Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. IV. СЕРИЯ $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$

§1. Введение

В настоящей работе вычислены группы когомологий Хохшильда для алгебр диэдрального типа из серии $D(2\mathcal{B})(k,s,c)$, представленной в известной классификации К. Эрдман [1], при условии, что параметр c, входящий в определяющие соотношения рассматриваемых алгебр, равен нулю. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления. В этих вычислениях мы используем подход работы [2], в которой была описана алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 (мы вновь используем обозначения из [1]). Указанный подход состоит в том, что сначала на основе некоторых эмпирических вычислений строится минимальная проективная бимодульная резольвента для рассматриваемых алгебр, а затем с использованием этой резольвенты вычисляются группы когомологий Хохшильда, а также умножения в алгебре когомологий.

Ранее этот подход был применен к некоторым другим сериям алгебр кватернионного, диэдрального и полудиэдрального типов. В [3] алгебра когомологий Хохшильда была вычислена для одной из серий локальных алгебр кватернионного типа, а в [4, 5, 6] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для серии $Q(2\mathcal{B})_1$ над основным полем, имеющим характеристику 2 или 3. В [7, 8] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для локальных алгебр диэдрального типа, а в [9, 10] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для локальных алгебр полудиэдрального типа. Кроме того, в [11, 12] для алгебр полудиэдрального типа из серии $SD(2\mathcal{B})_2$ вычислены группы когомологий

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры диэдрального типа, бимодульная резольвента.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00902). Кроме того, первый автор благодарит за поддержку грант 13-01-91150-ГФЕН_а “Локализационные методы в алгебраической K-теории, теории алгебраических групп и арифметике.”

Хохшильда над алгебраически замкнутым полем характеристики 2, а в ряде случаев описаны и умножения в соответствующей алгебре когомологий. Отметим также, что подход из [2] был использован для вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр Лю–Шульца (см. [13]).

Имеются также результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, полученные для так называемой алгебры Мёбиуса (см. [14, 15, 16, 17]) и для самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип D_n (см.[18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]).

Кратко опишем структуру работы. В §2 приводится формулировка основного результата работы – теоремы 2.1, в которой для рассматриваемого семейства алгебр диэдрального типа описываются группы когомологий Хохшильда. В §3 строится минимальная проективная резольвента алгебры R, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R$. Наконец, используя эту резольвенту, в §4 мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$ в предположении, что основное поле имеет характеристику, отличную от двух, а в §5 группы $\mathrm{HH}^n(R)$ вычисляются для случая, когда основное поле имеет характеристику два.

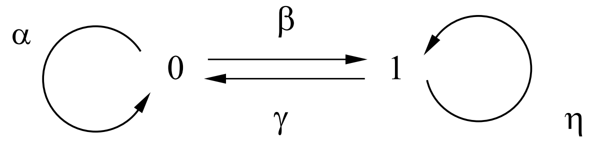
§2. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R).

Таким образом, если $P_\bullet \to R$ – Λ-проективная резольвента алгебры R, то $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\bullet, R))$.

Алгебры $R_{k,s,c}$ серии $D(2\mathcal{B})(k,s,c)$ (над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики) описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{array}{c} \beta\gamma = \eta\beta = \gamma\eta = 0, \ (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k, \\ \alpha^2 = c(\gamma\beta\alpha)^k, \ \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k, \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

где $k, s \in \mathbb{N}, s \geqslant 2, c \in \{0,1\}$ (композицию путей мы записываем справа налево). Отметим, что если $\operatorname{char} K \neq 2$, то можно считать, что $c = 0$ (достаточно α заменить на $\alpha - \frac{1}{2}\gamma\beta(\gamma\beta\alpha)^{k-1}$).

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр в случае, когда параметр c, входящий в определяющие соотношения рассматриваемых алгебр, равен нулю.

Теорема 2.1. *Пусть $R = R_{k,s,0}$, где $k, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. Тогда размерности групп $\mathrm{HH}^n(R)$ описываются следующим образом.*

(I) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$.

(II) *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$. *Тогда*:

(IIa) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+4, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны}, \\ k+s+3, & \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(IIb) $$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+s+7, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны}, \\ k+s+6, & \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(IIc) *для* $n \geqslant 3$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-2}(R) = \begin{cases} 6, & \textit{если } n \equiv 0 (\mathrm{mod} 3), \\ 5, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(III) *Пусть* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Тогда*:

(IIIa) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+2, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } p, \\ k+s+1, & \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(IIIb) $$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+s+3, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } p, \\ k+s+2, & \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(IIIc) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R)$

$$= \begin{cases} k+s+4, & \textit{если } p \textit{ делит и } k, \textit{ и } s, \\ k+s+3, & \begin{cases} \textit{если } p \textit{ делит } k, \textit{ но не делит } s \textit{ или} \\ \textit{если } p \textit{ делит } s, \textit{ но не делит } k, \end{cases} \\ k+s+2, & \textit{если } p \textit{ не делит ни } k, \textit{ ни } s; \end{cases}$$

(IIId) $\dim_K \mathrm{HH}^4(R)$

$$= \begin{cases} k+s+4, & \textit{если } p \textit{ делит и } k, \textit{ и } s, \\ k+s+3, & \begin{cases} \textit{если } p \textit{ делит } k, \textit{ но не делит } s \textit{ или} \\ \textit{если } p \textit{ делит } s, \textit{ но не делит } k, \end{cases} \\ k+s+2, & \textit{если } p \textit{ не делит ни } k, \textit{ ни } s; \end{cases}$$

(IIIe) *для* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 0 \textit{ или } 5 \,(\mathrm{mod} 6), \\ 3, & \textit{если } n \equiv 1 \textit{ или } 4 \,(\mathrm{mod} 6), \\ 4, & \textit{если } n \equiv 2 \textit{ или } 3 \,(\mathrm{mod} 6). \end{cases}$$

Следствие 2.2. *Пусть* $R = R_{k,s,0}$.

(1) *Если* $\mathrm{char}\, K = 2$, *то для* $n \geqslant 7$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-6}(R) = 16.$$

(2) *Если* $\mathrm{char}\, K \neq 2$, *то для* $n \geqslant 13$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-12}(R) = 9.$$

§3. Резольвента

Пусть $R = R_{k,s,0}$ – алгебра, определённая в §2. Через e_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j),\ i,j \in \{0,1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^*\colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Введём краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$a := \alpha\gamma\beta, \quad b := \beta\alpha\gamma, \quad g := \gamma\beta\alpha.$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{00} \cup \mathcal{B}_{10} \cup \mathcal{B}_{01} \cup \mathcal{B}_{11}, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{00} &= \{a^{i+1},\ g^i,\ \gamma\beta a^i,\ \alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{10} &= \{\beta a^i,\ \beta\alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{01} &= \{\gamma b^i,\ \alpha\gamma b^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{11} &= \{\eta^i \mid 0 \leqslant i \leqslant s\} \cup \{b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие проективные Λ-модули

$$\left.\begin{aligned}
L_0 &= P_{00} \oplus P_{11},\\
L_1 &= (P_{00} \oplus P_{10}) \oplus (P_{11} \oplus P_{01}),\\
L_2 &= P_{00}^2 \oplus P_{11}^2,\\
L_3 &= (P_{00} \oplus P_{10}) \oplus (P_{01} \oplus P_{11}),
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

и с их помощью построим следующий бикомплекс $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ (строки и столбцы которого занумерованы числами $0, 1, 2 \dots$):

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "\sigma_{03}"] & \cdots \arrow[d, "\sigma_{13}"] & \cdots \arrow[d, "\sigma_{01}"] & \\
L_2 \arrow[d, "\sigma_{02}"] & L_1 \arrow[l, "\tau_{03}"'] \arrow[d, "\sigma_{12}"] & L_3 \arrow[l, "\tau_{13}"'] \arrow[d, "\sigma_{06}"] & \cdots \arrow[l, "\tau_{07}"'] \\
L_1 \arrow[d, "\sigma_{01}"] & L_3 \arrow[l, "\tau_{02}"'] \arrow[d, "\sigma_{17}"] & L_2 \arrow[l, "\tau_{18}"'] \arrow[d, "\sigma_{05}"] & \cdots \arrow[l, "\tau_{06}"'] \\
L_3 \arrow[d, "\sigma_{06}"] & L_2 \arrow[l, "\tau_{07}"'] \arrow[d, "\sigma_{16}"] & L_1 \arrow[l, "\tau_{17}"'] \arrow[d, "\sigma_{04}"] & \cdots \arrow[l, "\tau_{05}"'] \\
L_2 \arrow[d, "\sigma_{05}"] & L_1 \arrow[l, "\tau_{06}"'] \arrow[d, "\sigma_{15}"] & L_3 \arrow[l, "\tau_{16}"'] \arrow[d, "\sigma_{03}"] & \cdots \arrow[l, "\tau_{04}"'] \\
L_1 \arrow[d, "\sigma_{04}"] & L_3 \arrow[l, "\tau_{05}"'] \arrow[d, "\sigma_{14}"] & L_2 \arrow[l, "\tau_{15}"'] \arrow[d, "\sigma_{02}"] & \cdots \arrow[l, "\tau_{03}"'] \\
L_3 \arrow[d, "\sigma_{03}"] & L_2 \arrow[l, "\tau_{04}"'] \arrow[d, "\sigma_{13}"] & L_1 \arrow[l, "\tau_{14}"'] \arrow[d, "\sigma_{01}"] & \cdots \arrow[l, "\tau_{02}"'] \arrow[d, "\sigma_{11}"] \\
L_2 \arrow[d, "\sigma_{02}"] & L_1 \arrow[l, "\tau_{03}"'] \arrow[d, "\sigma_{12}"] & L_3 \arrow[l, "\tau_{13}"'] \arrow[d, "\sigma_{00}"] & L_0 \arrow[l, "\tau_{01}"'] \\
L_1 \arrow[d, "\sigma_{01}"] & L_3 \arrow[l, "\tau_{02}"'] \arrow[d, "\sigma_{11}"] & L_0 \arrow[l, "\tau_{12}"'] & \\
L_3 \arrow[d, "\sigma_{00}"] & L_0 \arrow[l, "\tau_{01}"'] & & \\
L_0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Гомоморфизмы в этой диаграмме описываются с помощью матриц, соответствующих прямым разложениям модулей из (3.2):

