Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 423, 2014 г.

В. Л. Васильев

О $(2,3)$-ПОРОЖДЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП

§1. Введение

Группа называется (2,3)-порожденной, если она порождается двумя элементами порядка 2 и 3 соответственно. Известно (см., например, [4]), что модулярная группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ изоморфна свободному произведению циклических групп порядка 2 и 3. Таким образом, проблема (2,3)-порождения тесно связана с изучением структуры нормальных подгрупп в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Вопрос о (2,3)-порождении различных классов групп рассматривался многими авторами: например, в работах [1, 2, 5–15], см. также дальнейшие ссылки в упомянутых работах. В частности, известно, что для конечно порожденного коммутативного кольца R и достаточно большого значения n элементарная гиперболическая симплектическая группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является (2,3)-порожденной при условии обратимости 2 в кольце R (см. [9]) или в случае, когда R – конечное поле (см. [6, 7]).

В работе [12] было показано, что можно ослабить условие на обратимость 2 в кольце R без ухудшения оценки снизу на значения n, для которых группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является (2,3)-порожденной. В частности, было доказано, что группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ является (2,3)-порожденной при $n \geqslant 25$. Кроме того, в предыдущих работах авторов [10, 11] было доказано, что группы $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ также (2,3)-порождены, а $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})$ – нет.

Напомним, что под симплектической гиперболической группой $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$, где R – коммутативное кольцо, мы понимаем следующую группу:

$$\mathrm{Sp}_{2n}(R) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \,\middle|\, g^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

Ключевые слова: гиперболические симплектические группы, $(2,3)$-порождение, симплектические трансвекции.

где I_n – единичная матрица размера $n \times n$, а T обозначает транспонирование матрицы. В случае, когда R – поле, приведенное выше определение дает нам классическую симплектическую группу.

Элементарной гиперболической симплектической группой $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ называется подгруппа в $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$, порожденная матрицами следующего вида:

$$E^{(1)}_{i,j}(u) = \begin{cases} I_{2n} + u \cdot (e_{i,n+j} + e_{j,n+i}), & \text{если } \ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \\ I_{2n} + u \cdot e_{i,n+i}, & \text{если } \ 1 \leqslant i = j \leqslant n, \end{cases}$$

$$E^{(2)}_{i,j}(u) = (E^{(1)}_{i,j}(u))^T, \text{ если } 1 \leqslant i,\, j \leqslant n, \tag{1}$$

$$E^{(3)}_{i,j}(u) = I_{2n} + u \cdot e_{i,j} - u \cdot e_{n+j,n+i}, \quad \text{если } \ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,$$

где u пробегает всевозможные элементы из R. Здесь и далее через $e_{i,j}$ мы обозначаем матрицу размера $2n \times 2n$, в которой элемент в i строке и j столбце равен 1, а остальные элементы – нули.

В данной работе, используя построения, схожие с теми, что представлены в [12], мы покажем, что группа $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l])$ является (2,3)-порожденной при достаточно большом значении n. Точнее, мы докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть* $l \geqslant 0$ *и* $n \geqslant 13 + 12 \cdot 2^l$. *Тогда* $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l])$ *является* $(2,3)$*-порожденной группой.*

Здесь и далее мы под $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l]$ при $l = 0$ будем понимать кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 1, отметим, что результаты для кольца $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l]$ могут быть распространены на случай любого конечно порожденного коммутативного кольца R с 1:

Теорема 2. *Пусть* R *– коммутативное кольцо с 1, которое порождено элементами* $1, a_1, \ldots, a_l$, *где* $l \geqslant 0$. *Если* $n \geqslant 13 + 12 \cdot 2^l$, *то* $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ *является* $(2,3)$*-порожденной группой.*

Доказательство. В силу теоремы 1 мы знаем, что

$$\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l]) = \langle x, y \rangle, \quad \text{где } \ x^2 = y^3 = I_{2n},$$

при $n \geqslant 13 + 12 \cdot 2^l$.

