Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

Н. А. Джусоева, В. А. Койбаев

НОРМАЛИЗАТОР ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТЕВОЙ ГРУППЫ, АССОЦИИРОВАННОЙ С НЕРАСЩЕПИМЫМ ТОРОМ, В ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ НАД ПОЛЕМ

Задача описания надгрупп расщепимого максимального тора в линейных группах и группах Шевалле яввляется практически решенной. Фундаментальный вклад в решение этой задачи внесла ленинградская-петербургская алгебраическая школа (З. И. Боревич, Н. А. Вавилов и их ученики, см., например, [1, 2, 4–6]). Значительно менее исследованной областью является описание надгрупп нерасщепимого тора. К настоящему времени полное описание надгрупп нерасщепимого тора получено лишь для некоторых специальных полей таких, как конечные или локальные. Для конечных полей это работы У. Кантора и Г. Зейтца [15, 17, 18]. Важные результаты о надгруппах нерасщепимого тора для локальных и глобальных полей получены В. П. Платоновым [16]. Случай поля вещественных чисел рассмотрен в [14]. Для произвольных полей исследование надгрупп нерасщепимого тора проводилось в работах [3, 7–13].

Мы концентрируем внимание на промежуточных подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор, связанный с радикальным расширением $K = k(\sqrt[n]{d})$ основного поля k, $d \in k$. Важнейшую роль в изучении указанных промежуточных подгрупп играют элементарные сетевые группы $E(\sigma)$, ассоциированные с тором $T = T(d)$, и их нормализатор $N(\sigma)$ (который является надгруппой нерасщепимого тора) в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, k)$ [7–11].

В настоящей статье вычисляется нормализатор $N(\sigma)$ элементарной сетевой группы $E(\sigma)$, ассоциированной с нерасщепимым максимальным тором $T(d)$, в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n, k)$ над полем

Ключевые слова: линейные группы, надгруппы, промежуточные подгруппы, нерасщепимый максимальный тор, сети, сетевые группы.

Работа В. А. Койбаева поддержана РФФИ (проект 13-01-00469). Результаты настоящей статьи были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

k нечетной характеристики. При этом нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$ определяется радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k (минизотропный тор).

Пусть k – поле нечетной характеристики, которое является полем частных области главных идеалов Λ, $d = p_1 p_2 ... p_m$ – произведение попарно различных (неассоциированных) простых элементов $p_i \in \Lambda$, $d \in \Lambda$. Для промежуточного подкольца R, $\Lambda \subseteq R \subseteq k$, содержащего кольцо $R_0 = R(d)$ (определенного для тора $T = T(d)$), определяется сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_n)$ идеалов кольца R, ассоциированная с тором $T = T(d)$ [7]. А именно, для произвольной цепочки

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_1,$$

идеалов кольца R, $R_0 \subseteq R$, сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n определяется следующим образом: $\sigma_{ij} = A_{i+1-j}$ при $j \leqslant i$; $\sigma_{ij} = dA_{n+i+1-j}$, при $j \geqslant i + 1$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & dA_n & dA_{n-1} & \dots & dA_2 \\ A_2 & A_1 & dA_n & \dots & dA_3 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots & dA_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 \end{pmatrix}.$$

Далее, для сети σ, ассоциированной с тором T, через $G(\sigma)$ мы обозначаем сетевую группу [1]. Подгруппу $E(\sigma)$, порожденную всеми трансвекциями из $G(\sigma)$, мы называем элементарной сетевой подгруппой, ассоциированной с тором T [7]. Согласно [9, предложение 2] тор T нормализует сетевую группу $G(\sigma)$ (а потому и $E(\sigma)$), следовательно, группы $TG(\sigma)$, $TE(\sigma)$ и $N(\sigma) = N_G(E(\sigma))$ являются промежуточными, лежащими между T и G.