$$\sigma_{01} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta \otimes e_0 & e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \beta \otimes e_1 & e_0 \otimes \eta \\ 0 & e_1 \otimes \beta & 0 & \gamma \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{12} = \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta \otimes e_0 & e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \beta \otimes e_1 & e_0 \otimes \eta \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & 0 & \gamma \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{02} = \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \otimes e_0 & -e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \eta \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta \\ 0 & -e_0 \otimes \beta & 0 & \beta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{13} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \otimes e_0 & -e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \eta \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta \\ 0 & e_0 \otimes \beta & 0 & \beta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{03} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta \otimes e_0 & e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \otimes e_1 & e_1 \otimes \eta \\ 0 & e_1 \otimes \beta & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{14} = \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta \otimes e_0 & e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \otimes e_1 & e_1 \otimes \eta \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{04} = \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta \otimes e_0 & -e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \beta \otimes e_1 & -e_0 \otimes \eta \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & 0 & \gamma \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{15} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta \otimes e_0 & -e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \beta \otimes e_1 & -e_0 \otimes \eta \\ 0 & e_1 \otimes \beta & 0 & \gamma \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{05} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \otimes e_0 & e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \eta \otimes e_1 & e_1 \otimes \eta \\ 0 & e_0 \otimes \beta & 0 & \beta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{16} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha - \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \otimes e_0 & e_1 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \eta \otimes e_1 & e_1 \otimes \eta \\ 0 & -e_0 \otimes \beta & 0 & \beta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{06} = \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta \otimes e_0 & -e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{17} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta \otimes e_0 & - e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta \\ 0 & e_1 \otimes \beta & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{00} = \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & \beta \otimes e_0 & -e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & \gamma \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta + \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{11} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha + \alpha \otimes e_0 & \beta \otimes e_0 & -e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & e_1 \otimes \beta & \gamma \otimes e_1 & -e_1 \otimes \eta + \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{02}$$
$$= \begin{pmatrix} e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1} - \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{s-1} \otimes e_0 & 0 & -e_1 \otimes \alpha\gamma b^{k-1} \\ 0 & -e_1 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & -\alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \otimes \eta^{s-1} & \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{13}$$
$$= \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1} - \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{s-1} \otimes e_0 & 0 & e_1 \otimes \alpha\gamma b^{k-1} \\ 0 & -e_1 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & -\alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \otimes \eta^{s-1} & \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{03}$$
$$= \begin{pmatrix} -e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1} + \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\alpha g^{k-1} \otimes e_0 & 0 & e_0 \otimes \alpha\gamma b^{k-1} \\ 0 & e_1 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \eta^{s-1} \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & -e_1 \otimes \eta^{s-1} & -\alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{14} = \begin{pmatrix} e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}+\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\beta\alpha g^{k-1}\otimes e_0 & 0 & -e_0\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & e_1\otimes\beta\alpha g^{k-1} & \eta^{s-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & -e_1\otimes\eta^{s-1} & -\alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{04} = \begin{pmatrix} e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}-\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_0 & 0 & -e_1\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & -e_0\otimes\beta\alpha g^{k-1} & -\beta\alpha g^{k-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & e_1\otimes\eta^{s-1} & \eta^{s-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{15} = \begin{pmatrix} -e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}-\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_0 & 0 & e_1\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & -e_0\otimes\beta\alpha g^{k-1} & -\beta\alpha g^{k-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & e_1\otimes\eta^{s-1} & \eta^{s-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{05} = \begin{pmatrix} -e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}+\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\eta^{s-1}\otimes e_0 & 0 & e_1\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & e_1\otimes\beta\alpha g^{k-1} & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & -e_0\otimes\eta^{s-1} & -\beta\alpha g^{k-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{16} = \begin{pmatrix} e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}+\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\eta^{s-1}\otimes e_0 & 0 & -e_1\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & e_1\otimes\beta\alpha g^{k-1} & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & -e_0\otimes\eta^{s-1} & -\beta\alpha g^{k-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{06} = \begin{pmatrix} e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}-\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta\alpha g^{k-1}\otimes e_0 & 0 & -e_0\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & -e_1\otimes\beta\alpha g^{k-1} & -\eta^{s-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & e_1\otimes\eta^{s-1} & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{17} = \begin{pmatrix} -e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}-\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta\alpha g^{k-1}\otimes e_0 & 0 & e_0\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & -e_1\otimes\beta\alpha g^{k-1} & -\eta^{s-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & e_1\otimes\eta^{s-1} & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{07} = \begin{pmatrix} -e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}+\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_0 & 0 & e_1\otimes\alpha\gamma b^{k-1}\\ 0 & e_0\otimes\beta\alpha g^{k-1} & \beta\alpha g^{k-1}\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & -e_1\otimes\eta^{s-1} & -\eta^{s-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{18} = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1} + \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_0 & 0 & -e_1 \otimes \alpha\gamma b^{k-1} \\ 0 & e_0 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & -e_1 \otimes \eta^{s-1} & -\eta^{s-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{01} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} - a^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i}\big) & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} - \alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i}\big) & \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(g^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} - \alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i}\big) & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} \\ 0 & -\sum\limits_{j=0}^{s-1} \eta^j \otimes \eta^{s-1-j} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + a^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i}\big) & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(-\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} - \alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i}\big) & -\sum\limits_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \big(g^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i}\big) & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} \\ 0 & -\sum\limits_{j=0}^{s-1} \eta^j \otimes \eta^{s-1-j} \end{pmatrix}.$$

В качестве пополняющего отображения $\mu\colon B_{0,0} = P_{00} \oplus P_{11} \to R$, мы берем отображение, индуцированное умножением в R: $\mu(r \otimes s) = rs$.

Теорема 3.1. *Пусть $R = R_{k,s,0}$, где $k, t \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. Тогда тотализация $Q_\bullet = (Q_n, d_n^Q) = \mathrm{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. То, что $Q_\bullet$ – комплекс и $\mu \cdot d_0 = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Для доказательства ацикличности получающегося комплекса мы используем теорему 1 из [25]. А именно, нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S_i мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S_i (такие резольвенты модулей S_i, $i = 0, 1$, описаны в [26]). Но это проверяется прямыми вычислениями, и мы предоставляем читателю провести все необходимые проверки. $\square$

Замечание 3.2. Заметим, что если $\operatorname{char} K = 2$, то

$$\sigma_{01} = \sigma_{12} = \sigma_{04} = \sigma_{15}, \quad \sigma_{02} = \sigma_{13} = \sigma_{05} = \sigma_{16}, \quad \sigma_{03} = \sigma_{14} = \sigma_{06} = \sigma_{17},$$
$$\tau_{02} = \tau_{13} = \tau_{05} = \tau_{16}, \quad \tau_{03} = \tau_{14} = \tau_{06} = \tau_{17}, \quad \tau_{04} = \tau_{15} = \tau_{07} = \tau_{18},$$
$$\sigma_{00} = \sigma_{11}, \quad \tau_{01} = \tau_{12}.$$

Рассмотрим бикомплекс $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых столбцов в бикомплексе $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ с номерами 0 и 1 (а остальные столбцы в $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_\bullet = \operatorname{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$.

Предложение 3.3. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\imath} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{3.3}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение предложения вытекает непосредственно из строения бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$. $\square$

Предположим, что $\operatorname{char} K = 2$. В этом случае рассмотрим подкомплекс $\widetilde{X}_\bullet$ в $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$, совпадающий со столбцом с номером 0; ясно, что $\widetilde{X}_\bullet$ – также подкомплекс комплекса $Q_\bullet$. Аналогично предыдущему предложению получаем такое утверждение.

Предложение 3.4. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$. *Тогда имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to \widetilde{X}_\bullet \xrightarrow{\tilde{\imath}} Q_\bullet \xrightarrow{\tilde{\pi}} Q_\bullet[-2] \to 0, \tag{3.4}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

§4. Группы когомологий: случай $p \neq 2$

Пусть по-прежнему $R = R_{k,s,0}$ – K-алгебра, определённая в §2, и $p = \operatorname{char} K$. В этом параграфе мы обычно не делаем никаких ограничений на p, и лишь при получении окончательных результатов о группах когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ считаем, что $p \neq 2$; при этом, как оказалось, эти результаты зависят от того, делятся или не делятся параметры k и s на p, и в соответствии с этим рассуждения разбиваются на четыре подслучая.

Результаты о группах когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ для $p = 2$ собраны в следующем параграфе, где мы часто (за исключением случаев, когда отличия более существенны) ограничиваемся формулировками соответствующих результатов, оставляя их проверку читателю.

Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\big)_{n\geqslant 0}, \tag{4.1}$$

где $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – бимодульная резольвента алгебры R, построенная в §3. В дальнейшем мы часто для коцикла $f \in \operatorname{Ker}\delta^n$ его когомологический класс $\mathrm{cl}\, f \in \mathrm{HH}^n(R)$ также обозначаем через f.

Замечание 4.1. Поскольку $P_{ij} = \Lambda\cdot(e_i\otimes e_j)$, то всякий Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ определяется набором своих значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех P_{ij}, которые входят в разложение модуля Q_n; при этом $f(e_i \otimes e_j) \in e_iRe_j$. В дальнейшем мы отождествляем f с этим набором значений. Когда в таком наборе значений f встречается подпоследовательность, состоящая из нулей, скажем, из r штук, то мы такую подпоследовательность обозначаем через O_r. Аналогично, нулевую $r \times t$-матрицу обозначаем через $\mathrm{O}_{r,t}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Отметим, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\widetilde{w}\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

После такого отождествления дифференциал $\delta^0\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R)$ описывается так: для $r_i \in e_iRe_i$ $(i = 0, 1)$

$$\delta^0(r_0, r_1) = (\alpha r_0 - r_0\alpha,\ -\beta r_0 + r_1\beta,\ r_0\gamma - \gamma r_1,\ \eta r_1 - r_1\eta).$$

Предложение 4.2. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$, $\dim \operatorname{Im}\delta^0 = 4k - 2$.

Доказательство. Ввиду [1, IX.1.2] центр $Z(R) = \operatorname{Ker}\delta^0$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\{a^i + g^i + b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{\eta^i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} \cup \{1,\ \gamma\beta a^{k-1},\ a^k\}.$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k+s+2$ и

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Im}\delta^0 &= \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0,R) - \dim_K \operatorname{Ker}\delta^0\\ &= (5k+s)-(k+s+2) = 4k-2.\end{aligned}\qquad\square$$

Замечание 4.3. Пространство $\operatorname{Im}\delta^0$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\big(a^i-g^i, \mathrm{O}_3\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.2}$$

$$\big(\alpha g^i, -\beta a^i, \mathrm{O}_2\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.3}$$

$$\big(\alpha g^i, 0, -\gamma b^i, 0\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.4}$$

$$\big(0, \beta\alpha g^i, -\alpha\gamma b^i, 0\big) \text{ для } 0\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.5}$$

$$(0,\beta,-\gamma,0). \tag{4.6}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть значения δ^0 на элементах вида $(r_0,0)$ (соответственно вида $(0,r_1)$), где r_0 пробегает множество $\mathcal{B}_{00}$ (соответственно r_1 пробегает множество $\mathcal{B}_{11}$) и убедиться, что множество элементов из (4.2)–(4.6) порождает $\operatorname{Im}\delta^0$. Остаётся заметить, что мощность этого множества совпадает с $\dim_K \operatorname{Im}\delta^0$.

Дифференциал

$$\delta^1\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1,R)\to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2,R)$$

после указанных выше отождествлений может быть описан следующим образом: для $r_{ij}\in e_iRe_j$ $(i,j\in\{0,1\})$ имеем

$$\delta^1(r_{00},r_{10},r_{01},r_{11}) = (t_{00},t_{11},t'_{00},t_{10},t'_{11},t_{01}),$$

где

$$\begin{aligned}t_{00} &= \sum_{i=0}^{k-1}\gamma\beta a^i\cdot r_{00}\cdot g^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} a^i\cdot r_{00}\cdot\gamma\beta a^{k-1-i}\\ &-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha\gamma b^i\cdot r_{10}\cdot a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1}\gamma b^i\cdot r_{10}\cdot\alpha g^{k-1-i}\\ &+\sum_{i=0}^{k-1} g^i\cdot r_{01}\cdot\beta\alpha g^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1}\alpha g^i\cdot r_{01}\cdot\beta a^{k-1-i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{11} = \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^i \cdot r_{00} \cdot \gamma b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} b^i \cdot r_{10} \cdot \alpha\gamma b^{k-1-i} \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \beta\alpha g^i \cdot r_{01} \cdot b^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{s-1} \eta^i \cdot r_{11} \cdot \eta^{s-1-i}, \end{aligned}$$

$$t'_{00} = \alpha r_{00} + r_{00}\alpha, \qquad t_{10} = \eta \cdot r_{10} + r_{11} \cdot \beta,$$
$$t'_{11} = r_{10} \cdot \gamma + \beta \cdot r_{01}, \quad t_{01} = r_{01} \cdot \eta + \gamma \cdot r_{11}.$$

Сразу заметим, что $t_{00} = 0$ для любого набора $(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R)$. Далее предположим, что $q = (r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) \in \operatorname{Ker}\delta^1$. Представим компоненты этого 1-коцикла в виде

$$\begin{aligned} r_{00} &= \sum_{w\in\mathcal{B}_{00}} \lambda_w w, \quad r_{10} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{10}} \mu_w w, \\ r_{01} &= \sum_{w\in\mathcal{B}_{01}} \nu_w w, \quad r_{11} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{11}} \sigma_w w \end{aligned} \tag{4.7}$$

$(\lambda_w, \mu_w, \nu_w, \sigma_w \in K)$. Условие $t_{11} = 0$ равносильно системе следующих уравнений для координат разложений из (4.7):

$$s\sigma_{e_1} = 0, \quad k(\lambda_\alpha + \mu_\beta + \nu_\gamma) - s\sigma_\eta = 0. \tag{4.8}$$

Условие $t'_{00} = 0$ равносильно системе следующих уравнений:

$$\lambda_{g^i} + \lambda_{a^i} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.9}$$
$$\lambda_{\gamma\beta a^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{4.10}$$
$$2\lambda_{e_0} = 2\lambda_{\gamma\beta a^{k-1}} = 0 \tag{4.11}$$

Условие $t_{10} = 0$ (а также условие $t_{01} = 0$) равносильно следующим соотношениям:

$$\sigma_{b^i} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.12}$$
$$\sigma_{e_1} = 0. \tag{4.13}$$

Наконец, условие $t'_{11} = 0$ равносильно следующим соотношениям:

$$\mu_{\beta\alpha g^i} + \nu_{\alpha\gamma b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{4.14}$$

Теперь предположим, что $p \neq 2$. С использованием соотношений (4.8)–(4.14) легко приходим к следующему описанию базиса $\operatorname{Ker}\delta^1$.

Предложение 4.4. *Пусть $p \neq 2$.*

(а) *Предположим дополнительно, что p делит k и s. Тогда пространство $\operatorname{Ker}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.15}$$

$$\big(a^i - g^i, \mathrm{O}_3\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.16}$$

$$\big(a^k, \mathrm{O}_3\big), \tag{4.17}$$

$$\big(0, \beta a^i, \mathrm{O}_2\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.18}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, \gamma b^i, 0\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.19}$$

$$\big(0, \beta\alpha g^i, -\alpha\gamma b^i, 0\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.20}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{4.21}$$

(б) *Пусть теперь p делит k и не делит s. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^1$ надо из множества, указанного в части* (а), *удалить элемент $\big(\mathrm{O}_3, \eta\big)$.*

(в) *Пусть p делит s и не делит k. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^1$ надо в множестве, указанном в части* (а), *тройку элементов $\big(\alpha, \mathrm{O}_3\big)$, $\big(0, \beta, \mathrm{O}_2\big)$, $\big(\mathrm{O}_2, \gamma, 0\big)$ заменить на пару элементов $\big(\alpha, -\beta, \mathrm{O}_2\big)$ и $\big(\alpha, 0, -\gamma, 0\big)$.*

(г) *Пусть, наконец, p не делит ни k, ни s. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^1$ надо в множестве, указанном в части* (в), *заменить элемент $\big(\mathrm{O}_3, \eta\big)$ на элемент $\big(\alpha, \mathrm{O}_2, k/s \cdot \eta\big)$.*

Предложение 4.5. *Пусть $p \neq 2$.*

(а) *Предположим дополнительно, что p делит k и s. Тогда пространство $\operatorname{Im}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\mathrm{O}_2, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.22}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, a^i + g^i, \mathrm{O}_3\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.23}$$

$$\big(\mathrm{O}_4, b^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{4.24}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, \beta a^i, 0, \gamma b^i\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.25}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\big). \tag{4.26}$$

(б) *Пусть теперь p делит k и не делит s. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ надо в множестве, указанном в части* (а), *элемент* $(\mathrm{O}_3, \beta, 0, \gamma)$ *из* (4.25) *заменить на элемент* $(0, -s\eta^{s-1}, 0, \beta, 0, \gamma)$, *а также добавить к этому множеству элемент* $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_4\big)$.

(в) *Пусть* p *делит* s *и не делит* k. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо к множеству, указанному в части* (а), *присоединить элемент* $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_4\big)$.

(г) *Пусть, наконец,* p *не делит ни* k, *ни* s. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо взять множество, описанное в части* (б).

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть значения δ^1 на наборах вида (r_{00}, O_3) (соответственно вида $(0, r_{10}, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_2, r_{01}, 0)$ или (O_3, r_{11})), где r_{ij} пробегает подмножество $\mathcal{B}_{ij}$ $(i, j \in \{0, 1\})$ стандартного базиса алгебры R (см. (3.1)), а затем с помощью полученного множества значений выделить для каждого из рассматриваемых выше случаев базис пространства $\operatorname{Im}\delta^1$. □

Следствие 4.6. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 5k+s, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p, \\ 5k+s-1, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p, \\ 4k+1, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p, \\ k+s+1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь мы исследуем второй дифференциал

$$\delta^2 \colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R).$$

Ввиду сделанных выше соглашений он описывается формулой: для $r_{00}, r'_{00} \in e_0Re_0$, $r_{11}, r'_{11} \in e_1Re_1$, $r_{10} \in e_1Re_0$, $r_{01} \in e_0Re_1$

$$\delta^2(r_{00}, r_{11}, r'_{00}, r_{10}, r'_{11}, r_{01}) = (t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11}, t'_{00}, t''_{00}, t'_{11}, t''_{11}),$$

где

$$\begin{aligned}
t_{00} =&\alpha r_{00} + r_{00}\alpha - \gamma\beta a^{k-1} r'_{00} + r'_{00}\gamma\beta a^{k-1},\\
t_{10} =&\beta r_{00} + r_{11}\beta + \eta^{s-1} r_{10} - r'_{11}\beta\alpha g^{k-1},\\
t_{01} =&- r_{00}\gamma + \gamma r_{11} - \alpha\gamma b^{k-1} r'_{11} + r_{01}\eta^{s-1},\\
t_{11} =&\eta r_{11} - r_{11}\eta - r_{10}\alpha\gamma b^{k-1} + \beta\alpha g^{k-1} r_{01},\\
t'_{00} =&\alpha r'_{00} - r'_{00}\alpha, \qquad t''_{00} = \gamma r_{10} - r_{01}\beta,\\
t'_{11} =&- r_{10}\gamma + \eta r'_{11}, \quad\ t''_{11} = -r'_{11}\eta + \beta r_{01}.
\end{aligned}$$

Предложение 4.7. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда для любых* k *и* s ($k \geqslant 1$, $s \geqslant 2$) *пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned}
&\big(g^i - a^i, b^i, \mathrm{O}_4\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; && (4.27)\\
&\big(0, \eta^i, \mathrm{O}_4\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant s; && (4.28)\\
&\big(\mathrm{O}_2, a^i + g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; && (4.29)\\
&\big(\mathrm{O}_2, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \textit{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-1; && (4.30)\\
&\big(\mathrm{O}_3, \beta a^i, 0, \gamma b^i\big) \ \textit{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-1; && (4.31)\\
&\big(\mathrm{O}_4, b^i, 0\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k; && (4.32)\\
&\big(a^k, \mathrm{O}_5\big),\ \big(\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big), && (4.33)\\
&\big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big). && (4.34)
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $q = (r_{00}, r_{11}, r'_{00}, r_{10}, r'_{11}, r_{01}) \in \operatorname{Ker}\delta^2$. Представим компоненты $r_{00}, r_{11}, r_{10}, r_{01}$ этого 2-коцикла в виде (4.7) и аналогично положим

$$r'_{00} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{00}} \lambda'_w w, \quad r'_{11} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{11}} \sigma'_w w$$

($\lambda'_w, \sigma'_w \in K$). Тогда условие $t_{00} = 0$ равносильно системе следующих уравнений для координат соответствующих разложений:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{g^i} + \lambda_{a^i} = 0 \quad \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; && (4.35)\\
&\lambda_{\gamma\beta a^i} = 0 \quad \text{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-2; && (4.36)\\
&2\lambda_{e_0} = 2\lambda_{\gamma\beta a^{k-1}} = 0. && (4.37)
\end{aligned}$$

Условие $t_{10} = 0$ равносильно следующим соотношениям:

$$\lambda_{\alpha g^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{4.38}$$

$$\lambda_{a^i} + \sigma_{b^i} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.39}$$

$$\lambda_{e_0} + \sigma_{e_1} = \lambda_{\alpha g^{k-1}} - \sigma'_{e_1} = 0. \tag{4.40}$$

Далее, условие $t_{01} = 0$ равносильно следующим соотношениям:

$$-\lambda_{g^i} + \sigma_{b^i} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.41}$$

$$-\lambda_{e_0} + \sigma_{e_1} = \lambda_{\alpha g^{k-1}} + \sigma'_{e_1} = 0 \tag{4.42}$$

и соотношениям (4.38).

Условие $t_{11} = 0$ равносильно соотношению:

$$-\mu_\beta + \nu_\gamma = 0. \tag{4.43}$$

Далее, условие $t'_{00} = 0$ приводит к системе уравнений

$$\lambda'_{g^i} - \lambda'_{a^i} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.44}$$

$$\lambda'_{\gamma\beta a^{k-1}} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-2. \tag{4.45}$$

Условие $t''_{00} = 0$ приводит к системе уравнений

$$\mu_{\beta a^i} - \nu_{\gamma b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.46}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^i} = \nu_{\alpha\gamma b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{4.47}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^{k-1}} - \nu_{\alpha\gamma b^{k-1}} = 0. \tag{4.48}$$

Условие $t'_{11} = 0$ равносильно следующим соотношениям:

$$\mu_{\beta\alpha g^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{4.49}$$

$$\sigma'_{\eta^i} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant s-2; \quad \sigma'_{e_1} = 0; \tag{4.50}$$

$$-\mu_{\beta\alpha g^{k-1}} + \sigma_{\eta^{s-1}} = 0. \tag{4.51}$$

Наконец, условие $t''_{11} = 0$ равносильно соотношениям:

$$\nu_{\alpha\gamma b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{4.52}$$

$$-\sigma_{\eta^{s-1}} + \nu_{\alpha\gamma b^{k-1}} = 0, \tag{4.53}$$

а также соотношениям (4.50).

Простой анализ соотношений (4.35)–(4.53) приводит к доказательству требуемого утверждения. □

Предложение 4.8. *Пусть $p \neq 2$. Тогда для любых k и s ($k \geqslant 1$, $s \geqslant 2$) пространство $\operatorname{Im}\delta^2$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i, \beta a^i, \mathrm{O}_6\big) \ \textit{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\alpha g^i, 0, -\gamma b^i, \mathrm{O}_5\big) \ \textit{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(a^i + g^i, \mathrm{O}_7\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(0, \beta\alpha g^i, -\alpha\gamma b^i, \mathrm{O}_5\big) \ \textit{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_5, -a^i, 0, b^i\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_5, \gamma\beta a^i, \mathrm{O}_2\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_5, g^i, -b^i, 0\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&\big(\mathrm{O}_4, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_4, a^i - g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_6, \eta^i, -\eta^i\big) \ \textit{для}\ 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&\big(a^k, \mathrm{O}_7\big),\ \big(\mathrm{O}_3, -b^k, 0, \gamma\beta, \mathrm{O}_2\big),\ \big(0, 2\beta\alpha g^{k-1}, \mathrm{O}_4, -\eta, \eta\big).
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 4.5. □

Следствие 4.9. *Пусть $p \neq 2$. Тогда*:

$$\begin{aligned}
\dim_K \operatorname{Ker}\delta^2 &= 5k + s + 3;\\
\dim_K \operatorname{Im}\delta^2 &= 9k + s - 3;\\
\dim_K \mathrm{HH}^2(R) &= \begin{cases} k+s+3, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } p,\\ k+s+2, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Дифференциал

$$\delta^3\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{00}, r'_{00}, r''_{00} \in e_0Re_0$, $r_{11}, r'_{11}, r''_{11} \in e_1Re_1$, $r_{10} \in e_1Re_0$, $r_{01} \in e_0Re_1$

$$\begin{aligned}
&\delta^3(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}, r'_{00}, r''_{00}, r'_{11}, r''_{11})\\
&\qquad = (t_{00}, t_{11}, t'_{00}, t_{10}, t'_{11}, t_{01}, t''_{00}, t'_{10}, t'_{01}, t''_{11}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
t_{00} &= \sum_{i=0}^{k-1} \gamma\beta a^i \cdot r_{00} \cdot g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot r_{00} \cdot \gamma\beta a^{k-1-i} \\
&- \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma b^i \cdot r_{10} \cdot a^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^i \cdot r_{10} \cdot \alpha g^{k-1-i} \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} g^i \cdot r_{01} \cdot \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha g^i \cdot r_{01} \cdot \beta a^{k-1-i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^i \cdot r_{00} \cdot \gamma b^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} b^i \cdot r_{10} \cdot \alpha\gamma b^{k-1-i} \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} \beta\alpha g^i \cdot r_{01} \cdot b^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{s-1} \eta^i \cdot r_{11} \cdot \eta^{s-1-i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t'_{00} &= -r_{00}\alpha + \alpha r_{00} + \gamma\beta a^{k-1} r'_{00} - r'_{00}\gamma\beta a^{k-1}, \\
t_{10} &= \eta r_{10} - r_{11}\beta - \beta\alpha g^{k-1} r''_{00} + r'_{11}\beta\alpha g^{k-1}, \\
t'_{11} &= r_{10}\gamma + \beta r_{01} + \eta^{s-1} r'_{11} - r''_{11}\eta^{s-1}, \\
t_{01} &= r_{01}\eta + \gamma r_{11} + r''_{00}\alpha\gamma b^{k-1} - \alpha\gamma b^{k-1} r''_{11}, \\
t''_{00} &= \alpha r'_{00} + r'_{00}\alpha, \quad t'_{10} = \beta r''_{00} + r''_{11}\beta, \\
t'_{10} &= r''_{00}\gamma + \gamma r'_{11}, \quad t''_{11} = r'_{11}\eta + \eta r''_{11}.
\end{aligned}$$

Теперь аналогично предыдущему описываются базисы пространств $\operatorname{Ker}\delta^3$ и $\operatorname{Im}\delta^3$, а именно, справедливы следующие два утверждения.

Предложение 4.10. *Пусть $p \neq 2$.*

(a) *Предположим дополнительно, что p делит k и s. Тогда пространство $\operatorname{Ker}\delta^3$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$\big(g^i + a^i, \mathrm{O}_7\big)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\big)$ *для* $0 \leqslant i \leqslant k-1$;

$\big(0, \beta\alpha g^i, -\alpha\gamma b^i, \mathrm{O}_5\big)$ *для* $0 \leqslant i \leqslant k-1$;

$$\begin{aligned}
&\big(0,\beta a^i,\mathrm{O}_6\big) \ \textit{для}\ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_2,\gamma b^i,\mathrm{O}_5\big) \ \textit{для}\ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_3,\eta^i,\mathrm{O}_4\big) \ \textit{для}\ 1\leqslant i\leqslant s;\\
&\big(\mathrm{O}_4,g^i-a^i,\mathrm{O}_3\big) \ \textit{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_4,\alpha g^i,\mathrm{O}_3\big) \ \textit{для}\ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_5,\gamma\beta a^i,\mathrm{O}_2\big) \ \textit{для}\ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_5,a^i,0,-b^i\big) \ \textit{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_5,g^i,-b^i,0\big) \ \textit{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_6,\eta^i,-\eta^i\big) \ \textit{для}\ 2\leqslant i\leqslant s-1;\\
&\big(\gamma\beta a^{k-1},\mathrm{O}_7\big),\ \big(a^k,\mathrm{O}_7\big),\ \big(0,2\beta\alpha g^{k-1},\mathrm{O}_4,-\eta,\eta\big),\\
&\big(\mathrm{O}_4,a^k,\mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_5,a^k,\mathrm{O}_2\big),\big(\mathrm{O}_6,\eta^s,0\big),\big(\mathrm{O}_7,\eta^s\big).
\end{aligned}$$

(б) *Пусть теперь p делит k и не делит s. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо из множества, указанного в части* (а), *удалить элемент* $\big(\mathrm{O}_3,\eta,\mathrm{O}_4\big)$.

(в) *Пусть p делит s и не делит k. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *из множества, указанного в части* (а), *надо удалить элемент* $\big(\alpha,\mathrm{O}_7\big)$ *и заменить в нём элемент* $\big(0,\beta,\mathrm{O}_6\big)$ *на элемент* $\big(\alpha,\beta,\mathrm{O}_6\big)$, *а элемент* $\big(\mathrm{O}_2,\gamma,\mathrm{O}_5\big)$ *– на элемент* $\big(\alpha,0,-\gamma,\mathrm{O}_5\big)$.

(г) *Пусть, наконец, p не делит ни k, ни s. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *из множества, указанного в части* (в), *надо удалить элемент* $\big(\mathrm{O}_3,\eta,\mathrm{O}_4\big)$.

Предложение 4.11. *Пусть $p\neq 2$.*

(а) *Предположим дополнительно, что p делит k и s. Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^3$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{O}_2,\alpha g^i,\mathrm{O}_7\big) \ \textit{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_2,a^i-g^i,\mathrm{O}_7\big) \ \textit{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_3,\beta a^i,0,-\gamma b^i,\mathrm{O}_4\big) \ \textit{для}\ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_4,b^i,\mathrm{O}_5\big) \ \textit{для}\ 1\leqslant i\leqslant k;\\
&\big(\mathrm{O}_6,\alpha g^i,\mathrm{O}_3\big) \ \textit{для}\ 0\leqslant i\leqslant k-1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{O}_6, a^i+g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \ \textit{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_7, \beta a^i, \mathrm{O}_2\big) \ \ \textit{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_7, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0\big) \ \ \textit{для}\ \ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_8, \gamma b^i, 0\big) \ \ \textit{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(\mathrm{O}_9, \eta^i\big) \ \ \textit{для}\ \ 2\leqslant i\leqslant s;\\
&\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_9\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \mathrm{O}_3, \gamma, \eta\big),\\
&\big(\mathrm{O}_3, -\beta\alpha g^{k-1}, 0, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \gamma, 0\big),\\
&\big(\mathrm{O}_6, a^k, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_7, \beta, \gamma, \eta\big).
\end{aligned}$$

(б) *Пусть теперь p делит k и не делит s. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо к множеству, указанному в части* (а), *добавить элемент* $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_8\big)$.

(в) *Пусть p делит s и не делит k. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо к множеству, указанному в части* (а), *добавить элемент* $\big(2a^k, \eta^s, \mathrm{O}_8\big)$.

(г) *Пусть, наконец, p не делит ни k, ни s. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо к множеству, указанному в части* (б), *добавить элемент* $\big(a^k, \mathrm{O}_9\big)$.

Следствие 4.12. *Пусть $p\neq 2$. Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^3 = \begin{cases} 10k+2s+1, & \textit{если } p \textit{ делит и } k, \textit{ и } s,\\ 10k+2s, & \begin{cases}\textit{если } p \textit{ делит } k, \textit{ но не делит } s \textit{ или}\\ \textit{если } p \textit{ делит } s, \textit{ но не делит } k,\end{cases}\\ 10k+2s-1, & \textit{если } p \textit{ не делит ни } k, \textit{ ни } s;\end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = \begin{cases} 9k+s-1, & \textit{если } p \textit{ делит и } k, \textit{ и } s,\\ 9k+s, & \begin{cases}\textit{если } p \textit{ делит } k, \textit{ но не делит } s \textit{ или}\\ \textit{если } p \textit{ делит } s, \textit{ но не делит } k,\end{cases}\\ 9k+s+1, & \textit{если } p \textit{ не делит ни } k, \textit{ ни } s;\end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+4, & \textit{если } p \textit{ делит и } k, \textit{ и } s,\\ k+s+3, & \begin{cases}\textit{если } p \textit{ делит } k, \textit{ но не делит } s \textit{ или}\\ \textit{если } p \textit{ делит } s, \textit{ но не делит } k,\end{cases}\\ k+s+2, & \textit{если } p \textit{ не делит ни } k, \textit{ ни } s.\end{cases}$$

Доказательство. Утверждения о размерности группы $\mathrm{HH}^3(R)$ следуют из соответствующих описаний размерности $\operatorname{Ker}\delta^3$, а также из следствия 4.9. $\square$

Аналогично предыдущему осуществляется описание ядра дифференциала

$$\delta^4\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_5, R).$$

Используя вид дифференциала d_4^Q из бимодульной резольвенты, построенной в §3, приходим к системе из двенадцати уравнений (над R). Анализ этой системы (с использованием разложений по стандартному базису алгебры R) приводит к следующему утверждению (детали соответствующих вычислений мы предоставляем провести читателю).

Предложение 4.13. *Пусть $p \neq 2$. Тогда пространство $\operatorname{Ker}\delta^4$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$(g^i + a^i, b^i, \mathrm{O}_8)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(0, \eta^i, \mathrm{O}_8)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant s$;
$(\mathrm{O}_2, g^i - a^i, \mathrm{O}_7)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_3, \beta a^i, 0, -\gamma b^i, \mathrm{O}_4)$ *для* $0 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_2, \alpha g^i, \mathrm{O}_7)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_4, b^i, \mathrm{O}_5)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_6, \alpha g^i, \mathrm{O}_3)$ *для* $0 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_6, g^i + a^i, \mathrm{O}_3)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_7, \beta a^i, \mathrm{O}_2)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_8, \gamma b^i, 0)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;
$(\mathrm{O}_7, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0)$ *для* $0 \leqslant i \leqslant k-1$;
(O_9, η^i) *для* $2 \leqslant i \leqslant s$;
$(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_9)$, (a^k, O_9), (e_0, e_1, O_8),
$(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_7)$, $(\mathrm{O}_3, -\beta\alpha g^{k-1}, 0, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \gamma, 0)$,
$(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \mathrm{O}_3, \gamma, \eta)$, $(\mathrm{O}_7, \beta, \gamma, \eta)$,
$(\mathrm{O}_4, \eta^s, \mathrm{O}_5)$, $(\mathrm{O}_6, e_0, \mathrm{O}_3)$, $(\mathrm{O}_6, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3)$, $(\mathrm{O}_6, a^k, \mathrm{O}_3)$.

Следствие 4.14. *Пусть $p \neq 2$. Тогда*:

$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^4 = 10k + 2s + 3$;

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+s+4, & \text{если } p \text{ делит и } k, \text{ и } s, \\ k+s+3, & \begin{cases} \text{если } p \text{ делит } k, \text{ но не делит } s \text{ или} \\ \text{если } p \text{ делит } s, \text{ но не делит } k, \end{cases} \\ k+s+2, & \text{если } p \text{ не делит ни } k, \text{ ни } s. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}^\bullet := \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, где $X_\bullet$ – комплекс из предложения 3.3. Как и выше, мы отождествляем элементы

$$f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X_n, R) \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$$

с соответствующими наборами значений $f(e_i \otimes e_j)$ (см. замечание 4.1).

Из описания бимодульной резольвенты алгебры R, построенной в §3, вытекает что, комплекс $\mathcal{X}^\bullet$ в больших степенях 6-периодичен; более точно, при $n \geqslant 9$

$$\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet} = \delta^{n-6}_{\mathcal{X}^\bullet},$$

и следовательно,

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^{n-6}(\mathcal{X}^\bullet) \tag{4.54}$$

при $n \geqslant 10$. Кроме того, $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = \mathrm{HH}^n(R)$ при $0 \leqslant n \leqslant 2$.

В следующем предложении мы опишем $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ для $4 \leqslant n \leqslant 9$.

Предложение 4.15. *Пусть $p \neq 2$. Тогда*:

$$\begin{aligned} &\dim_K \mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 4, \\ &\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 5 \ \text{ для } \ n \in \{5, 9\}, \\ &\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 6 \ \text{ для } \ n \in \{6, 7, 8\}. \end{aligned}$$

Доказательство. 1) Аналогично доказательству предложений 4.4 и 4.5 устанавливаем, что в качестве базиса пространства $\operatorname{Ker} \delta^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.55}$$

$$\big(g^i - a^i, \mathrm{O}_7\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.56}$$

$$\big(0, \beta a^i, 0, -\gamma b^i, \mathrm{O}_4\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.57}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, b^i, \mathrm{O}_5\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{4.58}$$

$$\big(\mathrm{O}_4, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.59}$$

$$\big(\mathrm{O}_4, g^i + a^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.60}$$

$$\big(\mathrm{O}_5,\beta a^i,\mathrm{O}_2\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.61}$$
$$\big(\mathrm{O}_5,\beta\alpha g^i,\alpha\gamma b^i,0\big) \text{ для } 0\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.62}$$
$$\big(\mathrm{O}_6,\gamma b^i,0\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.63}$$
$$\big(\mathrm{O}_7,\eta^i\big) \text{ для } 2\leqslant i\leqslant s; \tag{4.64}$$
$$\big(\mathrm{O}_4,a^k,\mathrm{O}_3\big),\ \big(0,\beta\alpha g^{k-1},\eta^{s-1},\mathrm{O}_2,-\beta,\mathrm{O}_2\big), \tag{4.65}$$
$$\big(\mathrm{O}_2,\eta^{s-1},\alpha\gamma b^{k-1},\mathrm{O}_2,\gamma,0\big),\ \big(0,\beta\alpha g^{k-1},0,-\alpha\gamma b^{k-1},\mathrm{O}_3,\eta\big), \tag{4.66}$$
$$\big(\alpha,\mathrm{O}_7\big),\ \big(a^k,\mathrm{O}_7\big),\ \big(\mathrm{O}_4,e_0,\mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_4,\gamma\beta a^{k-1},\mathrm{O}_3\big), \tag{4.67}$$

а для пространства $\operatorname{Im}\delta^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ в качестве базиса можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\alpha g^i,\mathrm{O}_7\big) \text{ для } 0\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.68}$$
$$\big(g^i+a^i,\mathrm{O}_7\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.69}$$
$$\big(0,\gamma\beta a^i,\mathrm{O}_6\big) \text{ для } 0\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.70}$$
$$\big(0,a^i,0,b^i,\mathrm{O}_4\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.71}$$
$$\big(0,g^i,-b^i,\mathrm{O}_5\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.72}$$
$$\big(\mathrm{O}_2,\eta^i,-\eta^i,\mathrm{O}_4\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant s-1; \tag{4.73}$$
$$\big(\mathrm{O}_4,\alpha g^i,\mathrm{O}_3\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.74}$$
$$\big(\mathrm{O}_4,g^i-a^i,\mathrm{O}_3\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.75}$$
$$\big(\mathrm{O}_5,-\beta a^i,0,\gamma b^i\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.76}$$
$$\big(\mathrm{O}_6,b^i,0\big) \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k; \tag{4.77}$$
$$\big(a^k,\mathrm{O}_7\big),\ \big(0,a^k,\mathrm{O}_6\big),\ \big(\mathrm{O}_2,\eta^s,\mathrm{O}_5\big), \tag{4.78}$$
$$\big(\mathrm{O}_3,\eta^s,\mathrm{O}_4\big),\ \big(\mathrm{O}_2,\eta^{s-1},\eta^{s-1},0,-\beta,0,\gamma\big). \tag{4.79}$$

Также прямыми вычислениями показывается, что в качестве базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^3_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов, указанных в (4.55)–(4.66). Из описания базиса $\operatorname{Ker}\delta^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ получаем, что (когомологические) классы элементов из (4.67) образуют базис $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet)$.

2) Вновь прямыми вычислениями показывается, что базисом для пространства $\operatorname{Ker}\delta^5_{\mathcal{X}^\bullet}$ служит множество, состоящее из элементов,

указанных в (4.68)–(4.79), а также из элементов

$$\big(e_0, \mathrm{O}_7\big),\ \big(0, e_0, -e_1, e_1, \mathrm{O}_4\big), \tag{4.80}$$

$$\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_7\big),\ \big(\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_4, a^k, \mathrm{O}_3\big), \tag{4.81}$$

и следовательно, классы элементов из (4.80), (4.81) образуют базис $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$.

3) Аналогичные вычисления, детальное проведение которых мы оставляем читателю, показывают, что классы элементов

$$\big(\alpha, \mathrm{O}_7\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_7\big),\ \big(0, \beta, \mathrm{O}_6\big),\ \big(\mathrm{O}_4, e_0, \mathrm{O}_3\big), \tag{4.82}$$

$$\big(\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1\big),\ \big(\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big) \tag{4.83}$$

образуют базис пространства $\mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$, классы элементов

$$\big(e_0, \mathrm{O}_7\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_7\big), \big(0, \beta\alpha g^{k-1}, -\eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \mathrm{O}_4\big), \tag{4.84}$$

$$\big(0, -\beta\alpha g^{k-1}, \mathrm{O}_4, \gamma, 0\big),\ \big(\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_4, a^k, \mathrm{O}_3\big) \tag{4.85}$$

образуют базис пространства $\mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet)$, классы элементов

$$\big(\alpha, \mathrm{O}_7\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_7\big),\ \big(0, a^k, \mathrm{O}_6\big),\ \big(\mathrm{O}_4, e_0, \mathrm{O}_3\big), \tag{4.86}$$

$$\big(\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_5, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big) \tag{4.87}$$

образуют базис $\mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet)$, и, наконец, классы элементов

$$\big(e_0, \mathrm{O}_7\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_7\big), \big(\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3\big), \tag{4.88}$$

$$\big(\mathrm{O}_4, a^k, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\big) \tag{4.89}$$

образуют базис $\mathrm{H}^9(\mathcal{X}^\bullet)$. □

Замечание 4.16. Отметим для полноты информации, что с помощью аналогичных вычислений доказывается, что (для $p \neq 2$)

$$\dim_K \mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet) = k + s + 5.$$

Предложение 4.17. *Пусть $p \neq 2$. Для $n \geqslant 5$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 0 \ \textit{ или } \ 5 \pmod 6, \\ 3, & \textit{если } n \equiv 1 \ \textit{ или } \ 4 \pmod 6, \\ 4, & \textit{если } n \equiv 2 \ \textit{ или } \ 3 \pmod 6. \end{cases}$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (3.3) после применения функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(\,-\,,R)$ даёт короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4],R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet,R) \xrightarrow{\imath^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

(где $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet,R)$) которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots\ . \tag{4.90}$$

Из точности этой последовательности получаем соотношение

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n - \dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^{n-1}.$$

Таким образом, нам достаточно описать ядра и образы связывающих гомоморфизмов из последовательности (4.90).

Лемма 4.18. *Для* $n \geqslant 4$

(а) $$\dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^n = \begin{cases} 0, & \textit{если } n \equiv 3 \pmod 6, \\ 1, & \textit{если } n \equiv 1\,, 2 \textit{ или } 4 \pmod 6, \\ 2, & \textit{если } n \equiv 0 \textit{ или } 5 \pmod 6. \end{cases}$$

(б) $$\dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n = \begin{cases} 3, & \textit{если } n \equiv 4 \textit{ или } 5 \pmod 6, \\ 4, & \textit{если } n \equiv 0 \pmod 6, \\ 5, & \textit{если } n \equiv 1\,, 2 \textit{ или } 3 \pmod 6. \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что связывающий гомоморфизм Δ^n строится следующим образом. Пусть $f \in \mathrm{Ker}\,\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$, и пусть $\widetilde{f} := (\mathrm{O}, f) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n,R)$ – доопределение f нулём на всё $Q_n = Q_{n-4} \oplus X_n$. Так как $\imath^*(\widetilde{f}) = f$, то существует $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3},R)$ такой, что $\pi^*(g) = \delta^n(\widetilde{f})$, при этом g – коцикл, и тогда полагают $\Delta(\mathrm{cl}\, f) := \mathrm{cl}\, g$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4},R) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n,R) & \xrightarrow{\imath^*} & \mathcal{X}^n & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\delta^{n-4}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta^n} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3},R) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n+1},R) & \xrightarrow{\imath^*} & \mathcal{X}^{n+1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

1) Предположим, что $n \equiv 0 \pmod 6$ ($n \geqslant 4$), и пусть $f = (s_1, \ldots, s_8) \in \mathrm{Ker}\,\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ (здесь s_t, $1 \leqslant t \leqslant 8$, принадлежат подходящим P_{ij}). Введём сокращенное обозначение $S_f := (s_1, s_2, s_3, s_4)$. Ввиду описания

базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.15, можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (4.82), (4.83). Заметим, что дифференциал d_n^Q имеет следующий "блочно-треугольный" вид:

$$d_n^Q = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^Q} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \tau_{15} & \sigma_{15} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_{06} & \sigma_{06} \end{array} \right).$$

При этом в матрице дифференциала d_{n-4}^Q в правом нижнем углу стоит 4×4-блок, равный σ_{02}. Тогда (в предыдущих обозначениях) имеем

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \big(\,\mathrm{O}, \tau_{15}^*(S_f), \mathrm{O}_8\,\big).$$

Для $f_1 = \big(\alpha, \mathrm{O}_7\,\big)$

$$\delta^n(\widetilde{f_1}) = \big(\,\mathrm{O}, -2a^k, \mathrm{O}_3, \mathrm{O}_8\,\big) = \pi^*(g_1),$$

где $g_1 = \big(\,\mathrm{O}, -2a^k, \mathrm{O}_3\,\big)$. Но легко видеть, что $\big(-2a^k, \mathrm{O}_3\,\big)$ не лежит в $\mathrm{Im}\,\sigma_{02}^*$, тогда $g_1 \notin \mathrm{Im}\,\delta^{n-4}$, и потому $\Delta(\mathrm{cl}\,f_1) \neq 0$. Для $f_2 = \big(0, \beta, \mathrm{O}_6\,\big)$

$$\delta^n(\widetilde{f_2}) = \big(\,\mathrm{O}, 0, a^k, 0, b^k, \mathrm{O}_8\,\big) = \pi^*(g_2),$$

где $g_2 = \big(\,\mathrm{O}, 0, a^k, 0, b^k\big)$, и снова $\big(0, a^k, 0, b^k\big) \notin \mathrm{Im}\,\sigma_{02}^*$, т.е. $\Delta(\mathrm{cl}\,f_2) \neq 0$. При этом ясно, что остальные элементы из (4.82) и (4.83) лежат в $\mathrm{Ker}\,\Delta^n$. Таким образом, в этом случае

$$\dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^n = 2, \quad \dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n = 4.$$

2) Предположим, что $n \equiv 1 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $f \in \mathrm{Ker}\,\delta_{\mathcal{X}^\bullet}^n$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.15, можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (4.84), (4.85). Сейчас дифференциал d_n^Q имеет следующий вид:

$$d_n^Q = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^Q} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \tau_{16} & \sigma_{16} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_{07} & \sigma_{01} \end{array} \right),$$

а в матрице дифференциала d_{n-4}^Q в правом нижнем углу стоит 4×4-блок, равный σ_{03}. Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \big(\,\mathrm{O}, \tau_{16}^*(S_f), \mathrm{O}_8\,\big).$$

Аналогично предыдущему получаем, что $\Delta(\operatorname{cl} f) \neq 0$ только для $f = \big(e_0, \mathrm{O}_7\,\big)$, и таким образом, в этом случае

$$\dim_K \operatorname{Im}\Delta^n = 1, \quad \dim_K \operatorname{Ker}\Delta^n = 5.$$

3) Предположим, что $n \equiv 2 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $f \in \operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.15, можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (4.86), (4.87). Сейчас дифференциал d_n^Q имеет следующий вид:

$$d_n^Q = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^Q} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \tau_{17} & \sigma_{17} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_{02} & \sigma_{02} \end{array}\right),$$

а в матрице дифференциала d_{n-4}^Q в правом нижнем углу стоит 4×4-блок, равный σ_{04}.

Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \big(\,\mathrm{O}, \tau_{17}^*(S_f), \mathrm{O}_8\,\big).$$

Аналогично предыдущему получаем, что $\Delta(\operatorname{cl} f) \neq 0$ только для $f = \big(\alpha, \mathrm{O}_7\,\big)$, и таким образом,

$$\dim_K \operatorname{Im}\Delta^n = 1, \quad \dim_K \operatorname{Ker}\Delta^n = 5.$$

4) Предположим, что $n \equiv 3 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $f \in \operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ – один из элементов, приведённых в (4.88), (4.89). Сейчас дифференциал d_n^Q имеет следующий вид:

$$d_n^Q = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^Q} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \tau_{18} & \sigma_{12} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_{03} & \sigma_{03} \end{array}\right),$$

а в матрице дифференциала d_{n-4}^Q в правом нижнем углу стоит 4×4-блок, равный σ_{05}. Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \big(\,\mathrm{O}, \tau_{18}^*(S_f), \mathrm{O}_8\,\big).$$

Сразу ясно, что $\Delta^n(f) = 0$ для всех f, равных элементам из (4.88) и (4.89), за исключением $f = \big(e_0, \mathrm{O}_7\big)$. Для такого f имеем $\delta^n(\widetilde{f}) = \pi^*(g)$, где $g = \big(\mathrm{O}, 2a^k, \mathrm{O}_3\big) = \delta^{n-4}(\mathrm{O}, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big)$. Таким образом, Δ^n – нулевой гомоморфизм, и следовательно,

$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = 0, \quad \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 5.$$

5) Предположим, что $n \equiv 4 \pmod 6$, и пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ – один из элементов, приведённых в (4.67). Сейчас дифференциал d^Q_n имеет следующий вид:

$$d^Q_n = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d^Q_{n-4}} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \tau_{13} & \sigma_{13} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_{04} & \sigma_{04} \end{array} \right).$$

Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \big(\mathrm{O}, \tau^*_{13}(S_f), \mathrm{O}_8\big).$$

Аналогично предыдущему получаем, что $\Delta(\operatorname{cl} f) \neq 0$ только для $f = \big(\alpha, \mathrm{O}_7\big)$, и таким образом,

$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = 1, \quad \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 3.$$

6) Предположим, что $n \equiv 5 \pmod 6$, и пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ – один из элементов, приведённых в (4.80), (4.81). Сейчас дифференциал d^Q_n имеет следующий вид:

$$d^Q_n = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d^Q_{n-4}} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \tau_{14} & \sigma_{14} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_{05} & \sigma_{05} \end{array} \right).$$

Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \big(\mathrm{O}, \tau^*_{14}(S_f), \mathrm{O}_8\big).$$

Аналогично предыдущему получаем, что $\Delta(\operatorname{cl} f) \neq 0$ только для $f = \big(e_0, \mathrm{O}_7\big)$ и $f = \big(0, e_0, -e_1, e_1, \mathrm{O}_4\big)$, и таким образом,

$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = 2, \quad \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 3. \qquad \square$$

Из леммы 4.18 следует соотношение: при $n \geqslant 5$

$$\dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n - \dim_K \operatorname{Im} \Delta^{n-1} = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 0 \text{ или } 5 \pmod 6, \\ 3, & \text{если } n \equiv 1 \text{ или } 4 \pmod 6, \\ 4, & \text{если } n \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod 6, \end{cases}$$

и это завершает доказательство предложения 4.17. □

Таким образом, часть (III) теоремы 2.1 полностью доказана.

Следствие 4.19. *Пусть $p \neq 2$. Для любого $n \geqslant 13$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-12}(R) = 9.$$

§5. Группы когомологий: случай $p = 2$

По-прежнему $R = R_{k,s,0}$ обозначает K-алгебру, определённую в §2. Далее мы всюду предполагаем, что $p (= \operatorname{char} K)$ равно двум. Мы сохраним бóльшую часть обозначений предыдущего раздела, в частности, δ^n – это дифференциалы комплекса $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)$, где $\mu \colon Q_\bullet \to R$ – бимодульная резольвента алгебры R, построенная в §3. Уже было отмечено, что независимо от характеристики основного поля имеем $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$ (см. предложение 4.2).

Анализируя соотношения (4.8)–(4.14) (при условии $p = 2$), аналогично предложению 4.4 получаем следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Пусть $p = 2$.*

(а) *Предположим дополнительно, что k и s чётны. Тогда пространство $\operatorname{Ker} \delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (4.15)–(4.21)*, а также из следующих элементов*

$$(e_0, \mathrm{O}_3), \ (\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3).$$

(б) *Пусть теперь k чётно, а s нечётно. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Ker} \delta^1$ надо из множества, указанного в части* (а)*, удалить элемент (O_3, η).*

(в) *Пусть s чётно, а k нечётно. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Ker} \delta^1$ надо в множестве, указанном в части* (а)*, тройку элементов (α, O_3), $(0, \beta, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_2, \gamma, 0)$ заменить на пару элементов $(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2)$ и $(\alpha, 0, \gamma, 0)$.*

(г) *Пусть, наконец, k и s нечётны. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Ker} \delta^1$ надо в множестве, указанном в части* (в)*, заменить элемент (O_3, η) на элемент $(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta)$.*

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 4.5.

Предложение 5.2. *Пусть* $p = 2$.

(а) *Предположим дополнительно, что* k *и* s *чётны. Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (4.23), (4.24), (4.25), *а также из элементов*

$$\big(\,\mathrm{O}_2, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\,\big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

(б) *Пусть теперь* k *чётно, а* s *нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (а), *элемент* $\big(\,\mathrm{O}_3, \beta, 0, \gamma\big)$ *из* (4.25) *заменить на элемент* $\big(0, \eta^{s-1}, 0, \beta, 0, \gamma\big)$, *а также добавить к этому множеству элемент* $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_4\,\big)$.

(в) *Пусть* s *чётно, а* k *нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо к множеству, указанному в части* (а), *присоединить элемент* $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_4\,\big)$.

(г) *Пусть, наконец,* k *и* s *нечётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо взять множество, описанное в части* (б).

Следствие 5.3. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 5k+s+2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны},\\ 5k+s+1, & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k-2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны},\\ 4k-1, & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+4, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны},\\ k+s+3, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение о $\dim_K \mathrm{HH}^1(R)$ следует из предложения 5.1 и замечания 4.3. □

Анализируя соотношения (4.35)–(4.53), аналогично предложению 4.4 получаем следующее утверждение.

Предложение 5.4. *Пусть* $p = 2$. *Тогда для любых* k *и* s $(k \geqslant 1$, $s \geqslant 2)$ *пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (4.27)–(4.34), *а также*

$$\big(e_0, e_1, \mathrm{O}_4\,\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_5\,\big).$$

Предложение 5.5. *Пусть $p = 2$, а k и s произвольны ($k \geqslant 1$, $s \geqslant 2$). Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^2$ надо из множества, указанного в предложении 4.8, удалить элементы $\big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_6\big)$ и $\big(a^k, \mathrm{O}_7\big)$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 4.5. □

Следствие 5.6. *Пусть $p = 2$. Тогда*:

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Ker}\delta^2 &= 5k + s + 5;\\ \dim_K \operatorname{Im}\delta^2 &= 9k + s - 5;\\ \dim_K \mathrm{HH}^2(R) &= \begin{cases} k + s + 7, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны},\\ k + s + 6, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}\end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet} := \operatorname{Hom}_{\Lambda}(\widetilde{X}_{\bullet}, R)$, где $\widetilde{X}_{\bullet}$ – комплекс из предложения 3.4. Как и выше, мы отождествляем элементы

$$f \in \operatorname{Hom}_{\Lambda}(\widetilde{X}_n, R) \subset \operatorname{Hom}_{\Lambda}(Q_n, R)$$

с соответствующими наборами значений $f(e_i \otimes e_j)$ (см. замечание 4.1).

Из описания бимодульной резольвенты алгебры R, построенной в §3, вытекает что, комплекс $\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}$ в больших степенях 3-периодичен; более точно, при $n \geqslant 4$

$$\delta^n_{\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}} = \delta^{n-3}_{\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}},$$

и следовательно,

$$\mathrm{H}^n(\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}) \simeq \mathrm{H}^{n-3}(\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet})$$

при $n \geqslant 5$.

В следующем предложении мы описываем $\dim_K \mathrm{H}^n(\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet})$ для $n \in \{2, 3, 4\}$.

Предложение 5.7. *Пусть $p = 2$. Тогда*:

$$\begin{aligned}&\dim_K \mathrm{H}^2(\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}) = \dim_K \mathrm{H}^4(\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}) = 5,\\ &\dim_K \mathrm{H}^3(\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}) = 6.\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Аналогично доказательству предложений 4.4 и 4.5 устанавливаем, что в качестве базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^2_{\widetilde{\mathcal{X}}^{\bullet}}$ можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\,\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{5.1}$$

$$\big(g^i + a^i, \mathrm{O}_3\,\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{5.2}$$

$$\big(0, \beta a^i, 0, \gamma b^i\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{5.3}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_2, b^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{5.4}$$

$$\big(e_0, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\alpha, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big), \tag{5.5}$$

$$\big(a^k, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(0, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big), \tag{5.6}$$

а для пространства $\operatorname{Im}\delta^2_{\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet}$ в качестве базиса можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\,\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{5.7}$$

$$\big(g^i + a^i, \mathrm{O}_3\,\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{5.8}$$

$$\big(0, \gamma\beta a^i, \mathrm{O}_2\,\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{5.9}$$

$$\big(0, a^i, 0, b^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{5.10}$$

$$\big(0, g^i, b^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{5.11}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_2, \eta^i, \eta^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{5.12}$$

Также прямыми вычислениями показывается, что в качестве базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1_{\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов, указанных в (5.1)–(5.4). Из описания базиса $\operatorname{Ker}\delta^2_{\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet}$ получаем, что классы элементов из (5.5), (5.6) образуют базис $\mathrm{H}^2(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet)$.

2) Вновь прямыми вычислениями показывается, что базисом для пространства $\operatorname{Ker}\delta^3_{\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet}$ служит множество, состоящее из элементов, указанных в (5.7)–(5.12), а также из элементов

$$\big(e_0, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\alpha, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big), \tag{5.13}$$

$$\big(a^k, \mathrm{O}_3\,\big), \big(0, e_0, e_1, e_1\big),\ \big(0, a^k, \mathrm{O}_2\,\big), \tag{5.14}$$

и следовательно, классы элементов из (5.13), (5.14) образуют базис $\mathrm{H}^3(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet)$.

3) Аналогичные вычисления показывают, что классы элементов

$$\big(e_0, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\alpha, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(0, \beta, \mathrm{O}_2\,\big) \tag{5.15}$$

образуют базис пространства $\mathrm{H}^4(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet)$. Детали соответствующих вычислений предоставляем провести читателю. □

Замечание 5.8. Отметим для полноты информации, что (для $p=2$)

$$\begin{aligned}\dim_K \mathrm{H}^0(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet) &= \dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k+s+2,\\ \dim_K \mathrm{H}^1(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet) &= k+s+4.\end{aligned}$$

Предложение 5.9. *Пусть $p=2$. Для $n \geqslant 3$ имеем*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-2}(R) = \begin{cases} 6, & \text{если } n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 3),\\ 5, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (3.4) индуцирует короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-2], R) \xrightarrow{\widetilde{\pi}^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{\widetilde{\imath}^*} \widetilde{\mathcal{X}}^\bullet \to 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\Delta}^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-2}(R) \xrightarrow{\widetilde{\pi}^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\widetilde{\imath}^*} \mathrm{H}^n(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet) \xrightarrow{\widetilde{\Delta}^n} \mathrm{HH}^{n-1}(R) \xrightarrow{\widetilde{\pi}^*} \cdots \ .$$

Лемма 5.10. $\widetilde{\Delta}^n = 0$ *при $n \geqslant 2$.*

Доказательство. 1) Предположим, что $n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 3)$ $(n \geqslant 2)$, и пусть $f \in \mathrm{Ker}\, \delta^n_{\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet}$. Положим $\widetilde{f} := (\mathrm{O}, f) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ (т.е. $\widetilde{f}$ – доопределение f нулём на всё $Q_n = Q_{n-2} \oplus \widetilde{X}_n$). Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^3(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 5.7, можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (5.13) и (5.14). Дифференциал d^Q_n имеет следующий вид:

$$d^Q_n = \left(\begin{array}{c|c} d^Q_{n-2} & \mathrm{O} \\ \hline \tau_{03} & \sigma_{03}\end{array}\right).$$

Непосредственно проверяется, что $\delta^n(\widetilde{f}) = 0$, и потому (ср. доказательство леммы 4.18) в этом случае $\widetilde{\Delta}^n = 0$.

2) Предположим, что $n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 3)$ $(n \geqslant 2)$, и пусть $f \in \mathrm{Ker}\, \delta^n_{\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet}$. Вновь положим $\widetilde{f} := (\mathrm{O}, f) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^4(\widetilde{\mathcal{X}}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 5.7, можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (5.15). Сейчас дифференциал d^Q_n имеет следующий вид:

$$d_n^Q = \left(\begin{array}{c|c} d_{n-2}^Q & \mathrm{O} \\ \hline \tau_{04} & \sigma_{04} \end{array}\right).$$

Сразу ясно, что $\widetilde{\Delta}^n(f) = 0$ для всех f, равных элементам из (5.15), за исключением $f = \big(0, \beta, \mathrm{O}_2\big)$. Если же $f = \big(0, \beta, \mathrm{O}_2\big)$, то

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \big(\mathrm{O}, a^k, 0, b^k, \mathrm{O}_4\big) = \widetilde{\pi}^*(\delta^{n-2}(\mathrm{O}, \alpha\gamma b^{k-1})).$$

Таким образом, и в этом случае $\widetilde{\Delta}^n(f) = 0$.

3) Наконец, если $n \equiv 2 \pmod 3$, то требуемое утверждение доказывается аналогично случаю 1). □

Теперь предложение 5.9 вытекает (с помощью леммы 5.10) непосредственно из предложения 5.7, и это завершает доказательство части (II) теоремы 2.1. □

Следствие 5.11. *Пусть $p = 2$. Для любого $n \geqslant 7$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-6}(R) = 16.$$

Литература

1. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lect. Notes Math., vol. 1428, Berlin, Heidelberg, 1990.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–122.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **1**8 (2006), вып. 1, 55–107.
4. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
6. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 63–72.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.

9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 2, 1–51.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.
11. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 133–157.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии* $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ *при* $c=0$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 45–92.
13. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 4, 39–82.
14. K. Erdmann, Th. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class* A_n, II. — Algebras Repr.Theory **5** (2002), 457–482.
15. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
16. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
17. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 173–200.
18. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
19. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
20. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 100–128.
21. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
22. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и Анализ **23** (2011), No. 5, 99–139.
23. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 100–118.
24. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 140–173.
25. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.
26. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* IV: серия $D(2\mathcal{B})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 76–89.

Generalov A. I., Kosovskaia N. Yu. Hochschild cohomology for algebras of dihedral type. IV. The family $D(2\mathcal{B})(k, s, 0)$.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of dihedral type which are contained in the family $D(2\mathcal{B})(k, s, c)$ (from the famous K. Erdmann's classification) in the case where the parameter c included in defining relations of algebras from this family is equal to zero. The calculation relies upon a construction of the bimodule resolution for algebras from the above family.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 17 февраля 2014 г.

Санкт-Петербургский государственный
технологический Университет растительных полимеров,
ул. Ивана Черных 4, Санкт-Петербург 198095, Россия
E-mail: nadyakosovsk@mail.ru