \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & X-z \arrow[r, hook] & X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (U'-z')\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\Xi'"] & U\times\mathbb{A}^1 \arrow[dd, "\Xi"] & \\
(U'-z') \arrow[r, hook] \arrow[ur, "j_0"] \arrow[dr, "\Psi\circ\pi"'] & U' \arrow[ur] \arrow[dr] & & (U'-z') \arrow[r, hook] \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[dl, "i'+\Omega'"] & U \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & X'-z \arrow[r, hook] & X' &
\end{tikzcd},$$

где j_0 и j_1 – нулевое и единичное сечения.

§4. Гомотопическая инвариантность ассоциированного пучка

Теорема 3. *Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с* Witt-*трансферами, ассоциированный пучок в топологии Зариского $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}$ гомотопически инвариантен.*

Доказательство. Выведем её из следующей леммы:

Лемма 4.1. *Пусть $\mathscr{F}$ – гомотопически инвариантный пучок с* Witt-*трансферами. Тогда каноническое отображение $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(U)$ сюръективно для любого открытого по Зарискому подмножества $U \subset \mathbb{A}^1{}_K$ для произвольного поля K, являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия.*

Пусть X – k-гладкое неприводимое многообразие и K – его поле частных. Достаточно доказать, что гомоморфизм

$$\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}({\mathbb{A}^1}_X) \to \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(X),$$

индуцированный вложением $i_{0,X} : X \to {\mathbb{A}^1}_X$, инъективен.

Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}({\mathbb{A}^1}_X) \arrow[r, hook, "J^*"] \arrow[d, "i^*_{0,X}"] & \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}({\mathbb{A}^1}_{k(X)}) \arrow[d, "i^*_{0,k(X)}"] \\
\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(X) \arrow[r, hook, "j^*"] & \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(k(X))
\end{tikzcd}$$

Согласно теореме, доказанной в работе [8], для произвольного неприводимого многообразия Y гомоморфизм $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(Y) \to \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(k(Y))$ инъективен. Поэтому J^* – мономорфизм. Согласно лемме 4.1 отображение $\mathscr{F}({\mathbb{A}^1}_X) \to \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}({\mathbb{A}^1}_X)$ – эпиморфизм. Кроме того, оно и мономорфизм, так как предпучок $\mathscr{F}$ гомотопически инвариантен. Итак, $\mathscr{F}({\mathbb{A}^1}_X) \to \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}({\mathbb{A}^1}_X)$ – изоморфизм. Поскольку $\mathscr{F}(k(X)) = \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(k(X))$, то $i^*_{0,k(X)}$ – изоморфизм. Теперь мономорфность J^* влечет мономорфность $i^*_{0,X}$. Так как $i^*_{0,X}$ – эпиморфизм, то он изоморфизм. Для доказательства теоремы осталось доказать лемму.

Пусть $s \in F_{\mathrm{Zar}}(U)$. Пусть $c\colon \mathfrak{U} \to U$ – покрытие по Зарискому, для которого существует $s_{\mathfrak{U}}$, такое, что $c^*(s) = \varepsilon(s_{\mathfrak{U}})$, где ε – естественное преобразование $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}$. Обозначим через V одно открытое подмножество U, входящее в $\mathfrak{U}$, и для каждой точки $z \in U \setminus V$ U_z – открытое подмножество, входящее в $s_{\mathfrak{U}}$ и содержащее z.