Через σ^R обозначим сеть [1], у которой на диагонали и ниже стоит R, а выше главной диагонали – dR:

$$\sigma^R = \begin{pmatrix} R & dR & \dots & dR \\ R & R & \dots & dR \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R & R & \dots & R \end{pmatrix}$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Нормализатор $N(\sigma) = N_G(E(\sigma))$ элементарной сетевой группы $E(\sigma)$ в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, k)$ совпадает с произведением тора T и сетевой группы $G(\sigma^R)$: $N(\sigma) = TG(\sigma^R)$.*

Пусть $x^n - d$ – неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in \Lambda \subseteq k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant n$, образует базис радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, поля $K = k(\theta)$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении ее в $G = \mathrm{GL}(n,k) \approx \mathrm{Aut}_k(K)$

$$K^* \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(K), \quad t \mapsto \widehat{t},$$

где $\widehat{t}(\alpha) = t\alpha, \quad \alpha \in K$. Таким образом, матрица отображения $\widehat{t}$ в выбранном базисе имеет вид

$$c(x) = \begin{pmatrix} x_1 & dx_n & \dots & dx_2 \\ x_2 & x_1 & \dots & dx_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{c(x) : x \in k^n \setminus \bar{0}\}.$$

Таким образом, с каждым вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ связана невырожденная матрица $c = c(x) = (c_{ij})$, элементы которой определяются формулами: $c_{ij} = x_{i+1-j}$, при $j \leqslant i; c_{ij} = dx_{n+i+1-j}$, при $j \geqslant i+1$. С каждой матрицей $c = c(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица

$$c^{-1} = c(y) = (c'_{ij}), \quad y = \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in k^n,$$

где $y_i = \frac{C_{1i}}{|c\,(x)|}$, причем C_{1i} – алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c = c(x)$. Подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k, ассоциированое с тором $\mathrm{T} = T(d)$, определяется следующим образом [7, 8]:

$$R_0 = R(d) = \langle x_i y_j, dx_r y_s : \ i + j \leqslant n+1, r+s > n+1, \ \ x \in k^n \setminus \bar{0} \rangle.$$

Напомним, что, как обычно, под элементарной трансвекцией мы понимаем матрицу (в G) вида $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}, \quad \alpha \in k$ (e – единичная матрица, e_{ij} – матрица, у которой на позиции (i,j) стоит 1, а на остальных местах нули), а (общая) трансвекция – это всякая матрица, сопряженная в G с элементарной трансвекцией.

Всякая надгруппа нерасщепимого максимального тора $T = T(d)$, содержащая одномерное преобразование, “богата элементарными трансвекциями”, поэтому мы можем определить модули трансвекций и кольца множителей промежуточной подгруппы. А именно, с каждой подгруппой H, содержащей элементарную трансвекцию, связаны модули трансвекций $(i \neq j)$

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in k \colon t_{ij}(\alpha) \in H\},$$

(A_{ij} – подгруппа аддитивной группы поля k), и их кольца множителей

$$R_{ij} = R_{ij}(H) = \{\lambda \in k \colon \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\},$$

которые в рассматриваемом нами случае (k является полем частных области главных идеалов Λ) совпадают между собой, $R_{ij} = R$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, [9, теорема 1], а A_{ij} – идеалы кольца R.

Непосредственно из [13] вытекает следующее предложение.

Предложение. *Пусть H – подгруппа полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, k)$, содержащая нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$. Предположим, далее, что модули трансвекций $A_{i1}(H)$ подгруппы H совпадают с кольцом R, $2 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $H \subseteq TG(\sigma^R)$.*

