Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

Ю. В. Волков

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА D_n. VI

§1. Введение

Пусть k – поле, R – конечномерная k-алгебра с единицей. Если конечная группа G действует на алгебре R, то можно определить G-градуированную алгебру $R\#kG$. Если же R – G-градуированная алгебра, то можно определить алгебру $R\#kG^*$, на которой действует группа G. При этом $(R\#kG)\#kG^*$ Морита-эквивалентна R, если G действует на R, и $(R\#kG^*)\#kG$ Морита-эквивалентна R, если R G-градуирована (см. [1]). В работе [2] построена спектральная последовательность, из существования которой следует, что в случае алгебры с действием группы имеет место изоморфизм $\mathrm{HH}^*(R\#kG) \simeq \mathrm{HH}^*(R, R\#kG)^G$, если $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$. Действие группы G на алгебре $\mathrm{HH}^*(R, R\#kG)$ определено в той же работе. Этот изоморфизм был построен в терминах длинных точных последовательностей в работе [3] (хотя в этой работе не сказано, что $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$, это условие там используется). В терминах бар-резольвент изоморфизм $\mathrm{HH}^*(R\#kG) \simeq \mathrm{HH}^*(R, R\#kG)^G$ построен в работе [4]. Соответственно, если алгебра R G-градуирована и $\widetilde{R} = R\#kG^*$, то при том же условии на порядок группы G имеет место изоморфизм $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^G$. В данной работе для конечной подгруппы $G \leqslant \mathrm{Aut}\, R$ и R-бимодуля M, на котором определено действие группы G, согласованное с бимодульной структурой, будет определена алгебра $\mathrm{HH}^*(R, M)^{G\uparrow}$ с отображением $\Theta^G_{R,M} : \mathrm{HH}^*(R, M)^{G\uparrow} \to \mathrm{HH}^*(R, M)^G$, которое является изоморфизмом в случае $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$. При этом, если алгебра R G-градуирована, будет иметь место изоморфизм $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^{G\uparrow}$.

С помощью этих результатов будет дано описание кольца когомологий Хохшильда для серии алгебр, для которых в работе [5] была

Ключевые слова: самоинъективные алгебры, конечный тип представления, когомологии Хохшильда, смэш-произведение.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00902 и 14-01-31084.

построена бимодульная резольвента и были вычислены группы когомологий Хохшильда. Это описание будет получено из описания кольца когомологий Хохшильда для другой серии алгебр, полученного в работе [6].

Автор выражает благодарность Сергею Иванову за помощь в доказательстве леммы 2 и её следствия.

§2. Смэш-произведение и когомологии Хохшильда

На протяжении всей работы k – алгебраически замкнутое поле, R – конечномерная k-алгебра. Пусть H – биалгебра с коединицей $\varepsilon : H \to k$ и коумножением $\Delta : H \to H \otimes H$. Для коумножения будем использовать стандартные обозначения $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$. Алгебра R называется H-модульной алгеброй, если задано отображение $\cdot : H \otimes R \to R$ такое, что

(1) $\cdot$ задаёт на R структуру H-модуля,
(2) $h \cdot ab = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$ $(a, b \in R,\ h \in H)$,
(3) $h \cdot 1_R = \varepsilon(h) 1_R$ $(h \in H)$.

Если R – H-модульная алгебра, определим смэш-произведение $R\#H$ следующим образом. Как векторное пространство $R\#H$ изоморфно $R \otimes H$. Для элементов $a \otimes g, b \otimes h \in R\#H$ их произведение определяется следующей формулой:

$$(a \otimes g)(b \otimes h) = \sum_{(g)} a(g_{(1)} \cdot b) \otimes (g_{(2)} h).$$

Далее для краткости мы будем писать ag вместо $a \otimes g$. В данной работе нас будут интересовать случаи $H = kG$, и $H = kG^* = \mathrm{Hom}_k(kG, k)$, где G – конечная группа. В первом случае R является H-модульной алгеброй, если определено левое действие группы G на R. Обозначим ${}^g a := g(a)$ для $a \in R$, $g \in G$. Тогда $\Delta(g) = g \otimes g$ и умножение на $R\#kG$ определяется формулой

$$(ag)(bh) = (a\,{}^g b)(gh).$$

Пусть $H = kG^*$. Тогда R является H-модульной алгеброй, если она G-градуирована, то есть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ и $R_g R_h \subset R_{gh}$. Будем в этом случае обозначать через $p_g \in kG^*$ отображение, равное 1 на g и 0 на остальных элементах группы G. Для $a \in R$, $g \in G$ через a_g обозначим такой элемент R_g, что $a - a_g \in \bigoplus_{h \in G \setminus \{g\}} R_h$. Тогда элементы p_g образуют k-базис kG^*, $\Delta(p_g) = \sum_{h \in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h$ и умножение на $R\#kG^*$

определяется формулой

$$(ap_g)(bp_h) = (ab_{gh^{-1}})p_h.$$

Через $\Lambda = R \otimes R^{\mathrm{op}}$ будем обозначать обёртывающую алгебру алгебры R. Бар-резольвента

$$\mathrm{Bar}_*(R) : (R \xleftarrow{\mu}) R^{\otimes 2} \xleftarrow{d_0} R^{\otimes 3} \leftarrow \cdots \leftarrow R^{\otimes(n+2)} \xleftarrow{d_n} R^{\otimes(n+3)} \leftarrow \cdots$$

алгебры R определяется следующим образом: $\mathrm{Bar}_n(R) = R^{\otimes(n+2)}$ ($n \geqslant 0$), $\mu : R \otimes R \to R$ – умножение алгебры R, а d_n ($n \geqslant 0$) определяется по формуле

$$d_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+2}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+2},$$

где $a_i \in R$ ($0 \leqslant i \leqslant n+2$). Тогда когомологии Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R-бимодуле M – это гомологии комплекса $C^*(R, M) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Bar}_*(R), M)$. Заметим, что $C^0(R, M) \simeq M$ и $C^n(R, M) = \mathrm{Hom}_\Lambda(R^{\otimes(n+2)}, M) \simeq \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n}, M)$. Для $f \in C^n(R, M)$ введём обозначение

$$\delta_n^i(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) := \begin{cases} a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}), & \text{если } i = 0, \\ (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}, & \text{если } i = n+1. \end{cases}$$

Тогда $C^*(R, M)$ имеет вид

$$M \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Hom}_k(R, M) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n}, M) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes(n+1)}, M) \to \cdots,$$

где $\delta_n = \sum\limits_{i=0}^{n+1} \delta_n^i$. Тогда $\mathrm{HH}^n(R, M) = \mathrm{Ker}\, \delta_n / \mathrm{Im}\, \delta_{n-1}$. Далее мы будем писать $C^n(R)$ и $\mathrm{HH}^n(R)$ вместо $C^n(R, R)$ и $\mathrm{HH}^n(R, R)$ соответственно.

Замечание 1. Ясно, что δ_n^i и δ_n зависят от R и M. Но, так как из контекста R и M всегда восстанавливаются однозначно, мы не будем отражать эту зависимость в обозначениях для дифференциалов.

Пусть $f \in C^n(R, M)$, $g \in C^m(R, M)$, M – R-бимодуль с умножением, делающим его k-алгеброй. Тогда произведение $f \smile g \in C^{n+m}(R, M) = \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes(n+m)}, M)$ определяется по формуле

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}).$$

Это произведение индуцирует умножение

$$\smile : \mathrm{HH}^n(R,M) \times \mathrm{HH}^m(R,M) \longrightarrow \mathrm{HH}^{n+m}(R,M),$$

которое превращает $\mathrm{HH}^*(R,M)$ в градуированную k-алгебру.

Для группы G, действующей на множестве X, введём обозначение $X^G = \{x \in X \mid {}^g x = x$ для любого $g \in G\}$. Пусть $G \leqslant \operatorname{Aut} R$ – конечная группа. Предположим дополнительно, что G действует на бимодуле M так, что выполняется равенство ${}^g(axb) = {}^g a {}^g x {}^g b$ для всех $g \in G$, $a, b \in R$, $x \in M$. В этом случае мы будем называть действие G на M согласованным. Например, в случае $M = R\#kG$ такое действие можно определить равенством ${}^g(ah) = {}^g a(ghg^{-1})$ для $a \in R$, $g, h \in G$ (по умолчанию мы считаем, что группа G действует на R-бимодуле $R\#kG$ только что указанным образом). Тогда мы можем определить действие группы G на $C^n(R,M)$ по правилу ${}^g f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = {}^g(f({}^{g^{-1}}a_1 \otimes \cdots \otimes {}^{g^{-1}}a_n))$ для $g \in G$, $f \in C^n(R,M)$, $a_i \in R$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Легко проверить, что это действие согласовано с дифференциалом δ_n, то есть только что определённое действие G на $C^n(R,M)$ индуцирует действие G на $\mathrm{HH}^n(R,M)$. Кроме того, можно определить новый комплекс $C^*(R,M)^G$, члены которого – линейные пространства $C^n(R,M)^G$, а дифференциалы δ_n^G индуцированы отображениями δ_n $(n \geqslant 0)$. Определим

$$\mathrm{HH}^n(R,M)^{G\uparrow} := \operatorname{Ker} \delta_n^G / \operatorname{Im} \delta_{n-1}^G.$$

Обозначим через $\Theta_{R,M}^G : \mathrm{HH}^*(R,M)^{G\uparrow} \to \mathrm{HH}^*(R,M)^G$ отображение, индуцированное вложением $C^*(R,M)^G \hookrightarrow C^*(R,M)$. Тогда верна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $G \leqslant \operatorname{Aut} R$ – конечная группа, M – R-бимодуль со структурой k-алгебры и согласованным действием группы G. Тогда определённое ранее произведение $\smile : C^n(R,M) \times C^m(R,M) \longrightarrow C^{n+m}(R,M)$ индуцирует структуру градуированной k-алгебры на множестве $\mathrm{HH}^*(R,M)^{G\uparrow}$. При этом отображение $\Theta_{R,M}^G$ является гомоморфизмом алгебр, который является изоморфизмом, если $\operatorname{char} k \nmid |G|$.*