Выберем некоторую точку $z \in U \setminus V$. Обозначим через V_1 наименьшее открытое подмножество ${\mathbb{A}^1}_K$, содержащее V и z. Рассмотрим элемент $s_V \in \mathscr{F}(V)$ – ограничение $s_{\mathfrak{U}}$ на V, и его образ $r_z \in \frac{\mathscr{F}(V)}{\mathscr{F}(V_1)}$. По теореме 1

$$\frac{\mathscr{F}(V)}{\mathscr{F}(V_1)} \simeq \lim_{z \in W \subset {\mathbb{A}^1}_K} \frac{\mathscr{F}(W - z)}{\mathscr{F}(W)}.$$

Поскольку существует $s_z \in \mathscr{F}(V_z)$ (ограничение $s_{\mathfrak{U}}$ на V_z), согласованное с s_V на $V_z - z$, то $r_z = 0$, и значит, существует $s_{V_1} \in \mathscr{F}(V_1)$, совпадающее с s_V при ограничении на V. По индукции, присоединяя точки $U \setminus V$, найдём элемент $s_U \in \mathscr{F}(U)$, совпадающий с s_V в общей

точке, и по инъективности для предпучков с Witt-трансферами [1] он будет согласован с s и в других точках.

□

Теорема 4. *Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с* Witt-*трансферами, ассоциированный пучок в топологии Нисневича $\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}$ гомотопически инвариантен.*

Доказательство. Выведем её из следующей леммы:

Лемма 4.2. *Пусть $\mathscr{F}$ – гомотопически инвариантный пучок с* Witt-*трансферами. Тогда пучки $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}$ и $\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}$ совпадают при ограничении на ${\mathbb{A}^1}_K$ для произвольного поля K, являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия.*

Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}({\mathbb{A}^1}_X) \arrow[r, hook, "J^*"] \arrow[d, "i^*_{0,X}"] & \mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}({\mathbb{A}^1}_{k(X)}) \arrow[d, "i^*_{0,k(X)}"] \\
\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(X) \arrow[r, hook, "j^*"] & \mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(k(X)).
\end{tikzcd}$$

Согласно лемме 4.2 пучки $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}$ и $\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}$ совпадают при ограничении на ${\mathbb{A}^1}_{k(X)}$. Выше доказано, что для пучка Зариского $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}$ отображение $i^*_{0,k(X)}$ – изоморфизм. Поэтому $i^*_{0,k(X)}$ – изоморфизм и для пучка Нисневича. Согласно теореме, доказанной в работе [8], для произвольного неприводимого многообразия Y гомоморфизм $\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(Y) \to \mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(k(Y))$ инъективен. Поэтому J^* – мономорфизм. Поэтому и композиция $i^*_{0,k(X)} \circ J^*$ для пучка Нисневича – это мономорфизм. Следовательно, $i^*_{0,X}$ – это мономорфизм. Так как $i^*_{0,X}$– эпиморфизм, то он изоморфизм. Для доказательства теоремы осталось доказать лемму.

Сечения пучков $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}$ и $\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}$ определяются своими ростками на соответствующих локальных схемах, и вследствие инъективности для гомотопически инвариантных предпучков с Witt-трансферами, гомоморфизмы ограничения вдоль вложения общей точки $\eta \hookrightarrow {\mathbb{A}^1}_K$ $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(U) \to \mathscr{F}(\eta)$ и $\mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(U) \to \mathscr{F}(\eta)$ – инъективны, и следовательно, каноническое отображение $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(U) \to \mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}(U)$ – инъективно. Для доказательства сюръективности по произвольному сечению $s_{\mathrm{Nis}} \in F_{\mathrm{Nis}}(U)$ найдем сечение $s_{\mathrm{Zar}} \in \mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}(U)$, согласованное с s_{Nis} в общей точке.

[1] инъективность для гомотопически инвариантных предпучков с Witt-трансферами доказана в дипломной работе К. Чепуркина [8]

Пусть $c\colon \mathfrak{U} \to U$ – покрытие по Нисневичу, для которого существует $s_{\mathfrak{U}}$, такое, что $c^*(s) = \varepsilon(s_{\mathfrak{U}})$, где ε – естественное преобразование $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{\mathrm{Nis}}$. Как покрытие по Нисневичу, $s_{\mathfrak{U}}$ содержит некоторое открытое по Зарискому подмножество $V \subset U$, и для любой точки $z \in U \setminus V$ U_z такое, что $c_z\colon U_z \to \mathbb{A}^1{}_K$ – этально, и $c_z^{-1}(z) \simeq z$. Обозначим $s_V \in \mathscr{F}(V)$ и $s_{U_z} \in \mathscr{F}(U_z)$ – ограничения $s_{\mathfrak{U}}$ на V и U_z, для всех $z \in U \setminus V$.