Лемма 1. *Пусть $t_{i1}(\alpha) \in N(\sigma)$, тогда $\alpha \in R$, $2 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Будем считать, что $n \geqslant 3$ (если $n = 2$, то см. [3, 11]). Если $i \leqslant n-1$, то берем $\beta \in \sigma_{i+1,i} = A_2$. Тогда (так как $t_{i1}(\alpha) \in N(\sigma)$) согласно формуле

$$[t_{i+1,i}(\beta), t_{i1}(\alpha)] = t_{i+1,1}(\alpha\beta)$$

($[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ – коммутатор элементов x, y) мы имеем $t_{i+1,1}(\alpha\beta) \in E(\sigma)$, а потому $\alpha\beta \in \sigma_{i+1,1} = A_{i+1}$. Следовательно,

$$\alpha A_2 \subseteq A_{i+1}.$$

Так как R – область главных идеалов, то (идеалы A_2, A_{i+1} – главные идеалы кольца R) $\alpha \in \frac{1}{m}R$ для некоторого $m \in R$.

Если $i = n$, то берем $\beta \in \sigma_{1,2} = dA_n$ и пользуясь формулой

$$[t_{i1}(\alpha), t_{1,2}(\beta)] = t_{i,2}(\alpha\beta),$$

мы получаем

$$\alpha d A_n \subseteq \sigma_{i2} = A_{n-1}.$$

И снова мы имеем $\alpha \in \frac{1}{m}R$ для некоторого $m \in R$.

Таким образом, мы показали, что если α принадлежит модулю трансвекций позиции $(i,1)$ группы $N(\sigma)$, $\alpha \in A_{i1}(N(\sigma))$, то $\alpha \in \frac{1}{m}R$ некоторого $m \in R$. Следовательно, $A_{i1}(N(\sigma)) \subseteq \frac{1}{m}R$.

Так как тор T нормализует элементарную группу $E(\sigma)$, то $T \leqslant N(\sigma)$. С другой стороны, согласно [9] (теорема 1) модуль трансвекций $A_{i1}(N(\sigma))$ – целый идеал некоторого подкольца R_1 поля k, $A_i \subseteq A_{i1}(N(\sigma)) = sR_1 \quad (s \in R_1)$. Следовательно, по доказанному мы имеем $sR_1 \subseteq \frac{1}{m}R$. Но так как R и R_1 – кольца главных идеалов, в частности – факториальные кольца, то $R_1 \subseteq R$ а потому $\alpha \in A_{i1}(N(\sigma)) = sR_1 \subseteq R$. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть σ'_{ij} – модуль трансвекций* [9] *подгруппы $N(\sigma)$ (содержащей тор T), $i \neq j$. Тогда*

$$\sigma'_{i,j} = \begin{cases} R, & i > j; \\ dR, & i < j. \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно показать, что $\sigma'_{i1} = R$, $i \geqslant 2$. Включение $\sigma'_{i1} \subseteq R$ вытекает из леммы 1 по определению модуля трансвекций. Обратно, если τ – трансвекция из $E(\sigma)$, то (так как $A_1, A_2, ..., A_n$ – идеалы кольца R) для $r \in R$ мы имеем $t_{i1}(r)\tau t_{i1}(-r)$ – трансвекция из $E(\sigma)$, а потому $t_{i1}(r) \in N(\sigma)$, откуда $R \subseteq \sigma'_{i1}$. □

Следствие 2. *Если матрица*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \lambda_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

содержится в нормализаторе $N(\sigma)$, то $\lambda_i \in R$, $\quad 2 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство. Если $n = 2$, то наше утверждение вытекает из следствия 1. Пусть $n \geqslant 3$. Если i, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, то из формулы ($\alpha \in \sigma_{i+1,i} = A_2$)

$$[a^{-1}, t_{i+1,i}(\alpha)] = t_{i+1,1}(\alpha\lambda_i),$$

мы имеем $t_{i+1,1}(\alpha\lambda_i) \in E(\sigma)$. Заметим, что $\sigma_{i+1,i} = A_2, \sigma_{i+1,1} = A_{i+1}$. Откуда $\lambda_i A_2 \subseteq A_{i+1}$. Далее, как для этого случая в доказательстве леммы 1, мы получаем включение $\lambda_i \in R$. Поэтому в силу следствия 1 (так как $t_{i1}(\lambda_i) \in N(\sigma)$) мы можем считать, что $\lambda_i = 0$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, а потому (так как $a \in N(\sigma)$) $t_{n1}(\lambda_n) \in N(\sigma)$ и $\lambda_n \in R$. □