Доказательство. То, что $\mathrm{HH}^*(R,M)^{G\uparrow}$ – градуированная k-алгебра, доказывается точно так же, как то, что $\mathrm{HH}^*(R,M)$ – градуированная k-алгебра (см. [7]). Ясно, что $\Theta_{R,M}^G$ – гомоморфизм градуированных k-алгебр. Предположим теперь, что $\operatorname{char} k \nmid |G|$. Пусть $f \in \mathrm{HH}^n(R,M)^G$ является классом элемента $f_0 \in C^n(R,M)$. Нам известно, что ${}^g f_0 = f_0$

в $\mathrm{HH}^n(R,M)$ для любого $g\in G$. Рассмотрим элемент

$$\widetilde{f}=\frac{\sum\limits_{g\in G}{}^{g}f_0}{|G|}\in C^n(R,M).$$

Тогда ясно, что класс $\widetilde{f}$ в $\mathrm{HH}^n(R,M)$ равен f и $\widetilde{f}\in C^n(R,M)^G$. Следовательно, $f\in\operatorname{Im}\Theta^G_{R,M}$. Таким образом, $\Theta^G_{R,M}$ – сюръекция. Аналогично доказывается инъективность этого отображения. $\square$

Далее покажем, как определённое выше действие $G\subset\operatorname{Aut}R$ на $\mathrm{HH}^n(R,M)$ можно описать с помощью произвольной резольвенты. Для гомоморфизма R-бимодулей $d:M\to N$ и $g_1,g_2\in\operatorname{Aut}R$ будем обозначать через $d_{(g_1,g_2)}:{}_{g_1}M_{g_2}\to{}_{g_1}N_{g_2}$ гомоморфизм R-бимодулей, заданный по формуле $d_{(g_1,g_2)}(x)=d(x)$ (через ${}_{g_1}M_{g_2}$ обозначаем R-бимодуль, совпадающий с M как линейное пространство, и с умножением $\cdot$ (на элементы R), определяемым формулой $a\cdot x\cdot b=g_1(a)xg_2(b)$ для $x\in M$, $a,b\in R$). Заметим, что, если (Q_n,d_n^Q) – проективная бимодульная резольвента R, $g\in\operatorname{Aut}R$, то $({}_g(Q_n)_g,(d_n^Q)_{(g,g)})$ – проективная бимодульная резольвента ${}_gR_g$. Пусть на R-бимодуле M задано согласованное действие группы G. Тогда для $g\in G$ отображение, переводящее $x\in M$ в ${}^gx$, задаёт элемент из $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,{}_gM_g)$. Мы будем обозначать этот элемент через g. Это не вызовет путаницы, так как в каждом конкретном случае ясно, какой бимодуль M имеется ввиду.

Лемма 2. *Пусть (Q_n,d_n^Q) – произвольная проективная бимодульная резольвента R, M – R-бимодуль с согласованным действием группы $G\leqslant\operatorname{Aut}R$, $g\in G$ и $\eta_n:Q_n\to{}_g(Q_n)_g$ – цепное отображение, поднимающее отображение $g:R\to{}_gR_g$.*

1) *Если $f\in\mathrm{HH}^n(R,M)$ является когомологическим классом гомоморфизма $\widetilde{f}\in\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n,M)$, то ${}^{g^{-1}}f$ является классом гомоморфизма $g^{-1}\widetilde{f}_{(g,g)}\eta_n$.*

2) *Пусть $(Q'_n,d_n^{Q'})$ – другая бимодульная резольвента R, $\eta'_n:Q'_n\to{}_g(Q'_n)_g$ – цепное отображение, поднимающее отображение $g:R\to{}_gR_g$. Пусть существует цепное отображение $\Phi_n:Q_n\to Q'_n$, поднимающее Id_R, такое, что $\eta'_n\Phi_n=(\Phi_n)_{(g,g)}\eta_n$. Тогда для любого элемента $f'\in\operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^{Q'},M))$ такого, что $f'=g^{-1}f'_{(g,g)}\eta'_n$, существует элемент $f\in\operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^{Q},M))$ такой, что $f=g^{-1}f_{(g,g)}\eta_n$ и когомологические классы f и f' равны.*

Доказательство. 1) Сначала докажем, что при фиксированных Q_* и η_* формула $\psi_{Q_*,\eta_*}(f) = g^{-1}f_{(g,g)}\eta_n$ задаёт отображение из $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, M)$ в себя, которое индуцирует отображение

$$\psi_{Q_*,\eta_*} : \mathrm{HH}^n(R, M) \to \mathrm{HH}^n(R, M). \tag{2.1}$$

Для этого достаточно заметить, что $\psi_{Q_*,\eta_*}(fd_n^Q) = \psi_{Q_*,\eta_*}(f)d_n^Q$ для $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, M)$. Далее докажем, что отображение (2.1) не зависит от η_*. Действительно, если η'_* – другое цепное отображение, поднимающее отображение $g : R \to {}_gR_g$, то оно гомотопно η_*, то есть существуют такие отображения $s_n : Q_n \to {}_g(Q_{n+1})_g$ $(n \geqslant 0)$, что $\eta_0 - \eta'_0 = (d_0^Q)_{(g,g)}s_0$ и $\eta_n - \eta'_n = s_{n-1}d_{n-1}^Q + (d_n^Q)_{(g,g)}s_n$ $(n \geqslant 1)$. Тогда

$$\begin{aligned}\psi_{Q_*,\eta_*}(f) - \psi_{Q_*,\eta'_*}(f) &= g^{-1}f_{(g,g)}(s_{n-1}d_{n-1}^Q + (d_n^Q)_{(g,g)}s_n)\\ &= g^{-1}f_{(g,g)}s_{n-1}d_{n-1}^Q = 0\end{aligned}$$

в $\mathrm{HH}^n(R, M)$. Теперь докажем, что (2.1) не зависит от Q_*. Пусть $(Q'_n, d_n^{Q'})$ – другая проективная бимодульная резольвента R. Тогда существуют цепные отображения $\Phi_n : Q_n \to Q'_n$ и $\Phi'_n : Q'_n \to Q_n$ $(n \geqslant 0)$, поднимающие отображение Id_R. Обозначим $\eta'_n = (\Phi_n)_{(g,g)}\eta_n\Phi'_n$, $\eta''_n = \eta_n\Phi'_n\Phi_n$. Пусть $f \in \mathrm{HH}^n(R)$ представляется отображением $f' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q'_n, M)$. Тогда

$$\begin{aligned}\psi_{Q_*,\eta_*}(f) = \psi_{Q_*,\eta''_*}(f) &= g^{-1}(f'\Phi_n)_{(g,g)}\eta_n\Phi'_n\Phi_n = g^{-1}(f')_{(g,g)}\eta'_n\Phi_n\\ &= \psi_{Q'_*,\eta'_*}(f).\end{aligned}$$

Таким образом, отображение (2.1) не зависит от выбора резольвенты и цепного отображения. Пусть $\eta_{g,n} : \mathrm{Bar}_n(R) \to \mathrm{Bar}_n(R)$ – цепное отображение, заданное формулой $\eta_{g,n}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) = {}^ga_0 \otimes \dots \otimes {}^ga_{n+1}$. Тогда несложно проверить, что $\psi_{\mathrm{Bar}_*,\eta_{g,*}}(f) = {}^{g^{-1}}f$. Из вышесказанного следует, что $\psi_{Q_*,\eta_*}(f) = {}^{g^{-1}}f$ для произвольных Q_* и η_*.

2) Следует из равенства $f'\Phi_n = g^{-1}f'_{(g,g)}\eta'_n\Phi_n = g^{-1}(f'\Phi_n)_{(g,g)}\eta_n$. □

Следствие 1. *Если $g \in \mathrm{Aut}\,R$ внутренний, то ${}^gf = f$ для любого $f \in \mathrm{HH}^n(R)$.*

Доказательство. Пусть g – внутренний автоморфизм, то есть существует $x \in R$ такое, что $g(a) = xax^{-1}$ для любого $a \in R$. Несложно проверить, что отображение $\eta'_{g,n} : P_n \to {}_g(P_n)_g$, определённое формулой $\eta'_{g,n}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) = xa_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_{n+1}x^{-1}$, задаёт цепное отображение из (Bar_n, d_n) в $({}_g(\mathrm{Bar}_n)_g, (d_n)_{(g,g)})$, поднимающее отображение $g : R \to {}_gR_g$. Тогда в обозначениях леммы 2 получаем, что ${}^{g^{-1}}f = \psi_{\mathrm{Bar}_*, \eta'_{g,*}}(f) = f$ для $f \in \mathrm{HH}^n(R)$. $\square$

Если R – G-градуированная алгебра, то группа G действует на алгебре $\widetilde{R} = R\#kG^*$ следующим образом: ${}^h(ap_g) = ap_{gh^{-1}}$ для $a \in R$, $g, h \in G$. Далее, введём обозначение $\widetilde{\Lambda} := \widetilde{R} \otimes \widetilde{R}^{\mathrm{op}}$. Если M – G-градуированный модуль и $x \in M$ – однородный элемент, то мы будем через ρ_x обозначать степень элемента x. Если M_1 и M_2 – G-градуированные Λ-модули, то мы будем считать, что на $M_1 \otimes M_2$ введена градуировка такая, что $\rho_{x_1 \otimes x_2} = \rho_{x_1}\rho_{x_2}$ для однородных элементов $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Кроме того, мы будем использовать обозначение $a_{i,j} := a_i \otimes \cdots \otimes a_j$. Пусть $f \in C^n(R) = \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n}, R)$. Определим отображение $\Upsilon_{R,G}(f) \in C^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG) = \mathrm{Hom}_k(\widetilde{R}^{\otimes n}, \widetilde{R}\#kG)$ формулой

$$\Upsilon_{R,G}(f)(a_1p_{g_1} \otimes \cdots \otimes a_np_{g_n}) \\ = \begin{cases} \sum\limits_{g \in G} f(a_{1,n})_g p_{g_n u(g)} u(g)^{-1}, & \text{если } g_i = \rho_{a_{i+1}} g_{i+1} \ (1 \leqslant i \leqslant n-1), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $a_i \in R$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ – однородные элементы, $g_i \in G$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $u(g) := g_n^{-1} g^{-1} \rho_{a_{1,n}} g_n$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R – G-градуированная алгебра, $\widetilde{R} = R\#kG^*$. Тогда отображение $\Upsilon_{R,G} : C^*(R) \to C^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)$ индуцирует изоморфизм градуированных k-алгебр*

$$\Upsilon_{R,G} : \mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^{G\uparrow}.$$