Далее рассмотрим кольцевой гомоморфизм

$$\phi\,:\,\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots\mathrm{X}_l]\to R,$$

определенный следующим образом:

$$1_{\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots\mathrm{X}_l]}\mapsto 1_R \text{ и } X_i\mapsto a_i \text{ при } 1\leqslant i\leqslant l.$$

Для доказательства теоремы 2 нам осталось применить групповой эпиморфизм $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_l])\to\mathrm{ESp}_{2n}(R)$, индуцированный гомоморфизмом ϕ, к матрицам x и y. □

Легко видеть, что справедливо следствие из теоремы 2:

Следствие 1. *Пусть α – целое алгебраическое число. Тогда группа $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\alpha])$ будет $(2,3)$-порождена при $n\geqslant 37$.*

Доказательство теоремы 1 будет представлено в разделах 2–4. В разделе 2 мы для каждого $n\geqslant 13+12\cdot 2^l$, где $l\geqslant 0$, построим матрицы x и y из группы $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_l])$, $l\geqslant 0$, такие, что $x^2=y^3=I_{2n}$. Кроме того, мы покажем, что $\langle x,y\rangle\subseteq\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_l])$. Справедливость обратного включения будет доказана в разделе 4.

§2. Построение образующих

Пусть $R=\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_l]$, где $l\geqslant 0$. Рассмотрим модуль R^n со стандартным базисом $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ и $\mathrm{GL}_n(R)$, действующую слева на него. Положим $L=2^l$, и будем предполагать, что $n=3m+r$, где $m\geqslant 4+4L$ и $1\leqslant r\leqslant 3$, то есть $n\geqslant 13+12L$.

Далее через $\mathrm{Sym}(\Gamma)$ и $\mathrm{Alt}(\Gamma)$, где $\Gamma\subseteq B$, мы будем обозначать подгруппу в $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящую из перестановочных матриц (соответственно, четных перестановочных матриц), переставляющих элементы из Γ и фиксирующих элементы из $B\setminus\Gamma$. Кроме того, мы будем отождествлять перестановки и соответствующие им матрицы. Например, через $(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})$ мы будем обозначать матрицу, соответствующую циклической перестановке базисных элементов $v_{i_1},\ldots,v_{i_k}$.

Рассмотрим оператор $y_1\in\mathrm{GL}_n(R)$, действующий следующим образом на элементы из B:

- $v_{3i+3}\mapsto v_{3i+2}\mapsto v_{3i+1}\mapsto v_{3i+3}$, где $0\leqslant i\leqslant m-1$;
- $v_{3m+3}\mapsto v_{3m+2}\mapsto v_{3m+1}\mapsto v_{3m+3}$, если $r=3$;
- y_1 оставляет неподвижными v_{3m+i}, где $1\leqslant i\leqslant r$, если $r\leqslant 2$.

Из приведенных выше соотношений следует, что $y_1 \in \mathrm{Alt}(B)$ и $y_1^3 = I_n$.

Определим $x_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$ на базисных элементах R^n:

- x_1 меняет местами v_{3i+1} и v_{3i} при $1 \leqslant i \leqslant m-1$;
- x_1 оставляет неподвижными v_{3i+2} при $0 \leqslant i \leqslant m-2$;
- $v_1 \mapsto v_2 - v_1$;
- если $r = 1$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} и v_{3m+1}, а v_{3m} оставляет неподвижным;
- если $r = 2$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+2} и v_{3m} с v_{3m+1};
- если $r = 3$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+3} и v_{3m+1} с v_{3m+2}, а v_{3m} оставляет неподвижным.

Из соотношений выше легко видеть, что подмодули $\langle v_1, v_2\rangle$ и $\langle v_3, \dots, v_{3m+r}\rangle$ инвариантны относительно действия x_1, причем x_1 индуцирует на $\langle v_1, v_2\rangle$ оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а на $\langle v_3, \dots, v_{3m+r}\rangle$ действует как перестановка порядка 2. Следовательно, x_1 – инволюция.

Замечание 1. Матрицы x_1, $y_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$, построенные выше, аналогичны матрицам из [12, раздел 2] при $s = 1$. Данная конструкция восходит к совместной работе П. Санкини и М. К. Тамбурини [7] за одним исключением: у нас x_1 действует на $\langle v_3, \dots, v_n\rangle$ как перестановка на базисных элементах, а в [7] как перестановка со знаками.