Из определения сети σ, очевидно, вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Для сети* $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots, \ A_n)$ *имеет место формула*

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i, \end{cases}$$

Доказательство теоремы. ($\subseteq$) Согласно следствию 1 все модули трансвекций $A_{i1}(N(\sigma))$ подгруппы $N(\sigma)$ совпадают с кольцом R, $2 \leqslant i \leqslant n$ подгруппы $N(\sigma)$. Тогда согласно предложению $N(\sigma) \subseteq TG(\sigma^R)$.

Покажем обратное включение

$$TG(\sigma^R) \subseteq N(\sigma). \tag{2}$$

Напомним, что $TG(\sigma^R) = G(\sigma^R)T$ [10, предложение 2]. Покажем в начале, что для доказательства включения (2) нам достаточно доказать, что для любого $b = (b_{ij}) \in G(\sigma^R)$, $b^{-1} = (b'_{ij})$, $\alpha \in A_r$, $2 \leqslant r \leqslant n$ мы имеем

$$\alpha b_{ir} b'_{1j} \in \sigma_{ij} \tag{3}$$

для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Действительно, так как $T \leqslant N(\sigma)$, то для доказательства (2) достаточно показать, что $G(\sigma^R) \subseteq N(\sigma)$, то есть, что

$$g\tau g^{-1} \in E(\sigma) \subseteq G(\sigma)$$

для любых $g \in G(\sigma^R)$, $\ \tau \in E(\sigma)$. С другой стороны, согласно предложению 2 [12] трансвекция τ сопряжена с помощью матрицы из тора с матрицей вида (1), а так как тор T нормализует элементарную сетевую группу $E(\sigma)$, то для некоторого $c \in T$

$$c^{-1}\tau c = a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \alpha_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \in E(\sigma)$, $\ \alpha_r \in A_r$. Отсюда $\tau = cac^{-1}$, поэтому достаточно проверить включение $gcac^{-1}g^{-1} \in E(\sigma)$, где $gc \in G(\sigma^R)T = TG(\sigma^R)$, а потому $gc = c_1 b,\ b \in G(\sigma^R), c_1 \in T$, следовательно (напоминая, что тор T нормализует группу $E(\sigma)$), достаточно показать, что $bab^{-1} \in E(\tau)$. Отсюда следует, что для доказательства (2) достаточно доказать, что $bt_{r1}(\alpha_r)b^{-1} \in E(\sigma)$, что в свою очередь эквивалентно (3). Итак, доказываем (3). Доказательство включения (3) разобъем на несколько случаев:

1) $i = j$. Имеем $\sigma_{ii} = A_1$, $\alpha \in A_r$. Если $j > 1$, то $b'_{1j} \in dR$, если же $j = 1$, то (напомним, что $r > 1$) $b_{1r} \in dR$. В обоих случаях левая часть формулы (3) содержится в dA_r, но по свойству сети σ последнее множество содержится в $\sigma_{11} = \sigma_{ii} = A_1$. Следовательно (3) справедливо.

2) $i \neq j$, $j = 1$. Если $i < r$, то $b_{ir} \in dR$, а потому $\alpha b_{ir} b'_{11} \in dA_r \subseteq A_1 \subseteq \sigma_{i1}$ – то есть (3) верно. Если же $i \geqslant r$, то $A_r \subseteq A_i = \sigma_{i1}$, а потому ($b_{ir}, b'_{11} \in R$) мы имеем $\alpha b_{ir} b'_{1j} \subseteq A_r \cdot R \cdot R \subseteq A_i = \sigma_{i1}$, а потому (3) верно.