Выберем некоторую точку $z \in U \setminus V$. Поскольку для всех достаточно малых окрестностей по Зарискому $W \subset \mathbb{A}^1{}_K$ точки z выполняется включение $W - z \subset V$, определён элемент $r_z \in \lim\limits_{z \in W \subset \mathbb{A}^1{}_K} \frac{\mathscr{F}(W-z)}{\mathscr{F}(W)}$ – образ s_V. По теореме 2

$$\lim_{z \in W \subset \mathbb{A}^1{}_K} \frac{\mathscr{F}(W-z)}{\mathscr{F}(W)} \simeq \lim_{z \in W \subset U_z} \frac{\mathscr{F}(W-z)}{\mathscr{F}(W)},$$

и поскольку существует $s_{U_z} \in \mathscr{F}(U_z)$, согласованное с s_V на $U_z - z$, то $r_z = 0$. Значит, существует $s_{V_z} \in \mathscr{F}(V_z)$, для некоторой достаточно малой окрестности по Зарискому точки $z \in \mathbb{A}^1{}_K$, согласованное с s_V.

Полученные сечения s_{V_z} предпучка $\mathscr{F}$ (для всех $z \in U \setminus V$) вместе с s_V, задают некоторое сечение $\mathscr{F}_{\mathrm{Zar}}$ на U (попарная согласованность сечений s_{V_z} следует из согласованности всех s_{V_z} с s_V, поскольку окрестности V_z достаточно малы, т.е. $V_z - z \subset V$). Так как сечения s_{Nis} и s_{Zar} согласованы с s_V на V, то они согласованы в общей точке $\mathbb{A}^1{}_K$.

□

Литература

1. V. Voevodsky, *Triangulated Category of Motives over a feld, Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories* (V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, eds.), Annals of Math. Studies, 1999.
2. P. Balmer, *Witt groups.* In: Handbook of K-theory. Vol. 2, Springer, Berlin (2005), 539–576.
3. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics.* 52, Springer (1977).
4. M. Ojanguren, I. Panin, *A purity theorem for the Witt group.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **4**, 32, No. 1 (1999), 71–86.
5. A. Altman, S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck Duality Theory.* Lecture Notes in Mathematics 146, Springer (1970).
6. А. Дружинин, *Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с* Witt-*трансферами при пучковании в топологии Зариского.* — ПОМИ Препринт 7/2014.

7. А. Дружинин, *Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с* Witt-*трансферами при пучковании в топологии Зариского.* — ПОМИ Препринт 8/2014.
8. К. Чепуркин, Некоторые свойства гомотопически инвариантных предпучков с Витт-трансферами, дипломная работа, июнь 2013.

Druzhinin A. E. The maintenance of homotopy invariance for presheaves with Witt-transfers under Nisnevich sheafication.

In the present paper, we introduce a category Wor, whose objects are affine smooth varieties over a field k and morphisms are a certain variant of finite correspondences. A presheaf of abelian groups with Witt-transfers is by definition a presheaf of abelian groups on the category Wor. We prove the homotopy invariance of the Nisnevich sheaf associated with an arbitrary homotopy invariant presheaf with Witt-transfers. To construct a category of Witt-motives one should prove the homotopy invariance of Nisnevich cohomology of an arbitrary homotopy invariant Nisnevich sheaf with Witt-transfers.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28, Ст. Петергоф,
С.-Петербург, 198504
E-mail: andrei.druzh@gmail.com

Поступило 20 мая 2014 г.