Доказательство. Заметим, что для $h \in G$, однородных $a_i \in R$ и $g_i \in G$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполнено

$$\begin{aligned} {}^h\big(\Upsilon_{R,G}(f)\big)(a_1p_{g_1} \otimes \cdots \otimes a_np_{g_n}) &= {}^h\big(\Upsilon_{R,G}(f)(a_1p_{g_1h} \otimes \cdots \otimes a_np_{g_nh})\big) \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{g \in G} f(a_{1,n})_g p_{g_nhu'(g)h^{-1}} hu'(g)^{-1}h^{-1}, & \text{если } g_ih = \rho_{a_{i+1}} g_{i+1}h \\ & \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ &= \Upsilon_{R,G}(f)(a_1p_{g_1} \otimes \cdots \otimes a_np_{g_n}). \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств $u'(g) := (g_n h)^{-1} g^{-1} \rho_{a_{1,n}} g_n h = h^{-1} u(g) h$. Следовательно, $\Upsilon_{R,G}(f) \in C^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^G$ для любого $f \in C^n(R)$. Несложно проверить, что $\delta_n^i(\Upsilon_{R,G}(f)) = \Upsilon_{R,G}(\delta_n^i(f))$ для $f \in C^n(R)$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$. Следовательно, $\Upsilon_{R,G}$ – цепное отображение и определено отображение $\Upsilon_{R,G} : \mathrm{HH}^*(R) \to \mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^{G\uparrow}$. Пусть $f_1 \in C^m(R)$, $f_2 \in C^{n-m}(R)$, $a_i \in R$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ – однородные и $g_i \in G$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Докажем, что

$$\Upsilon_{R,G}(f_1 \smile f_2)(A) = \big(\Upsilon_{R,G}(f_1) \smile \Upsilon_{R,G}(f_2)\big)(A), \tag{2.2}$$

где $A = a_1 p_{g_1} \otimes \cdots \otimes a_n p_{g_n}$. Введём обозначения

$$u_1(g) := g_m^{-1} g^{-1} \rho_{a_{1,m}} g_m, \ \ u_2(g) := g_n^{-1} g^{-1} \rho_{a_{m+1,n}} g_n,$$
$$u(g) := g_n^{-1} g^{-1} \rho_{a_{1,n}} g_n.$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $g_i \neq \rho_{a_{i+1}} g_{i+1}$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда левая часть равенства (2.2) равна 0 по определению $\Upsilon_{R,G}$. Если $1 \leqslant i \leqslant m-1$ или $m+1 \leqslant i \leqslant n-1$, то $\Upsilon_{R,G}(f_1)(a_1 p_{g_1} \otimes \cdots \otimes a_m p_{g_m}) = 0$ или $\Upsilon_{R,G}(f_2)(a_{m+1} p_{g_{m+1}} \otimes \cdots \otimes a_n p_{g_n}) = 0$ соответственно. Следовательно, осталось доказать, что правая часть равенства (2.2) равна 0, если $g_j = \rho_{a_{j+1}} g_{j+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1,\ j \neq m)$ и $g_m \neq \rho_{a_{m+1}} g_{m+1}$. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}&\big(\Upsilon_{R,G}(f_1) \smile \Upsilon_{R,G}(f_2)\big)(A)\\ =&\Big(\sum_{g \in G} f_1(a_{1,m})_g p_{g_m u_1(g)} u_1(g)^{-1}\Big)\Big(\sum_{g \in G} f_2(a_{m+1,n})_g p_{g_n u_2(g)} u_2(g)^{-1}\Big).\end{aligned}$$

Тогда требуемое равенство следует из того, что

$$\begin{aligned}&1 p_{g_m u_1(g)} u_1(g)^{-1} f_2(a_{m+1,n})_h p_{g_n u_2(h)}\\ =&\big(f_2(a_{m+1,n})_h\big)_{g_m u_1(g)(g_n u_2(h) u_1(g))^{-1}} p_{g_n u_2(h) u_1(g)} u_1(g)^{-1} = 0,\end{aligned}$$

так как $g_m u_1(g)(g_n u_2(h) u_1(g))^{-1} = g_m g_n^{-1} \rho_{a_{m+1,n}}^{-1} h \neq h$.

2) Для всех $1 \leqslant i \leqslant n-1$ выполнено равенство $g_i = \rho_{a_{i+1}} g_{i+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\Upsilon_{R,G}(f_1 \smile f_2)(A) &= \sum_{g \in G} (f_1 \smile f_2)(a_{1,n})_g p_{g_n u(g)} u(g)^{-1}\\ &= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} f_1(a_{1,m})_g f_2(a_{m+1,n})_h p_{g_n u(gh)} u(gh)^{-1}.\end{aligned}$$

Так как теперь

$$1p_{g_m u_1(g)}u_1(g)^{-1}f_2(a_{m+1,n})_h p_{g_n u_2(h)} = f_2(a_{m+1,n})_h p_{g_n u_2(h) u_1(g)} u_1(g)^{-1},$$

то

$$\begin{aligned}\big(\Upsilon_{R,G}(f_1) \smile \Upsilon_{R,G}(f_2)\big)(A)\\ = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} f_1(a_{1,m})_g f_2(a_{m+1,n})_h p_{g_n u_2(h)u_1(g)}\big(u_2(h)u_1(g)\big)^{-1}.\end{aligned}$$

Тогда равенство (2.2) следует из того, что

$$\begin{aligned}u_2(h)u_1(g) &= g_n^{-1}h^{-1}\rho_{a_{m+1,n}}g_n g_m^{-1}g^{-1}\rho_{a_{1,m}}g_m\\ &= g_n^{-1}(gh)^{-1}\rho_{a_{1,n}}g_n = u(gh).\end{aligned}$$

Следовательно, $\Upsilon_{R,G}$ действительно является гомоморфизмом градуированных k-алгебр. Осталось показать, что он биективен. Пусть $\chi_g : \widetilde{R}\#kG \to R$ $(g \in G)$ – k-линейное отображение, заданное для однородного $a \in R$ и $h_1, h_2 \in G$ формулой

$$\chi_g(ap_{h_1}h_2) = \begin{cases} a, & \text{если } h_1h_2 = 1,\ g = \rho_a h_1,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $f \in C^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)$. Определим отображение $\Xi_{R,G}(f) \in C^n(R)$ формулой

$$\Xi_{R,G}(f)(a_{1,n}) = \chi_{\rho_{a_{1,n}}}\big(f(a_1p_{\rho_{a_{2,n}}} \otimes \cdots \otimes a_ip_{\rho_{a_{i+1,n}}} \otimes \cdots \otimes a_np_{1_G})\big),$$

где $a_i \in R$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ – однородные элементы. Несложно проверить, что $\delta_n^i(\Xi_{R,G}(f)) = \Xi_{R,G}(\delta_n^i(f))$ для $f \in C^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^G$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$. Следовательно, $\Xi_{R,G}|_{C^*(\widetilde{R},\widetilde{R}\#kG)^G}$ – цепное отображение и определено отображение $\Xi_{R,G} : \mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^{G\uparrow} \to \mathrm{HH}^*(R)$. Легко видеть, что $\Xi_{R,G}\Upsilon_{R,G} = \mathrm{Id}_{C^*(R)}$. Осталось показать, что $F(f) = \Upsilon_{R,G}\Xi_{R,G}(f) - f = 0$ в $\mathrm{HH}^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^{G\uparrow}$ для любого $f \in \mathrm{Ker}(\delta_n^G)$. Пусть

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Bar}}_n(\widetilde{R}) = {}_k\langle a_0p_{g_0} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}p_{g_{n+1}} \mid a_i \in R \text{ – однородные},\\ g_i \in G \quad (0 \leqslant i \leqslant n+1), \quad g_i = \rho_{a_{i+1}}g_{i+1}(0 \leqslant i \leqslant n)\rangle.\end{aligned}$$

Определим $s_n : C^{n+1}(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG) \to C^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)$ формулой

$$s_n(z)(a_0p_{g_0} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}p_{g_{n+1}})$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } g_i = \rho_{a_{i+1}}g_{i+1} (0 \leqslant i \leqslant n), \\ (-1)^l z(a_0p_{g_0} \otimes \cdots \otimes a_lp_{g_l} \otimes p_{g_l} & \\ \otimes a_{l+1}p_{g_{l+1}} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}p_{g_{n+1}}), & \text{если } g_i = \rho_{a_{i+1}}g_{i+1} (0 \leqslant i \leqslant l-1) \\ & \text{и } \ g_l \neq \rho_{a_{l+1}}g_{l+1} \end{cases}$$

для $z \in C^{n+1}(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)$, однородных $a_i \in R$ и $g_i \in G$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$. Ясно, что s_n коммутирует с действием группы G, то есть индуцирует отображение $s_n^G : C^{n+1}(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^G \to C^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^G$. Несложно проверить, что для $z \in C^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^G$, однородных $a_i \in R$ и $g_i \in G$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ выполнено равенство

$$(s_n^G\delta_n^G + \delta_{n-1}^G s_{n-1}^G)(z)(a_0p_{g_0} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}p_{g_{n+1}})$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } a_0p_{g_0} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}p_{g_{n+1}} \in \overline{\mathrm{Bar}}_n(\widetilde{R}), \\ z(a_0p_{g_0} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}p_{g_{n+1}}), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, если $z \in \mathrm{Ker}(\delta_n^G)$ и $z|_{\overline{\mathrm{Bar}}_n(\widetilde{R})} = 0$, то $z = 0$ в $\mathrm{HH}^n(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^{G\uparrow}$. Прямые вычисления показывают, что $F(f)|_{\overline{\mathrm{Bar}}_n(\widetilde{R})} = 0$ для любого $f \in \mathrm{Ker}(\delta_n^G)$. □

Если G – абелева группа, то на множестве $C^n(R)$ можно ввести G-градуировку следующим образом: $\deg f = g$ равносильно тому, что $\rho_{f(a)} = g\rho_a$ для всех $a \in R^{\otimes n}$. Эта градуировка индуцирует градуировку на $\mathrm{HH}^*(R)$.

Следствие 2. *Пусть G – абелева группа. Тогда $\Upsilon_{R,G}$ индуцирует биекцию между* $\mathrm{HH}^*(R)_g$ *и* $\mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, {}_{\mathrm{Id}_R}\widetilde{R}_g)^{G\uparrow}$.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 утверждение следует из того, что $\Upsilon_{R,G}(\mathrm{HH}^*(R)_g) \subset \mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}g)^{G\uparrow}$, и того, что $\widetilde{R}g \simeq {}_{\mathrm{Id}_R}\widetilde{R}_g$. □

Под категорией G-градуированных R-бимодулей мы будем понимать категорию, объектами которой являются G-градуированные R-бимодули, а морфизмами – гомоморфизмы R-бимодулей, которые переводят однородные элементы степени g в однородные элементы степени g для любого $g \in G$. Если M – G-градуированный бимодуль, то мы можем определить $\widetilde{R}$-бимодуль $F(M)$ следующим образом. Как правый $\widetilde{R}$-модуль $F(M)$ изоморфен $M\otimes_R\widetilde{R}=\bigoplus_{g\in G}Mp_g$, а умножение слева на элементы $\widetilde{R}$ задано формулой $ap_gxp_h=ax_{gh^{-1}}p_h$. В работе [8] показано, что $F(M)$ действительно бимодуль. Кроме того, если мы определим $F(\varphi)=\varphi\otimes\mathrm{Id}_{\widetilde{R}}$ для $\varphi:M\to N$, то F станет точным функтором из категории G-градуированных R-бимодулей в категорию $\widetilde{R}$-бимодулей, который переводит проективные бимодули в проективные. В частности, если (P_n,d_n) – G-градуированная проективная бимодульная резольвента R (то есть проективная бимодульная резольвента, дифференциалы которой являются морфизмами G-градуированных бимодулей), то $(F(P_n),F(d_n))$ – проективная бимодульная резольвента $\widetilde{R}$. Определим для G-градуированного бимодуля M и $g\in G$ отображение $\eta_{g,M}:F(M)\to F(M)$ формулой $\eta_{g,M}(xp_h)=xp_{hg^{-1}}$.

Лемма 3. *Пусть (P_n,d_n) – G-градуированная проективная бимодульная резольвента R.*

1) *Пусть $f\in\mathrm{HH}^m(\widetilde{R},\widetilde{R}\#kG)$ является когомологическим классом коцикла $\widetilde{f}:F(P_m)\to\widetilde{R}\#kG$. Тогда для $g\in G$ элемент ${}^{g^{-1}}\!f$ является когомологическим классом коцикла $g^{-1}\widetilde{f}\eta_{g,P_m}$.*

2) *Коцикл f лежит в образе $\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}\#kG}$ тогда и только тогда, когда существует $\widetilde{f}:F(P_m)\to\widetilde{R}\#kG$, когомологический класс которого равен f, такое, что $g^{-1}\widetilde{f}\eta_{g,P_m}=\widetilde{f}$ для любого $g\in G$.*

Доказательство. 1) Заметим, что отображения η_{g,P_n} $(n\geqslant 0)$ образуют цепное отображение из резольвенты $(F(P_n),F(d_n))$ бимодуля $\widetilde{R}$ в резольвенту $({}_gF(P_n)_g,F(d_n)_{(g,g)})$ бимодуля ${}_g\widetilde{R}_g$, поднимающее изоморфизм $g:\widetilde{R}\to{}_g\widetilde{R}_g$. Далее требуемое утверждение следует из первого пункта леммы 2.

2) Пусть $\eta_{g,n}:\mathrm{Bar}_n(\widetilde{R})\to{}_g(\mathrm{Bar}_n(\widetilde{R}))_g$ задано равенством $\eta_{g,n}(a_0\otimes\cdots\otimes a_{n+1})={}^ga_0\otimes\cdots\otimes{}^ga_{n+1}$ для $a_i\in\widetilde{R}$ $(0\leqslant i\leqslant n+1)$. Тогда из пункта 2) леммы 2 следует, что нам достаточно построить такие цепные отображения $\widetilde{\Phi}_n:F(P_n)\to\mathrm{Bar}_n(\widetilde{R})$ и $\widetilde{\Psi}_n:\mathrm{Bar}_n(\widetilde{R})\to F(P_n)$, поднимающие $\mathrm{Id}_{\widetilde{R}}$, что

$$\eta_{g,n}\widetilde{\Phi}_n=(\widetilde{\Phi}_n)_{(g,g)}\eta_{g,P_n}\text{ и }\eta_{g,P_n}\widetilde{\Psi}_n=(\widetilde{\Psi}_n)_{(g,g)}\eta_{g,n}.\tag{2.3}$$

Несложно показать, что существуют цепные отображения $\Phi_n:P_n\to\mathrm{Bar}_n(R)$ и $\Psi_n:\mathrm{Bar}_n(R)\to P_n$, которые поднимают отображение Id_R и являются морфизмами G-градуированных R-бимодулей. Пусть

$\iota_n : F(\mathrm{Bar}_n(R)) \to \mathrm{Bar}_n(\widetilde{R})$ и $\pi_n : \mathrm{Bar}_n(\widetilde{R}) \to F(\mathrm{Bar}_n(R))$ заданы равенствами

$$\iota_n(a_{0,n+1}p_g) = a_0 p_{\rho_{a_{1,n+1}}g} \otimes \dots \otimes a_i p_{\rho_{a_{i+1,n+1}}g} \otimes \dots \otimes a_{n+1}p_g$$

и

$$\pi_n(a_0p_{g_0} \otimes \dots \otimes a_{n+1}p_{g_{n+1}})$$

$$= \begin{cases} a_{0,n+1}p_{g_{n+1}}, & \text{если } g_i = \rho_{a_{i+1}}g_{i+1} \ (0 \leqslant i \leqslant n), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где a_i $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ – однородные элементы алгебры R, $g, g_i \in G$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$. Тогда несложно проверить, что $\widetilde{\Phi}_n = \iota_n F(\Phi_n)$ и $\widetilde{\Psi}_n = F(\Psi_n)\pi_n$ удовлетворяют условию (2.3). $\square$

Пусть (P_n, d_n) – G-градуированная проективная бимодульная резольвента R. Введём обозначение $\delta_n^P = \mathrm{Hom}_\Lambda(F(d_n), \widetilde{R})$. Кроме уже доказанных фактов, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть (P_n, d_n) – G-градуированная проективная бимодульная резольвента R. Пусть m таково, что для любого $f \in \mathrm{Ker}(\delta_m^P)^G$, существует $\bar{f} \in \mathrm{Ker}(\delta_m^P)$ такое, что $f = \sum\limits_{g\in G} g\bar{f}\eta_{g^{-1},P_m}$. Тогда, если когомологические классы элементов $x_u \in C^m(\widetilde{R})$ $(u \in U)$ порождают $\mathrm{HH}^m(\widetilde{R})$ как линейное пространство, то классы элементов $\sum\limits_{g\in G} {}^g x_u$ $(u \in U)$ порождают $\mathrm{HH}^m(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ как линейное пространство. В частности, $\dim_k \mathrm{HH}^m(\widetilde{R})^{G\uparrow} \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^m(\widetilde{R})$.*

Доказательство. Обозначим $y_u = \sum\limits_{g\in G} {}^g x_u$. Рассмотрим произвольный $f \in \mathrm{Ker}(\delta_m)^G$. Нам надо показать, что $f = \sum\limits_{u\in U} \kappa_u y_u$ в $\mathrm{HH}^m(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ для некоторых $\kappa_u \in k$ $(u \in U)$. Построим $\widetilde{\Phi}_n : F(P_n) \to \mathrm{Bar}_n(\widetilde{R})$ и $\widetilde{\Psi}_n : \mathrm{Bar}_n(\widetilde{R}) \to F(P_n)$ как в доказательстве пункта 2) леммы 3. Докажем, что $f\widetilde{\Phi}_m\widetilde{\Psi}_m = f$ в $\mathrm{HH}^m(\widetilde{R})^{G\uparrow}$. Действительно, $\Phi_n\Psi_n$ гомотопно $\mathrm{Id}_{\mathrm{Bar}_*(R)}$. Пусть $s_n : \mathrm{Bar}_n(R) \to \mathrm{Bar}_{n+1}(R)$ – соответствующая гомотопия, то есть, в частности, $\Phi_m\Psi_m = \mathrm{Id}_{\mathrm{Bar}_m(R)} + d_m s_m + s_{m-1}d_{m-1}$. Несложно показать, что мы можем считать, что s_n – морфизмы G-градуированных модулей. Так как $(f - f\iota_m\pi_m)|_{\overline{\mathrm{Bar}_m(\widetilde{R})}} = 0$, то $f =$

$f\iota_m\pi_m$ в $\mathrm{HH}^m(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ (см. доказательство теоремы 1). Тогда

$$f\widetilde{\Phi}_m\widetilde{\Psi}_m - f = f\iota_m F(s_{m-1})\pi_{m-1}F(d_{m-1}) = \delta_{m-1}(f\iota_m F(s_{m-1})\pi_{m-1})$$

в $\mathrm{HH}^m(\widetilde{R})^{G\uparrow}$. Несложно показать, что, если $f \in \mathrm{Ker}(\delta_m)^G$, то $f\iota_m F(s_{m-1})\pi_{m-1} \in C^m(\widetilde{R})^G$

По условию существует $\bar{f}\in\mathrm{Ker}(\delta_m^P)$ такое, что

$$f\widetilde{\Phi}_m = \sum_{g\in G} g\bar{f}\eta_{g^{-1},P_m}.$$

Тогда для некоторых $\kappa_u \in k$ $(u \in U)$, $f' \in C^{m-1}(\widetilde{R})$ имеем $\bar{f}\widetilde{\Psi}_m = \sum\limits_{u\in U} \kappa_u x_u + \delta_{m-1}(f')$. А тогда

$$f\widetilde{\Phi}_m\widetilde{\Psi}_m = \sum_{g\in G} {}^g(\bar{f}\widetilde{\Psi}_m) = \sum_{u\in U} \kappa_u y_u + \delta_{m-1}\left(\sum_{g\in G} {}^g f'\right),$$

то есть $f = \sum_{u\in U} \kappa_u y_u$ в $\mathrm{HH}^m(\widetilde{R})^{G\uparrow}$. □

§3. Кольцо когомологий Хохшильда одного семейства самоинъективных алгебр древесного типа D_n

В этом параграфе мы применим результаты предыдущего параграфа, чтобы описать кольцо когомологий Хохшильда одной серии алгебр. Эти алгебры задаются колчанами с соотношениями $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$, которые описываются следующим образом. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $r \geqslant 1$. Множество вершин $\mathcal{Q}_0 = \mathbb{Z}_r \times \{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Множество стрелок $\mathcal{Q}_1$ колчана $\mathcal{Q}$ состоит из следующих элементов:

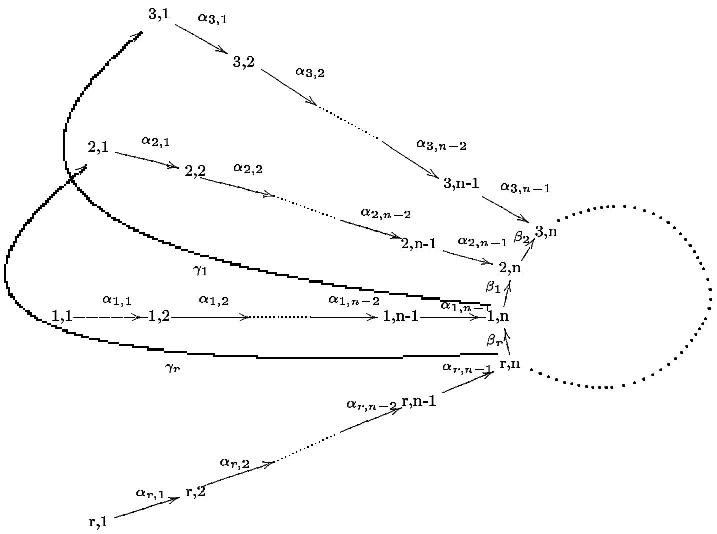
$$\alpha_{i,j} : (i,j) \to (i,j+1), \quad \gamma_i : (i,n) \to (i+2,1), \quad \beta_i : (i,n) \to (i+1,n)$$
$$(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Мы будем использовать следующие вспомогательные обозначения:

$$\tau_i = \gamma_{i+1}\beta_i, \quad \omega_{i,j_2,j_1} = \alpha_{i,j_2}\ldots\alpha_{i,j_1}, \quad \mu_{i,j} = \omega_{i,j,1}, \quad \nu_{i,j} = \omega_{i,n-1,j}.$$

Идеал $\mathcal{I}$ порождён элементами

$$\gamma_i\alpha_{i,n-1}, \quad \beta_{i+1}\beta_i - \nu_{i+2,1}\gamma_i, \quad \mu_{i+3,j}\tau_i\nu_{i,j} \quad (1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-1).$$



Алгебру, которая описывается только что определённым колчаном с соотношениями, мы будем обозначать через $R(n,r)$. Из результатов работы [9] следует, что эта алгебра является алгеброй типа D_{3n}. Кроме того, алгебра $R(n,3r)$ стабильно (а тогда и производно) эквивалентна алгебре, для которой кольцо когомологий Хохшильда, описано в работе [6] (при этом в указанной работе надо взять в качестве параметров $3n$ и r для получения соответствующей алгебры). Целью данного параграфа является описание алгебры когомологий Хохшильда алгебры $R(n,r)$ в случае $r\not\,\vdots\, 3$. Зафиксируем $n,r\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $r\not\,\vdots\, 3$. Обозначим $R:=R(n,r)$, $\widetilde{R}:=R(n,3r)$. Пусть $G=\langle q\mid q^3=1\rangle$. Мы можем ввести на R G-градуировку такую, что

$$\rho_{e_{i,j}}=\rho_{\alpha_{i,t}}=1,\ \ \rho_{\gamma_i}=q^2,\ \ \rho_{\beta_i}=q\ \ (1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant t\leqslant n-1).$$

Тогда несложно проверить, что $R\#kG^*\simeq\widetilde{R}$. Пусть

$$\widetilde{\lambda}=\begin{cases}\frac{r(6n-3)}{\text{НОД}(r,3n-1)}, & \text{если } \frac{r}{\text{НОД}(r,3n-1)}\,\vdots\, 2 \text{ или } n\,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char}k=2,\\ \frac{2r(6n-3)}{\text{НОД}(r,3n-1)} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Для $s\in\mathbb{N}$ обозначим через $\phi(s)$ и $\psi(s)$ такие целые числа, что $s=\phi(s)\widetilde{\lambda}+\psi(s)$ и $0\leqslant\psi(s)\leqslant\widetilde{\lambda}-1$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{X}}$ – множество, состоящее из следующих элементов:
f_t степени $0 < t \leqslant \widetilde{\lambda}$ для $t = 2m + l(6n-3)$, где $0 \leqslant m \leqslant 3n-2$, $m + l(3n-1)\,\vdots\, r$, $m + ln\,\vdots\, 2$ и выполнено одно из условий: $\operatorname{char} k = 2$ или $l\,\vdots\, 2$;
g_t степени $0 < t < \widetilde{\lambda}$ для $t = 2m + 1 + l(6n-3)$, где $0 \leqslant m \leqslant 3n-3$, $m + l(3n-1)\,\vdots\, r$, $m + ln\,\not\vdots\, 2$ и выполнено одно из условий: $\operatorname{char} k = 2$ или $l\,\not\vdots\, 2$;
h_t степени $0 < t < \widetilde{\lambda}$ для $t = 6n - 4 + l(6n-3)$, где $3n - 2 + l(3n-1)\,\vdots\, r$ и $(l+1)n\,\not\vdots\, 2$;
p_t степени $0 < t < \widetilde{\lambda}$ для $t = 6n - 4 + l(6n-3)$, где $3n - 2 + l(3n-1)\,\vdots\, r$, $n\,\vdots\, 2$ и выполнено одно из условий: $\operatorname{char} k = 2$ или $l\,\vdots\, 2$;
χ_t степени $0 < t \leqslant \widetilde{\lambda}$ для $t = (l+1)(6n-3)$, где $3n - 2 + l(3n-1)\,\vdots\, r$, $(l+1)n\,\vdots\, 2$ и выполнено одно из условий: $\operatorname{char} k = 2$ или $l\,\vdots\, 2$;
ξ_t степени $0 < t < \widetilde{\lambda}$ для $t = (l+1)(6n-3)$, где $3n - 2 + l(3n-1)\,\vdots\, r$ и $(l+1)n\,\not\vdots\, 2$;
ε_1 степени 1;
$\varepsilon_{j,0}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3n)$ степени 0, если $r = 1$.

Положим дополнительно $f_0 = 1$. Рассмотрим кольцо многочленов $k[\widetilde{\mathcal{X}}]$ как градуированное кольцо с градуировкой, продолжающей описанную выше градуировку множества $\widetilde{\mathcal{X}}$. Пусть $\widetilde{I}$ – идеал $k[\widetilde{\mathcal{X}}]$, порождённый следующими элементами (во всех формулах мы полагаем, что $t_i = 2m_i + l_i(6n-3)$ или $t_i = 2m_i + 1 + l_i(6n-3)$, где $0 \leqslant t_i - l_i(6n-3) \leqslant 6n-4$):

$$f_{t_1}f_{t_2} - f_{\psi(t_1+t_2)}f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)} \text{ для } m_1 + m_2 \leqslant 3n-2;$$
$$f_{t_1}f_{t_2} + 2(-1)^n g_{\psi(t_1+t_2)}f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)} \text{ для } m_1 + m_2 \geqslant 3n-1;$$
$$f_{t_1}g_{t_2} - g_{\psi(t_1+t_2)}f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)} \text{ для } m_1 + m_2 \leqslant 3n-3;$$
$$f_{t_1}g_{t_2} - \xi_{\psi(t_1+t_2)}f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)} \text{ для } m_1 + m_2 = 3n-2;$$

$$f_{t_1}g_{t_2} \text{ для } m_1 + m_2 \geqslant 3n-1;\ g_{t_1}g_{t_2};\quad \varepsilon_1 f_{t_1} \text{ для } m_1 = 3n-2,\ n\,\not\vdots\, 2;$$