Теперь рассмотрим копию базиса B, обозначив ее элементы как

$$v_{n+1}, \dots, v_{2n},$$

и определим вложение $\pi : \mathrm{GL}_n(R) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(R)$,

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^T)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Далее определим оператор $z_{i,j}(p) \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и $p \in R$, следующим образом: $z_{i,j}(p)$ действует тождественно на всех v_k, $k \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{i, j, n+i, n+j\}$, а на подмодуле $\langle v_i, v_j, v_{n+i}, v_{n+j}\rangle$ в

R^{2n} действует как оператор, заданный матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

то есть

- $v_i \mapsto pv_j + v_{n+j}$;
- $v_j \mapsto -v_{n+i}$;
- $v_{n+i} \mapsto -v_j$;
- $v_{n+j} \mapsto v_i + pv_{n+i}$.

Легко проверяется, что $A_1^2 = I_4$, а значит, $z_{i,j}(p)$ является инволюцией.

Каждый индекс $0 \leqslant i \leqslant L-1$ может быть представлен в двоичной системе счисления следующим образом:

$$i = \sum_{k=1}^{l} q_{i,k} 2^{k-1}, \quad \text{где} \quad q_{i,k} \in \{0,1\}.$$

Используя данное разложение для $0 \leqslant i \leqslant L-1$, построим $p_i \in R$:

$$p_i = \prod_{k:\ q_{i,k}=1} \mathrm{X}_k. \tag{4}$$

В частности, $p_0 = 1$.

Теперь рассмотрим следующую матрицу

$$z = \prod_{i=0}^{L-1} z_{12i+11,12i+14}(p_i), \tag{5}$$

то есть

- $v_{12i+11} \mapsto p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14}$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$;
- $v_{12i+14} \mapsto -v_{n+12i+11}$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$;
- $v_{n+12i+11} \mapsto -v_{12i+14}$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$;
- $v_{n+12i+14} \mapsto v_{12i+11} + p_i v_{n+12i+11}$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$.

Кроме того, z оставляет неподвижными базисные элементы v_k при

$$k \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \\ \{12i+11, 12i+14, n+12i+11, n+12i+14 \mid 0 \leqslant i \leqslant L-1\}.$$

Замечание 2. Так как отдельные сомножители в определении z в (5) друг с другом попарно коммутируют, то результат их произведения не зависит от порядка сомножителей.

Наконец, определим

$$x = \pi(x_1)z, \quad y = \pi(y_1). \tag{6}$$

Замечание 3. Ранее мы уже отмечали, что y_1 действует на $\langle v_1, ..., v_n\rangle$ как перестановка на базисных элементах, а значит, в силу определения гомоморфизма π, y действует на $v_{n+1}, \dots, v_{2n}$ таким же образом, как y_1 – на $v_1, \dots, v_n$. Аналогично, используя то, что x_1 действует на $\langle v_3, \dots v_n\rangle$ как перестановка порядка 2, мы получаем следующее: x действует на $v_{n+3}, \dots, v_{2n}$ так же, как x_1 – на $v_3, \dots, v_n$. Далее мы будем пользоваться этими фактами без дополнительного упоминания.

Лемма 1. *Матрицы x, y имеют порядок 2 и 3 соответственно.*

Доказательство. Из определения π и того, что $x_1^2 = y_1^3 = I_n$, следует, что $\pi(x_1)$ – инволюция и $y = \pi(y_1)$ имеет порядок 3.