3) $i \neq j$, $j > 1$. Тогда $b'_{1j} \in dR$. Включение (3), очевидно, справедливо при $i > j$ (так как тогда $\sigma_{ij} = A_s$ для некоторого s). Поэтому будем считать, что $i < j$. Если $i < r$, то $b_{ir} \in dR$, а потому $\alpha b_{ir} b'_{1j} \subseteq d^2 A_r \subseteq dA_1 \in \sigma_{ij}$. Если $i \geqslant r$ (а потому $r \leqslant i < j$), то по формуле леммы 2 для σ_{ij} мы имеем $\sigma_{ij} = dA_{n+i+1-j}$. Но $r < n+i+1-j$ (так как $i \geqslant r$), поэтому по свойству идеалов сети мы имеем $A_r \subseteq A_{n+i+1-j}$. Отсюда $\alpha b_{ir} b'_{1j} \in A_r R d R \subseteq dA_r \subseteq dA_{n+i+1-j} = \sigma_{ij}$. Таким образом, формула (3) справедлива. Теорема доказана. □

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. мат. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
3. З. И. Боревич, В. А. Койбаев, Чан Нгок Хой, *Решетки подгрупп в $GL(2, Q)$, содержащих нерасщепимый тор.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **191** (1991), 24–43.
4. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор*, — Тр. Ленингр. мат. об-ва **1** (1990), 64–109.
5. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Тр. МИАН СССР **183** (1990), 29–42.
6. Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова, *О подгруппах полной симплектической группы, содержащих группу диагональных матриц.* I, II. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ **103** (1980), 31–47; **132** (1983), 44–56.
7. Н. А. Джусоева, *Сетевые группы, ассоциированные с тором.* — Тезисы IX Международной школы-конференции по теории групп. Владикавказ (9–15 июля). 2012. С. 47.
8. Н. А. Джусоева, В. А. Койбаев, *Максимальные подгруппы, содержащие тор, связанные с полем отношений дедекиндовой области.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 149–153.
9. Н. А. Джусоева, *Сетевые кольца нормализуемые тором.* — Труды ИММ УрО РАН **19** (2013) № 3, С.113–119.

10. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы $GL(2, Q)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Докл. АН СССР **312** (1990), № 1, 36–38.
11. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы $GL(2, K)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 136–145.
12. В. А. Койбаев, *Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор.* — Алгебра и анализ **21** (2009) №5, с. 70–86.
13. В. А. Койбаев, А. В. Шилов, *Надгруппы нерасщепимого тора, модуль трансвекций которых совпадает с кольцом.* — Международная конференция "Алгебра, Логика и Приложения". Красноярск, 2010, 49–50.
14. D. Z. Djokovic, *Subgroups of compact Lie groups containing a maximal torus are closed.* — Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), № 2, 431–432.
15. W. M. Kantor, *Linear groups containing a Singer cycle.* — J. Algebra **62** (1980), № 1, 232–234.
16. V. P. Platonov, *Subgroups of algebraic groups over local or a global field containing a maximal torus.* — C. R. Acad. Sci. Paris **318** (1994), № 10, 899–903.
17. G. M. Seitz, *Subgroups of finite groups of Lie type.* — J. Algebra **61** (1979), 16–27.
18. G. M. Seitz, *Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type.* — Pacif. J. Math. **106** (1983), № 1, 153–244.

Dzhusoeva N. A., Koibaev V. A. Normalizer of an elementary net group associated with a non-split torus in the general linear group over a field.

In this paper we compute the normalizer $N(\sigma)$ of an elementary net group $E(\sigma)$ associated with non-split maximal torus $T(d)$ in the general linear group $GL(n, k)$ over a field k of odd characteristic. The non-split maximal torus $T = T(d)$ is provided by a radical extension $k(\sqrt[n]{d})$ of degree n of the ground field k (minisotropic torus).

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
362025, Владикавказ, Россия
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Поступило 10 марта 2014 г.

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
Южный математический институт ВНЦ РАН
362027, Владикавказ, Россия
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru