Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

Ю. В. Волков, А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский

ПОЛУЦЕПНОСТЬ ГРУППОВОГО КОЛЬЦА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ

§1. Введение

Пусть F – поле и G – конечная группа. В этой заметке мы докажем, что полуцепность группового кольца FG зависит только от характеристики F. Например, кольцо $\mathbb{F}_pG$ полуцепно для простого поля из p элементов, если и только если полуцепно кольцо $\widetilde{\mathbb{F}}_pG$ для алгебраического замыкания $\widetilde{\mathbb{F}}_p$. Это решает одну проблему из работы [3].

Коротко напомним базовые определения. Модуль M называется *цепным*, если его решетка подмодулей является цепью; и M *полуцепной*, если он есть прямая сумма цепных модулей. Кольцо R называется *полуцепным*, если R полуцепной правый и полуцепной левый R-модуль. Хорошо известно, что кольцо R полуцепно, если и только если существует полная ортогональная система идемпотентов $e_1, \dots, e_n \in R$ такая, что каждый правый модуль e_iR цепной, и каждый левый модуль Re_i цепной. Некоторые авторы (вполне заслуженно) называют артиновы полуцепные кольца *кольцами Накаямы*, следовательно, полуцепные конечномерные алгебры над полем – *алгебрами Накаямы* (см. [3, глава 9]).

Пусть F – произвольное поле, и пусть G – конечная группа. Мы будем интересоваться вопросом, когда групповое кольцо FG полуцепно. Баба и Оширо предложили следующую проблему.

Вопрос 1. [3, с. 276, вопрос 6] Пусть K – алгебраическое замыкание поля k. Если kG – алгебра Накаямы, верно ли, что KG является алгеброй Накаямы? И верно ли обратное?

По теореме Машке ответ на этот вопрос положительный (оба кольца классически полупросты) в случае характеристики нуль, поэтому

Ключевые слова: конечная группа, групповое кольцо, полуцепное кольцо.

Работа первого автора выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00902 и 14-01-31084.

мы можем предполагать, что оба поля имеют положительную характеристику p.

Интуитивно кажется, что кольцо KG полуцепно гораздо чаще, чем кольцо kG. Действительно, при расширении поля неразложимые идемпотенты расщепляются, поэтому главные проективные модули "худеют" (не будучи цепными изначально, они могут разлагаться в прямую сумму цепных модулей после расширения поля). В поисках контрпримера мы проверили все группы порядка $\leqslant 400$ и все поля (см. начало этой работы в [7]), но не преуспели. Следующая теорема показывает, что первоначальная интуиция обманывала нас.

Теорема 2. *Пусть $F \subseteq F'$ – пара полей конечной характеристики p, и пусть G – конечная группа. Тогда групповое кольцо FG полуцепно, если и только если кольцо $F'G$ полуцепно.*

Конечно, эта теорема не утверждает, что структура обоих колец "одинакова" (см. примеры в [7]).

Достаточно неожиданно, теорема "спуска" от большого поля к малому (которую труднее осознать интуитивно) допускает изящное доказательство, в котором используется гомологический подход Ауслендера (см. [2, глава IV]) к алгебрам Накаямы. К несчастью, мы не смогли доказать теорему "подъема", используя тот же метод, и вынуждены были прибегнуть к менее прозрачным рассуждениям типа сепарабельности.

§2. Спуск

Напомним сначала терминологию Ауслендера [2]. Пусть R – артиново коммутативное кольцо. Кольцо A называется *артиновой R-алгеброй*, если R – подкольцо центра A, причем A – конечно порожденный R-модуль. Например, это условие выполняется для конечномерной алгебры над полем. Ауслендер [2, с. 112] называет A алгеброй Накаямы, если любой неразложимый проективный и любой неразложимый инъективный (скажем правый) A-модуль является цепным. Согласно [2, теорема I.3.1]) имеется дуальность между категориями конечно порожденных правых и левых A-модулей (которая посылает проективные модули в инъективные и наоборот). Из этого вытекает, что определение Ауслендера лево-право симметрично и эквивалентно полуцепности (поэтому согласуется с приведенным выше определением алгебры Накаямы).

Поскольку групповая алгебра конечной группы над полем квазифробениусова (то есть любой проективный модуль инъективен и наоборот), то для нее эквивалентность обоих определений (полуцепности и алгебры Накаямы) совсем очевидна.

Через $\mathrm{Jac}(R)$ мы обозначаем радикал Джекобсона кольца R. Нам потребуются два следующих факта об алгебрах Накаямы.

Факт 3. [2, следствие IV.2.4] A является алгеброй Накаямы, если и только если $A/\mathrm{Jac}(A)^2$ – алгебра Накаямы.

На самом деле этот факт верен в более общей ситуации нетеровых колец (см. ниже). Но следующая ситуация кажется более ограничительной.

Факт 4. [2, предложение IV.2.16] Пусть A – артинова R-алгебра с $\mathrm{Jac}(A)^2 = 0$. Тогда A является алгеброй Накаямы, если и только если инъективная оболочка $I(A)$ является проективным модулем.

Нам потребуется одна простая лемма.

Лемма 5. *Пусть $R \subseteq S$ – кольца с общей единицей такие, что модуль ${}_RS$ плоск. Тогда любой инъективный правый S-модуль I является инъективным как правый R-модуль.*

Доказательство. Пусть $0 \to M_R \to N_R$ – вложение правых R-модулей. Мы проверим, что индуцированное отображение $\mathrm{Hom}_R(N, I_R) \to \mathrm{Hom}_R(M, I_R)$ является наложением. Поскольку модуль ${}_RS$ плоск, то тензорное произведение индуцирует вложение $0 \to M \otimes_R S \to N \otimes_R S$ правых S-модулей. Из инъективности I_S вытекает эпиморфность индуцированной последовательности

$$\mathrm{Hom}_S(N \otimes_R S, I_S) \to \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, I_S) \to 0.$$

Осталось применить канонический изоморфизм (см. [1, предложение 20.6])

$$\mathrm{Hom}_S(N \otimes_R S, I_S) \cong \mathrm{Hom}_R(N_R, \mathrm{Hom}_S(S, I_S)) \cong \mathrm{Hom}_R(N, I_R),$$

и аналогичный изоморфизм для M. □

Используя рассуждения аналогичные [2, следствие IV.2.19], мы докажем половину основной теоремы.

Предложение 6. *Пусть $F \subseteq F'$ – пара полей характеристики p и пусть G – конечная группа. Если групповое кольцо $F'G$ полуцепно, то и кольцо FG полуцепно.*

Доказательство. FG является подкольцом кольца $F'G$ относительно естественного включения (если представить $F'G$ как $F' \otimes_F FG$, тогда это включение определяется как $a \mapsto 1 \otimes a$). Более того, $F'G$ является свободным правым и левым FG-модулем.

Заметим, что наша ситуация несколько отличается от рассмотренной в [2]. А именно, кольцо $F'G$ не является артиновой F-алгеброй (но является артиновой F'-алгеброй!).

Пусть $A = FG$, $J = \mathrm{Jac}(A)$ и $A' = F'G = F' \otimes_F FG$, $J' = \mathrm{Jac}(A')$. Ввиду [4, теорема 7.10] полупростая алгебра A/J сепарабельна, поэтому $J' = F' \otimes_F J$ и $J'^2 = F' \otimes_F J^2$. Итак, если $C = A/J^2$ и $C' = A'/J'^2$, то $C' = F' \otimes_F C$, поэтому C' свободен как правый и левый C-модуль.

По замечаниям 3, 4 достаточно доказать, что инъективная оболочка $I_C(C)$ является проективным правым C-модулем.

Поскольку C' – алгебра Накаямы, то инъективная оболочка $I_{C'}(C')$ является проективным правым C'-модулем. Из свободы C' как правого C-модуля следует, что $I_{C'}(C')$ проективен как правый C-модуль.

Поскольку C' – свободный левый C-модуль, то лемма 5 влечет инъективность $I_{C'}(C')$ как правого C-модуля. Из включения $C' \subseteq I_{C'}(C')$ следует, что инъективная оболочка $I_C(C')$ является прямым слагаемым $I_{C'}(C')$ (как правый C-модуль). Тогда включение $C \subseteq C'$ влечет, что $I_C(C)$ – прямое слагаемое C-модуля $I_{C'}(C')$. Поскольку последний C-модуль проективен, то и модуль $I_C(C)$ проективен. □

§3. Подъем

Чтобы завершить доказательство теоремы 2, мы “поднимемся” с простого подполя.

Предложение 7. *Пусть F' – поле характеристики p, и пусть G – конечная группа. Если групповое кольцо $\mathbb{F}_pG$ полуцепно, то и кольцо $F'G$ полуцепно.*

Мы не смогли дать доказательство этого результата в духе [2, с. 121]. Одно из возможных препятствий состоит в следующем. Пусть $A = FG$ и $A' = F'G$. Если размерность F' над F бесконечна, то (по соображениям мощности) A'-A бимодули A' и $\mathrm{Hom}_A(A', A)$ не изоморфны (в отличие от [2, предложение III.4.12]).

Напомним некоторые факты из теории артиновых полуцепных колец. Мы предпочитаем ссылаться на [9, глава 8], но также используем [6] и [3]. Итак, пусть R – полуцепное артиново кольцо с радикалом

Джекобсона J. Предположим, что R неразложимо и базисно, и выберем полную систему ортогональных неразложимых идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ в R. Тогда диагональные компоненты $R_i = e_i R e_i$ являются цепными кольцами, и любой R_i-R_j бимодуль $R_{ij} = e_i R e_j$ является цепным левым R_i-модулем и цепным правым R_j-модулем.

Более того (конструкция Купиша), можно выбрать нумерацию идемпотентов так, чтобы радикал модуля $e_i R$ порождался (ненулевым) элементом из $R_{i,i+1}$ для $i = 1, \dots, n-1$, а радикал модуля $e_n R$ либо нулевой, либо порождается ненулевым элементом из R_{n1}. В первом случае мы определим *колчан* кольца R как цепь $1 \to 2 \to \dots \to n$, а во втором случае – как цикл $1 \to 2 \to \dots \to n \to 1$. В первом случае (когда проективный модуль $e_n R$ прост) по [9, предложение 8.2] кольцо R изоморфно гомоморфному образу кольца верхнетрегольных матриц над телом $D = R_1$ (в частности цепное кольцо R_1 является телом).

Если k_i обозначает длину модуля $e_i R$, то ряд $(k_1, \dots, k_n)$ называется *рядом Купиша* кольца R. Например, R полупросто, если и только если все k_i равны 1 (и тогда $n = 1$). Кроме того, колчан R является цепью длины > 1, если и только если одно из k_i равно 1.

Из [9, теорема 8.10] следует, что R квазифробениусово, если и только если ряд Купиша постоянен. Предположим, что $n > 1$, а ряд Купиша постоянен и равен $(2, \dots, 2)$. Тогда $D = R_1$ – простой R-модуль. Таким образом, из [3, теорема 7.3.7] вытекает, что для некоторого автоморфизма $\alpha : D \to D$ кольцо R описывается следующим образом. Элементы R – это матрицы вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & y_{n-1} \\ y_n & 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix},$$

где $x_1, \dots, x_n, y_1 \dots, y_n \in D$. Умножение же задаётся формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & y_{n-1} \\ y_n & 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x'_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x'_{n-1} & y'_{n-1} \\ y'_n & 0 & \dots & 0 & x'_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1x_1' & x_1y_1'+y_1x_2' & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2x_2' & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1}x_{n-1}' & x_{n-1}y_{n-1}'+y_{n-1}x_n' \\ x_ny_n'+y_n\alpha(x_1') & 0 & \dots & 0 & x_nx_n' \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать только что описанное кольцо через $T(D,n,\alpha)$.

Заметим также, что в случае, когда $n=1$, $J^2=0$ и $J\neq 0$, J является одномерным (левым и правым) векторным пространством над телом $D=R/J$. Если радикал R отщепляется (то есть $R=D\oplus J$ как векторные пространства над D), то (выбирая порождающий радикала) нетрудно видеть, что R изоморфно фактор-кольцу кольца косых полиномов $D[x,\alpha]$ по идеалу, порожденному x^2, для некоторого автоморфизма $\alpha : D\to D$. Мы будем обозначать такое кольцо через $T(D,1,\alpha)$.

Кроме того, нам понадобится следующее утверждение, которое вытекает из рассмотрений [4, глава 7], хотя нам будет достаточно даже [10, с. 206, теорема 1.5]. Пусть $F\subseteq F'$ – конечное сепарабельное расширение полей и $F\subseteq F''$ – произвольное расширение. Тогда тензорное произведение $F''\otimes_F F'$ изоморфно конечному прямому произведению конечных сепарабельных расширений поля F''.

Доказательство предложения 7 будет основано на следующей лемме, представляющей самостоятельный интерес.

Лемма 8. *Предположим, что R – конечномерная квазифробениусова полуцепная $\mathbb{F}_p$-алгебра и $\mathrm{Jac}(R)^2=0$. Тогда для любого поля F' характеристики p алгебра $F'\otimes_{\mathbb{F}_p}R$ является конечномерной квазифробениусовой полуцепной F'-алгеброй с квадратом радикала равным* 0.

Доказательство. Без умаления общности можно считать, что R – базисная неразложимая алгебра. Выберем полную систему ортогональных неразложимых идемпотентов $e_1,\dots,e_k$ в R. Если кольцо R полупросто, то оно является конечным телом, то есть полем. Тогда по замечанию перед формулировкой леммы $F'\otimes_{\mathbb{F}_p}R$ является конечным произведением полей. Далее считаем, что R не полупросто, то есть ряд Купиша R постоянен и равен 2.

Как было сказано ранее, R изоморфно кольцу $T(D,k,\alpha)$ для некоторых тела D и автоморфизма $\alpha : D\to D$ (в случае $k=1$ радикал R отщепляется по [8, теорема 11.6]). Так как в нашем случае тело D конечно, то оно является полем. Так как автоморфизм α оставляет на

месте подполе $\mathbb{F}_p$ поля D, то он индуцирует некоторый автоморфизм β на кольце $D' = F' \otimes_{\mathbb{F}_p} D$ (по формуле $\beta(f' \otimes x) = f' \otimes \alpha(x)$). Тогда несложно видеть, что $F' \otimes_{\mathbb{F}_p} R$ изоморфно $T(D', k, \beta)$. Как было сказано ранее, $D' = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, где $n \in \mathbb{N}$ и все F_i являются конечными сепарабельными расширениями поля F'. Обозначим через ε_i единицу поля F_i. Тогда β задаёт некоторую перестановку β' на множестве чисел от 1 до n по правилу: $\beta'(i) = j$ тогда и только тогда, когда $\beta(\varepsilon_i) = \varepsilon_j$. Пусть $\{\mathcal{O}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant t}$ – множество орбит группы, порождённой β'. Тогда множества $G_i = \bigoplus_{j \in \mathcal{O}_i} F_j$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$ инвариантны относительно автоморфизма β. Следовательно, $T(D', k, \beta) = \bigoplus_{i=1}^{t} T(G_i, k, \beta|_{G_i})$.

Нам осталось доказать полуцепность кольца вида $T\left(\bigoplus_{i=1}^{m} F_i, k, \alpha\right)$, где $\alpha(F_{i+1}) = F_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ (все индексы здесь и далее по модулю m). Заметим, что α^m является автоморфизмом поля F_1. Мы построим изоморфизм колец

$$\varphi : T\left(\bigoplus_{i=1}^{m} F_i, k, \alpha\right) \cong T\left(F_1, mk, \alpha^m\right).$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{1,i} & \sum\limits_{i=1}^{m} y_{1,i} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{m} x_{2,i} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{i=1}^{m} x_{k-1,i} & \sum\limits_{i=1}^{m} y_{k-1,i} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_{k,i} & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{m} x_{k,i} \end{pmatrix},$$

если $k > 1$, и

$$A = \sum_{i=1}^{m} x_{1,i} + \left(\sum_{i=1}^{m} y_{1,i}\right) x,$$

если $k = 1$, где $x_{j,i}, y_{j,i} \in F_i$ $(1 \leqslant j \leqslant k,\ 1 \leqslant i \leqslant m)$. Определим

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1} \\ B_m & 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha^{i-1}(x_{1,i}) & \alpha^{i-1}(y_{1,i}) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{i-1}(x_{2,i}) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha^{i-1}(x_{k-1,i}) & \alpha^{i-1}(y_{k-1,i}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^{i-1}(x_{k,i}) \end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha^{i-1}(y_{k,i}) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что отображение φ биективно. Несложно проверить и гомоморфность. $\square$

Доказательство предложения 7. Пусть $A = e\,\mathbb{F}_pG$ – блок (то есть неразложимое кольцевое прямое слагаемое) полуцепного кольца $\mathbb{F}_pG$, где e – центральный идемпотент. Рассмотрим базисное подкольцо B кольца A, и пусть J обозначает радикал B. Положим $B' = F' \otimes_{\mathbb{F}_p} B$ и $J' = \mathrm{Jac}(B')$. Мы знаем, что $J' = F' \otimes_{\mathbb{F}_p} J$. Поскольку кольцо B полуцепное, то же самое верно для $C = B/J^2$, причем квадрат радикала J/J^2 кольца C равен нулю. По факту 3 достаточно доказать полуцепность кольца $B'/J'^2 = F' \otimes_{\mathbb{F}_p} C$. По лемме 8 достаточно показать, что C квазифробениусово кольцо. Если кольцо B полупросто, то и C полупросто. Пусть B не полупросто, то есть все числа в ряде Купиша B больше 1. Выберем полную систему ортогональных неразложимых идемпотентов $e_1, \dots, e_k$ в B и соответствующую систему ортогональных идемпотентов $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_k$ в C. Мы утверждаем, что длина любого

главного проективного модуля $\overline{e}_i C$ равна 2 (и, следовательно, C квазифробениусово). Если это не так, то (поскольку эти длины не превосходят 2) найдется простой проективный модуль $\overline{e}_i C$. Но это означает, что $e_i J = e_i J^2$. Следовательно, $e_i J = 0$ по лемме Накаямы. Но тогда колчан B является цепью, – противоречие. □

§4. Заключение

Закончим доказательство теоремы 2. Пусть F, F' – поля характеристики p, и пусть кольцо FG полуцепно. Если $\mathbb{F}_p$ – простое подполе поля F, то кольцо $\mathbb{F}_p G$ полуцепно по предложению 6. Выбирая теперь копию $\mathbb{F}_p$ внутри F', по предложению 7 мы выводим полуцепность кольца $F'G$.

Теорема 2 представляет удобный инструмент для решения вопроса о полуцепности групповых колец конкретных конечных групп (или классов групп). Например, спускаясь к простому подполю, для групп обозримого размера мы можем проверить полуцепность, вычисляя цокольные ряды главных проективных модулей в системе компьютерной алгебры MAGMA. С другой стороны, поднимаясь к алгебраически замкнутому полю, мы можем использовать всю мощь теории модулярных представлений, то есть деревьев Брауэра.

Мы отложим более подробную дискуссию до следующей работы, ограничившись только одним результатом.

Следствие 9. *Пусть F – произвольное поле характеристики p и пусть H – нормальная подгруппа конечной группы G такая, что порядок фактор-группы G/H взаимно прост с p. Тогда кольцо FH полуцепно, если и только если кольцо FG полуцепно.*

Доказательство. Можно считать поле F алгебраически замкнутым (или, как это делает Фэйт [5], достаточно большим расширением поля p-адических чисел). Но тогда результат вытекает из [5, теорема VI.2.7]. □

Если G является полупрямым произведением H и некоторой подгруппы K, то можно доказать следствие 9, используя подход Ауслендера. А именно, $\Lambda = FH$ является артиновой F-алгеброй, и K действует на кольце FH сопряжением. Тогда $FG = \Lambda K$ – косое групповое кольцо в терминологии [2, параграф III.4]. Осталось применить [2, теорема IV.2.14].

Литература

1. F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules.* 2nd edition, Springer Graduate Texts in Math., Vol. 13 (1992).
2. M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 36, Cambridge (1995).
3. Y. Baba, K. Oshiro, *Classical Artinian Rings.* World Scient. Publ. (2009).
4. C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders.* — Vol. 1, Wiley–Interscience (1981).
5. W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups.* North-Holland, Amsterdam (1982).
6. M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules.* Vol. 1, Kluwer (2004).
7. A. Kukharev, G. Puninski, *Serial group rings of finite groups. p-solvability.* — Algebra Discrete Math. **16** (2013), 201–216.
8. S. Pierce, *Associative Algebras*, Graduate Texts in Mathematics. Vol. 88, Springer (1982).
9. G. Puninski, *Serial Rings.* Kluwer (2001).
10. S. H. Weintraub, *Representation Theory of Finite Groups.* AMS Graduate Texts in Mathematics, Vol. 59 (2003).

Volkov Yu. V. , Kukharev A. V., Puninski G. E. The seriality of the group ring of a finite group depends only on the characteristic of the field.

We prove that the seriality of the group ring of a finite group over a field depends only on the characteristic of this field.

Поступило 14 апреля 2014 г.

Кафедра высшей алгебры и теории чисел,
математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета, Университетский проспект 28,
Санкт-Петербург, 198504 Россия

E-mail: wolf86_666@list.ru

Кафедра высшей алгебры и защиты информации,
механико-математический факультет Белорусского
государственного университета,
проспект Независимости 4, Минск, 220030 Беларусь

E-mail: kukharev.av@mail.ru, punins@mail.ru