$f_{t_1}h_{t_2} - \varepsilon_1 f_{\psi(t_1+t_2-1)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2-1)}$ для $m_1 \geqslant 1, \operatorname{char} k = 2$;
$f_{t_1}h_{t_2}$ для $m_1 \geqslant 1, \operatorname{char} k \neq 2$;
$g_{t_1}h_{t_2} - \varepsilon_1 g_{\psi(t_1+t_2-1)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2-1)}$ для $m_1 \geqslant 1, \operatorname{char} k = 2$;
$g_{t_1}h_{t_2} - \chi_{\psi(t_1+t_2)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)}$ для $m_1 = 0, \operatorname{char} k = 2; g_{t_1}h_{t_2}$ для $\operatorname{char} k \neq 2$;
$h_{t_1}h_{t_2} + \left(\dfrac{3n-1}{2}\right) g_{\psi(t_1+t_2)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)} \varepsilon_1 h_{t_1} - \left(\dfrac{3n-1}{2}\right) \xi_{t_1+1}$;
$f_{t_1}p_{t_2} + g_{\psi(t_1+t_2)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)}$ для $m_1 \geqslant 1$; $g_{t_1}p_{t_2}$;
$p_{t_1}p_{t_2} + \left(\dfrac{3n}{2}\right) g_{\psi(t_1+t_2)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2)}$;
$\varepsilon_1 p_{t_1} - \left(\dfrac{3n}{2}\right) \varepsilon_1 f_{t_1} + (3n-1)\chi_{t_1+1}$;
$f_{t_1}\chi_{t_2} + \varepsilon_1 g_{\psi(t_1+t_2-1)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2-1)}$ для $m_1 \geqslant 1$;
$g_{t_1}\chi_{t_2}$; $p_{t_1}\chi_{t_2}$; $h_{t_1}\chi_{t_2}$; $\chi_{t_1}\chi_{t_2}; \varepsilon_1\chi_{t_1}$;
$f_{t_1}\xi_{t_2}$ для $m_1 \geqslant 1$; $g_{t_1}\xi_{t_2}$;
$h_{t_1}\xi_{t_2} + \varepsilon_1 g_{\psi(t_1+t_2-1)} f_{\widetilde{\lambda}}^{\phi(t_1+t_2-1)}$; $\chi_{t_1}\xi_{t_2}$; $\xi_{t_1}\xi_{t_2}$; $\varepsilon_1\xi_{t_1}; \varepsilon_1^2$;
$\varepsilon_{i,0}\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant i, j \leqslant 3n)$; $g_{t_1}\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant 3n)$; $h_{t_1}\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant 3n)$;
$\chi_{t_1}\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant 3n)$; $\xi_{t_1}\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant 3n)$; $\varepsilon_1\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant 3n)$;
$f_{t_1}\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant 3n)$ для $t_1 > 0, \operatorname{char} k \neq 2$;
$f_{\widetilde{\lambda}}\varepsilon_{j,0} - \chi_{\widetilde{\lambda}}(1 \leqslant j \leqslant 3n-1)$ для $\operatorname{char} k = 2$;
$f_{\widetilde{\lambda}}\varepsilon_{3n,0} - \chi_{\widetilde{\lambda}}$ для $\operatorname{char} k = 2, n \not\,\vdots\, 2$;
$f_{\widetilde{\lambda}}\varepsilon_{3n,0} - \varepsilon_1 f_{\widetilde{\lambda}-1} - \chi_{\widetilde{\lambda}}$ для $\operatorname{char} k = 2, n \,\vdots\, 2$;
$f_{t_1}\varepsilon_{j,0} - \varepsilon_1 g_{t_1-1}(1 \leqslant j \leqslant 3n)$ для $m_1 \geqslant 1, \operatorname{char} k = 2$;
$p_{t_1}\varepsilon_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant 3n-1); p_{t_1}\varepsilon_{3n,0}$ для $\operatorname{char} k \neq 2$;
$p_{t_1}\varepsilon_{3n,0} - \varepsilon_1 g_{t_1-1}$ для $\operatorname{char} k = 2$.

Тогда, применив результаты работы [6] к алгебре $\widetilde{R}$, получим следующее утверждение.

Предложение 1. *Имеет место изоморфизм градуированных k-алгебр* $\mathrm{HH}^*(\widetilde{R}) \simeq k[\widetilde{\mathcal{X}}]/\widetilde{I}$.

Обозначим $\lambda = \frac{\widetilde{\lambda}}{3}$. Ясно, что λ – целое число. Для $t \geqslant 1$ через $\bar{t}$ обозначим число, удовлетворяющее условиям $t - \bar{t} \,\vdots\, \lambda$, $0 \leqslant \bar{t} < \lambda$. Пусть $\overline{\mathcal{X}}$ – множество, состоящее из элементов $\bar{x}$ степени $\bar{t}$ для каждого $x \in \widetilde{\mathcal{X}} \setminus \{f_{\widetilde{\lambda}}\}$ степени $t > 0$ и элемента $f_\lambda = \overline{f_{\widetilde{\lambda}}}$ степени λ. Введём обозначения $\mathcal{Y} := \{\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}} | \deg \bar{x} = 0\}$, $N := n + 1 - |\mathcal{Y}|$. Множество $\mathcal{X}$ определим следующим образом:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} \overline{\mathcal{X}}, & \text{если } r > 1, \\ \overline{\mathcal{X}} \cup \{\varepsilon_{j,0}\}_{1 \leqslant j \leqslant N}, & \text{если } r = 1, \end{cases}$$

где степени элементов $\varepsilon_{j,0}$ равны 0. Определим теперь идеал I алгебры $k[\mathcal{X}]$. Рассмотрим образующие идеала $\widetilde{I}$, указанные ранее, в записи которых не участвуют элементы вида $\varepsilon_{j,0}$. В каждой такой образующей W заменим каждый элемент $x \in \widetilde{\mathcal{X}}$ на $\bar{x} f_\lambda^{(\deg x - \deg \bar{x})/\lambda}$ и получим элемент $W' \in k[\mathcal{X}]$. Представим W' в виде $W' = \overline{W} f_\lambda^p$, где $\overline{W} \in k[\mathcal{X}]$ не делится на f_λ. Пусть $I = \bar{I} + I_0$, где $\bar{I}$ – идеал, порождённый всеми полученными таким образом элементами $\overline{W}$, $I_0 = 0$, если $r > 1$, и I_0 – идеал, порождённый элементами $\varepsilon_{i,0}\varepsilon_{j,0}$ и $\varepsilon_{j,0}x$ $(1 \leqslant i, j \leqslant N,\ x \in \overline{\mathcal{X}})$, если $r = 1$. В данной работе мы выведем из предложения 1 следующую теорему, которая описывает кольцо когомологий Хохшильда алгебры $R = R(n, r)$.

Теорема 2. *Имеет место изоморфизм градуированных k-алгебр* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}]/I$.

Доказательство. В работе [5] дано описание минимальной проективной бимодульной резольвенты (Q_s, d_s) алгебры R. Используя это описание, несложно показать, что G-градуированная минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры R описывается следующим образом. Пусть $\sigma \in \operatorname{Aut} R$ задан на идемпотентах и стрелках равенствами

$$\begin{aligned} \sigma(e_{i,j}) &= e_{i+3n-1,j}, \quad \sigma(\alpha_{i,j}) = \alpha_{i+3n-1,j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n-2), \\ \sigma(\alpha_{i,n-1}) &= -\alpha_{i+3n-1,n-1}, \\ \sigma(\gamma_i) &= -\gamma_{i+3n-1}, \quad \sigma(\beta_i) = -\beta_{i+3n-1}. \end{aligned}$$

Если M – G-градуированный Λ-модуль, то через $\sigma^l(M)$ мы обозначаем Λ-модуль ${}_{\sigma^l}M_{\mathrm{Id}_R}$ с такой градуировкой, что степень элемента x в

$\sigma^l(M)$ равна его степени в M, умноженной на q^{2l}. Положим

$$T_{2m} = \bigoplus_{i=1}^{r}\Big(P_{[i+3m,n][i,n]}[1] \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-m} P_{[i+3m,j+m][i,j]}[1]\Big)$$
$$\oplus \Big(\bigoplus_{j=n-m}^{n-1} P_{[i+3m-1,j+m-(n-1)][i,j]}[q^2]\Big)\Big) \quad (0 \leqslant m \leqslant n-1),$$
$$T_{2m+1} = \bigoplus_{i=1}^{r}\Big(P_{[i+3m+1,n][i,n]}[q] \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-m} P_{[i+3m,j+m+1][i,j]}[1]\Big)$$
$$\oplus \Big(\bigoplus_{j=n-m}^{n} P_{[i+3m+2,j+m-(n-1)][i,j]}[q^2]\Big)\Big) \quad (0 \leqslant m \leqslant n-1),$$
$$T'_{2m} = \bigoplus_{i=1}^{r}\Big(P_{[i+3m-1,n][i,n]}[q^2] \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-m} P_{[i+3m,j+m][i,j]}[1]\Big)$$
$$\oplus \Big(\bigoplus_{j=n-m}^{n-1} P_{[i+3m-1,j+m-(n-1)][i,j]}[q^2]\Big)\Big) \quad (0 \leqslant m \leqslant n-1),$$
$$T'_{2m+1} = \bigoplus_{i=1}^{r}\Big(\Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-m} P_{[i+3m,j+m+1][i,j]}[1]\Big)$$
$$\oplus \Big(\bigoplus_{j=n-m}^{n} P_{[i+3m+2,j+m-(n-1)][i,j]}[q^2]\Big)\Big)$$
$$(0 \leqslant m \leqslant n-1),$$

где через $P_{[x][y]}[g]$ $(x, y \in \mathcal{Q}_0,\ g \in G)$ обозначен Λ-модуль $P_{[x][y]}$ с такой G-градуировкой, что $\rho_{e_x\otimes e_y} = g$. Тогда члены Q_t $(t \geqslant 0)$ G-градуированной минимальной проективной бимодульной резольвенты R описываются следующим образом.

1. Для чётного n положим

$$Q_{4m} = T_{4m}, \quad Q_{4m+1} = T_{4m+1}, \quad Q_{4m+2} = T'_{4m+2}, \quad Q_{4m+3} = T'_{4m+3}$$

для $0 \leqslant m \leqslant \frac{n-2}{2}$. При этом члены с номерами, большими чем $2n-2$, получаются следующим образом: $Q_{l(2n-1)+t} = \sigma^l(Q_t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 2n-2$.

2. Для нечётного n положим

$$Q_{4m} = T_{4m}, \quad Q_{4m+1} = T_{4m+1}, \quad Q_{4m+2} = T'_{4m+2}, \quad Q_{4m+3} = T'_{4m+3}$$

для $0 \leqslant m \leqslant \frac{n-1}{2}$ в первой формуле и $0 \leqslant m \leqslant \frac{n-3}{2}$ в остальных трёх,

$$Q_{2n-1+4m} = \sigma(T'_{4m}), \quad Q_{2n-1+4m+1} = \sigma(T'_{4m+1}),$$
$$Q_{2n-1+4m+2} = \sigma(T_{4m+2}), \quad Q_{2n-1+4m+3} = \sigma(T_{4m+3})$$

для $0 \leqslant m \leqslant \frac{n-1}{2}$ в первых двух формулах и $0 \leqslant m \leqslant \frac{n-3}{2}$ в двух оставшихся. При этом члены с номерами, большими чем $4n-3$, получаются следующим образом: $Q_{l(4n-2)+t} = \sigma^{2l}(Q_t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 4n-3$. В работе [5] показано, что резольвента Q_* (рассматриваемая без учёта градуировки) периодична с периодом λ и отображение $\mu : Q_\lambda \to R$, заданное равенством $\mu(a \otimes b) = ab$ $(a, b \in R)$, является коциклом. Обозначим этот коцикл через $\bar{T}$.

Из периодичности Q_* следует, что умножение на $\bar{T}$ задаёт изоморфизм $\mathrm{HH}^t(R) \simeq \mathrm{HH}^{t+\lambda}(R)$ для $t \geqslant 1$ и сюръективное отображение $\mathrm{HH}^0(R) \to \mathrm{HH}^\lambda(R)$. Несложно проверить, что $\frac{\lambda}{2n-1} \not\vdots 3$, то есть градуировка на Q_λ задана так, что $\rho_{e_x \otimes e_x} = q'^{-1}$, где $q' \neq 1_G$. Тогда $\bar{T} \in \mathrm{HH}^\lambda(R)_{q'}$. Пусть $\theta : k[\widetilde{\mathcal{X}}]/\widetilde{I} \to \mathrm{HH}^*(\widetilde{R})$ – изоморфизм из предложения 1. Так как умножения на $\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}(\bar{T}^3)$ и $\theta(f_{\widetilde{\lambda}})$ индуцируют сюръективные отображение из $\mathrm{HH}^0(\widetilde{R})$ в $\mathrm{HH}^{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{R})$, то существует обратимый элемент $c \in \mathrm{HH}^0(\widetilde{R})$ такой, что $\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}(\bar{T}^3) = c\theta(f_{\widetilde{\lambda}})$. Тогда из предложения 1 следует, что c представляется в виде $c = a + b$, где $a \in k$ обратим и $b^2 = 0$. Если характеристика поля не 3, то из алгебраической замкнутости поля следует, что существует кубический корень из c в $\mathrm{HH}^0(\widetilde{R})$. Если же характеристика поля равна 3, то $\dim_k \mathrm{HH}^{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{R}) = 1$ и мы можем считать, что $b = 0$. В любом случае существует $c_0 \in \mathrm{HH}^0(\widetilde{R})$ такой, что $c_0^3 = c$. Обозначим $T = \left(\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}\right)^{-1} (c_0)\bar{T}$. Тогда умножение на T задаёт изоморфизм $\mathrm{HH}^t(R) \simeq \mathrm{HH}^{t+\lambda}(R)$ для $t \geqslant 1$ и сюръективное отображение $\mathrm{HH}^0(R) \to \mathrm{HH}^\lambda(R)$, $T \in \mathrm{HH}^\lambda(R)_{q'}$ и $\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}(T^3) = \theta(f_{\widetilde{\lambda}})$.

По следствию из теоремы 1 $\Upsilon_{R,G}$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{HH}^*(R)_1 \simeq \mathrm{HH}^*(\widetilde{R})^{G\uparrow}$. Пусть $t > 0$. Тогда

$$\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = \dim_k \mathrm{HH}^{t+\lambda}(R) = \dim_k \mathrm{HH}^{t+2\lambda}(R),$$

причём умножение на T индуцирует изоморфизмы, из которых следуют равенства

$$\dim_k \mathrm{HH}^t(R)_{q'^a} = \dim_k \mathrm{HH}^{t+\lambda}(R)_{q'^{a+1}} = \dim_k \mathrm{HH}^{t+2\lambda}(R)_{q'^{a+2}}$$

для $0 \leqslant a \leqslant 2$. Так как $\mathrm{HH}^s(R) = \sum\limits_{a=0}^{2} \mathrm{HH}^s(R)_{q'^a}$ для любого s, то

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{2} \dim_k \mathrm{HH}^{t+a\lambda}(R) &= 3\sum_{a=0}^{2} \dim_k \mathrm{HH}^{t+a\lambda}(R)_1 \\ &= 3\sum_{a=0}^{2} \dim_k \mathrm{HH}^{t+a\lambda}(\widetilde{R})^{G\uparrow}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Из теорем, описывающих аддитивную структуру алгебр R и $\widetilde{R}$ (см. [5, теоремы 2, 3 и 4] и [6, теоремы 2 и 3]), следует, что

$$\sum_{a=0}^{2} \dim_k \mathrm{HH}^{t+a\lambda}(R) = 3\sum_{a=0}^{2} \dim_k \mathrm{HH}^{t+a\lambda}(\widetilde{R}). \tag{3.2}$$

Разберём случай $\operatorname{char} k \neq 3$. Тогда

$$\dim_k \mathrm{HH}^t(\widetilde{R})^{G\uparrow} = \dim_k \mathrm{HH}^t(\widetilde{R})^G \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^t(\widetilde{R})$$

и из равенств (3.1) и (3.2) следует, что $\mathrm{HH}^t(\widetilde{R})^G = \mathrm{HH}^t(\widetilde{R})$. Пусть $\varphi' : k[\overline{\mathcal{X}}] \to \mathrm{HH}^*(R)$ – гомоморфизм градуированных алгебр, который переводит класс элемента $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}}$ в такой элемент $\varphi'(\bar{x})$, что

$$\varphi'(\bar{x})T^{\frac{\deg x - \deg \bar{x}}{\lambda}} = \left(\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}\right)^{-1} \theta(x).$$

Ясно, что $\varphi'(f_\lambda) = T$. Докажем что φ' индуцирует гомоморфизм градуированных алгебр $\varphi : k[\overline{\mathcal{X}}]/\bar{I} \to \mathrm{HH}^*(R)$. Для этого достаточно показать, что любая образующая идеала $\bar{I}$ переходит в 0. Это очевидно, если образующая имеет степень больше 0. Образующие степени 0 (если они вообще есть) имеют вид xy для некоторых $x, y \in \mathcal{Y}$. Пусть $Z(R)$ обозначает центр алгебры R. Так как алгебра R связна, то $\mathrm{HH}^0(R) = Z(R) = k \oplus (Z(R) \cap J)$, где J – радикал Джекобсона алгебры R. Несложно проверить, что

$$Z(R) \cap J = \begin{cases} 0, & \text{если } r > 2, \\ {}_k\langle \beta_2\beta_1 + \beta_1\beta_2 \rangle, & \text{если } r = 2, \\ {}_k\langle \{\mu_{1,j-1}\tau_1\nu_{1,j}\}_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \cup \{\beta_1^2, \beta_1^3\} \rangle, & \text{если } r = 1. \end{cases}$$

Тогда $ab = 0$ для $a, b \in Z(R) \cap J$. Более того, если $a \in \mathrm{HH}^0(R)$ и $a^2T = 0$, то $a \in Z(R) \cap J$. Несложно проверить, что $\varphi'(x)^2T = 0$ для $x \in \mathcal{Y}$, то есть $\varphi'(x) \in Z(R) \cap J$. Таким образом, $\varphi'(x)\varphi'(y) = 0$ для $x, y \in \mathcal{Y}$. Покажем, что φ биективен в положительных степенях.

Пусть Y – множество элементов вида $\varepsilon_1 g_s$ и $\varepsilon_1 f_s$, где $s+1 \not\vdots\, 6n-3$, если $n \not\vdots\, 2$, и $s < \widetilde{\lambda}$. Из результатов работы [6] следует, что элементы вида $xf_{\widetilde{\lambda}}^l$, где $x \in \widetilde{\mathcal{X}} \cup Y$, $\deg x > 0$, $l \geqslant 0$ составляют базис пространства, состоящего из элементов $k[\widetilde{\mathcal{X}}]/\widetilde{I}$ положительной степени. Докажем сюръективность. Так как $T \in \operatorname{Im}\varphi$, то достаточно показать, что $\bigoplus\limits_{t=1}^{\lambda} \mathrm{HH}^t(R) \subset \operatorname{Im}\varphi$. Пусть $1 \leqslant t \leqslant \lambda$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, $y \in \mathrm{HH}^t(R)_{q'^l}$. Тогда $T^{3-l}y \in \mathrm{HH}^{t+(3-l)\lambda}(R)_1$ – k-линейная комбинация элементов вида $\left(\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}\right)^{-1}\theta(x)$, где $x \in \widetilde{\mathcal{X}} \cup Y$, $\deg x > 0$. Заменим в этой линейной комбинации элементы вида $\left(\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}\right)^{-1}\theta(x)$ на $\bar{x}$ в случае $\deg \bar{x} > 0$ и $f_\lambda \bar{x}$ в случае $\deg \bar{x} = 0$, а элементы вида $\left(\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}} \Upsilon_{R,G}\right)^{-1}\theta(\varepsilon_1 x)$ на $\overline{\varepsilon_1}\,\bar{x}$. Ясно, что образ получившегося элемента $k[\overline{\mathcal{X}}]/\bar{I}$ под действием φ равен y. Заметим, что для любых $a, b \in \widetilde{\mathcal{X}}$ таких, что $ab \notin Y$, идеал $\widetilde{I}$ содержит элемент $W = ab - A$, где A – линейная комбинация элементов вида $xf_{\widetilde{\lambda}}^l$, где $x \in \widetilde{\mathcal{X}} \cup Y$, $\deg x > 0$, $l \geqslant 0$. Пусть $\overline{Y}$ – множество элементов вида $\overline{\varepsilon}_1\,\overline{g}_s$ и $\overline{\varepsilon}_1\overline{f}_s$, где $s+1 \not\vdots\, 6n-3$, если $n \not\vdots\, 2$, и $s < \widetilde{\lambda}$. Тогда $\overline{W} \in \bar{I}$ имеет вид $\overline{W} = \bar{a}\bar{b} - \bar{A}$, где $\bar{A}$ – линейная комбинация элементов вида $\bar{x}f_\lambda^l$, где $x \in \widetilde{\mathcal{X}}$ или $\bar{x} \in \overline{Y}$. Так как $\overline{\varepsilon}_1^2 \in \bar{I}$, то элементы только что указанного вида, степени которых больше 0, составляют базис пространства, состоящего из элементов $k[\overline{\mathcal{X}}]/\bar{I}$ положительной степени. Пусть $k[\widetilde{\mathcal{X}}]/\widetilde{I} = \bigoplus_{i \geqslant 0} Z_i$ и $k[\overline{\mathcal{X}}]/\bar{I} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \bar{Z}_i$ – разложения на однородные прямые слагаемые. Тогда из вышесказанного следует, что $\sum\limits_{i=1}^{\lambda} \dim_k \bar{Z}_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\widetilde{\lambda}} \dim_k Z_i$, $\dim_k Z_{i+\widetilde{\lambda}} = \dim_k Z_i$ и $\dim_k \bar{Z}_{i+\lambda} \leqslant \dim_k \bar{Z}_i$. Следовательно, для любого $t > 0$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{t\widetilde{\lambda}} \dim_k \bar{Z}_i \leqslant 3\sum_{i=1}^{t\widetilde{\lambda}} \dim_k Z_i = 3\sum_{i=1}^{t\widetilde{\lambda}} \dim_k \mathrm{HH}^i(\widetilde{R}) = \sum_{i=1}^{t\widetilde{\lambda}} \dim_k \mathrm{HH}^i(R).$$

Тогда из сюръективности φ следует его биективность.

Если $r > 1$, то несложно проверить, что φ биективен во всех степенях. Если $r = 1$, то $\dim_k \mathrm{HH}^0(R) = n + 2$. Ясно, что классы элементов $\varphi(f_\lambda) = T$ и $T\varphi(\bar{x})$ $(\bar{x} \in \mathcal{Y})$ порождают $\mathrm{HH}^\lambda(R)$. Тогда можно дополнить множество $\{\varphi(x) \mid x \in \mathcal{Y}\} \cup \{1\}$ до базиса $\mathrm{HH}^0(R)$ элементами

x_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ такими, что $Tx_i = 0$. Тогда легко доказывается, что $x_i x_j = 0$ и $x_i\varphi(\bar{x}) = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant N,\ \bar{x} \in \overline{\mathcal{X}})$. Тогда мы можем построить изоморфизм $\upsilon : k[\mathcal{X}]/I \to \mathrm{HH}^*(R)$, задав его на образующих по правилу

$$\upsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in \overline{\mathcal{X}},\\ x_i, & \text{если } x = \varepsilon_{i,0}\ (1 \leqslant i \leqslant N). \end{cases}$$

Таким образом, мы доказали теорему в случае $\operatorname{char} k \neq 3$.

Пусть теперь $\operatorname{char} k = 3$. Из доказательства для случая $\operatorname{char} k \neq 3$ следует, что нам достаточно показать, что существует гомоморфизм градуированных k-алгебр $\mathrm{HH}^*(\widetilde{R})^{G\uparrow} \to \mathrm{HH}^*(\widetilde{R})$, который биективен в положительных степенях и совпадает с $\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}}$ в степени $\widetilde{\lambda}$. Из [5, леммы 3 и 4], их аналога для случая $r = 3$ и доказательства [5, лемма 2] несложно вывести следующие 2 утверждения:

1) если $s > 0$ чётно, то у любого элемента $\mathrm{HH}^s(\widetilde{R})$ имеется представитель $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(F(Q_s), \widetilde{R})$ такой, что $qf\eta_{q^{-1},Q_s} = f$;

2) если s нечётно, то для любого элемента $f \in \mathrm{Ker}(\delta_s^Q)^G$ существует $\bar{f} \in \mathrm{Ker}(\delta_s^Q)$ такой, что $f = \bar{f} + q\bar{f}\eta_{q^{-1},Q_s} + q^2\bar{f}\eta_{q^{-2},Q_s}$.

Тогда из пункта 2) леммы 3 следует, что отображение $\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}}$ задаёт отображение $\mathrm{HH}^{\mathrm{ev}}(\widetilde{R})^{G\uparrow} \to \mathrm{HH}^{\mathrm{ev}}(\widetilde{R})$, которое сюръективно в положительных степенях (для градуированной алгебры $A^\bullet$ через A^{ev} обозначается подалгебра $\bigoplus\limits_{t\in\mathbb{Z}} A^{2t}$). Тогда из (3.1) и (3.2) следует, что $\Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}}$ биективен в чётных степенях, больших 0.

Из предложения 1 легко следует, что $\theta(\varepsilon_1)$ порождает $\mathrm{HH}^1(\widetilde{R})$ и умножение на $\theta(\varepsilon_1)$ задаёт биекцию между $\mathrm{HH}^{2s}(\widetilde{R})$ и $\mathrm{HH}^{2s+1}(\widetilde{R})$ для $s > 0$. Из леммы 4 следует, что $\dim_k \mathrm{HH}^s(\widetilde{R})^{G\uparrow} \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^s(\widetilde{R})$ для нечётных s. Тогда из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\dim_k \mathrm{HH}^s(\widetilde{R})^{G\uparrow} = \dim_k \mathrm{HH}^s(\widetilde{R}) \tag{3.3}$$

для всех $s > 0$. Пусть $\bar{\varepsilon} \in C^1(\widetilde{R})$ таково, что его когомологический класс равен $\theta(\varepsilon_1)$. Пусть $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + {}^{q}\bar{\varepsilon} + {}^{q^2}\bar{\varepsilon}$. Тогда класс ε в $\mathrm{HH}^1(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ порождает $\mathrm{HH}^1(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ по лемме 4. Докажем, что умножение на ε задаёт биекцию между $\mathrm{HH}^{2s}(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ и $\mathrm{HH}^{2s+1}(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ для $s > 0$. Пусть $x_i \in C^{2s}(\widetilde{R})^G$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$ – элементы, классы которых образуют базис $\mathrm{HH}^{2s}(\widetilde{R})^{G\uparrow}$. Тогда, как было показано ранее, их когомологические классы образуют базис $\mathrm{HH}^{2s}(\widetilde{R})$, а когомологические классы элементов $\bar{\varepsilon}x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$ образуют базис $\mathrm{HH}^{2s+1}(\widetilde{R})$. Тогда из леммы 4 и равенства (3.3) следует, что классы элементов

$$\bar{\varepsilon}x_i + {}^{q}(\bar{\varepsilon}x_i) + {}^{q^2}(\bar{\varepsilon}x_i) = \varepsilon x_i \ \ (1 \leqslant i \leqslant t)$$

образуют базис $\mathrm{HH}^{2s+1}(\widetilde{R})^{G\uparrow}$. Таким образом, множество $X = \mathrm{HH}^{\mathrm{ev}}(\widetilde{R})^{G\uparrow} \cup \{\varepsilon\}$ порождает $\mathrm{HH}^*(\widetilde{R})^{G\uparrow}$. Определим гомоморфизм градуированных алгебр $\Theta' : \mathrm{HH}^*(\widetilde{R})^{G\uparrow} \to \mathrm{HH}^*(\widetilde{R})$, задав его на множестве X равенствами $\Theta'(x) = \Theta^G_{\widetilde{R},\widetilde{R}}(x)$ для $x \in \mathrm{HH}^{\mathrm{ev}}(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ и $\Theta'(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_1)$. Так как $\mathrm{HH}^2(\widetilde{R})^{G\uparrow} = \mathrm{HH}^2(\widetilde{R}) = 0$, то $\varepsilon^2 = 0$ в $\mathrm{HH}^*(\widetilde{R})^{G\uparrow}$ и $\theta(\varepsilon_1)^2 = 0$ в $\mathrm{HH}^*(\widetilde{R})$. Из всего сказанного легко вывести, что Θ' – корректно определённый гомоморфизм градуированных k-алгебр, который биективен в положительных степенях. $\square$

Литература

1. M. Cohen, S. Montgomery, *Group-graded rings, smash product, and group actions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 237–258.
2. D. Ştefan, *Hochschild cohomology on Hopf Galois extentions.* — J. Pure Appl. Algebra **103** (1995), 221–233.
3. E. N. Marcos, R. Martínez-Villa, Ma. I. R. Martins, *Hochschild cohomology of skew group rings and invariants.* — Central European J. Math. **2** (2004), 177–191.
4. A. V. Shepler, S. Witherspoon, *Group actions on algebras and the graded Lie structure of Hochschild cohomology.* — J. Algebra **351** (2012), No. 1, 350–381.
5. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
6. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Алгебра и Анализ **23** (2011), No. 5, 99–139.
7. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math. (2) **7** (1963), 267–288.
8. A. S. Dugas, *Periodic resolutions and self-injective algebras of finite type.* — J. Pure Appl. Algebra **241** (2010), No. 6, 990–1000.
9. Ю. В. Волков, *Классы стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Вестник С.-Пб. ун-та, Сер. 1, Мат., мех., астр. вып. 1 (2008), 15–21.

Volkov Yu. V. Hochschild cohomology for self-injective algebras of tree class D_n. VI.

For an R-bimodule M with k-algebra structure and a compatible action of a finite group $G \leqslant \mathrm{Aut}R$ we define the algebra $\mathrm{HH}^*(R, M)^{G\uparrow}$.

We construct an isomorphism between the algebras $\mathrm{HH}^*(\mathrm{R})$ and $\mathrm{HH}^*(\widetilde{R}, \widetilde{R}\#kG)^{G\uparrow}$ in the terms of bar-resolutions, where $\widetilde{R} = R\#kG^*$. Using these results, we calculate the Hochschild cohomology algebra for a family of self-injective algebras of tree class D_n.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: wolf86_666@list.ru

Поступило 13 февраля 2014 г.