Рассмотрим в R^{2n} модули $M_1^{(i)}$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$, и M_2:

$$\begin{aligned} M_1^{(i)} &= \langle v_{12i+11}, v_{12i+14}, v_{n+12i+11}, v_{n+12i+14}\rangle, \\ M_2 &= \langle v_k \mid k \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \\ &\qquad \{12i+11, 12i+14, n+12i+11, n+12i+14 \mid 0 \leqslant i \leqslant L-1\}\rangle. \end{aligned}$$

Из построений выше мы знаем, что модули $M_1^{(i)}$ при любом $0 \leqslant i \leqslant L-1$ и M_2 инварианты относительно $z_{12j+11,12j+14}(p_j)$, где $0 \leqslant j \leqslant L-1$, и $\pi(x_1)$. При этом для каждого из модулей $M_1^{(i)}$, M_2 существует ровно один оператор из перечисленных, сужение которого на модуль – нетождественный оператор: для модуля $M_1^{(i)}$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$, – оператор $z_{12i+11,12i+14}(p_i)$, для M_2 – оператор $\pi(x_1)$ соответственно. Следовательно, все операторы $\pi(x_1)$, $z_{12i+11,12i+14}(p_i)$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$, попарно коммутируют друг с другом. Используя то, что каждый из этих операторов является инволюцией, мы получаем, что x также является инволюцией. □

Лемма 2. *Справедливо включение $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.*

Доказательство. Из определения π следует, что матрицы $\pi(x_1)$, $y = \pi(y_1)$ содержатся в $\mathrm{Sp}_{2n}(R) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_l])$. Так как матрицы $\pi(x_1)$ и y – $\{0, 1, -1\}$-матрицы, то они содержатся в $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Известно (см., например, [3, теорема 5.3.4]), что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$, а значит справедливо:

$$\pi(x_1), \quad y = \pi(y_1) \in \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{ESp}_{2n}(R).$$

Для завершения доказательства леммы нам осталось показать, что $z_{12i+11,12i+14}(p_i) \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$ при любом $0 \leqslant i \leqslant L-1$. Это следует из равенства:

$$z_{i,j}(p) = (E^{(1)}_{i,i}(-1)E^{(2)}_{i,i}(2))^2 E^{(2)}_{i,i}(p)E^{(2)}_{i,j}(1)E^{(1)}_{i,j}(-1)E^{(2)}_{i,i}(-p)E^{(2)}_{i,j}(1),$$

где $p \in R$. □

§3. Вспомогательные леммы

Определим

$$\Delta_1 = \{v_{3m-6}, v_{3m-5}\} \cup \{v_{3m-3}, \dots, v_{3m}\} \cup \{v_{3m+1}, \dots, v_{3m+r}\} \subseteq B.$$

Лемма 3. *Справедливо включение* $(y^{-1}xyx)^{12} \in \pi(\mathrm{Alt}(\Delta_1))$.

Доказательство. Разложим R^{2n} в прямую сумму следующих модулей:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \langle v_1, v_2, v_5\rangle \oplus \langle v_3, v_4, v_8\rangle,\\
S_2 &= \langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle \oplus \langle v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}\rangle,\\
S_3^{(i)} &= \langle v_{12i+6}, v_{12i+7}, v_{12i+11}\rangle \oplus \langle v_{12i+9}, v_{12i+10}, v_{12i+14}\rangle\\
&\quad \oplus \langle v_{n+12i+6}, v_{n+12i+7}, v_{n+12i+11}\rangle\\
&\quad \oplus \langle v_{n+12i+9}, v_{n+12i+10}, v_{n+12i+14}\rangle, \text{ где } 0 \leqslant i \leqslant L-1,\\
S_4^{(i)} &= \langle v_{12i+12}, v_{12i+13}, v_{12i+17}\rangle \oplus \langle v_{12i+15}, v_{12i+16}, v_{12i+20}\rangle\\
&\quad \oplus \langle v_{n+12i+12}, v_{n+12i+13}, v_{n+12i+17}\rangle\\
&\quad \oplus \langle v_{n+12i+15}, v_{n+12i+16}, v_{n+12i+20}\rangle, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i \leqslant L-1,\\
S_5^{(i)} &= \langle v_{3i}, v_{3i+1}, v_{3i+5}\rangle, \quad \text{где} \quad 4L+2 \leqslant i \leqslant m-3,\\
S_6^{(i)} &= \langle v_{n+3i}, v_{n+3i+1}, v_{n+3i+5}\rangle, \quad \text{где} \quad 4L+2 \leqslant i \leqslant m-3,\\
S_7 &= \langle v_{3m-6}, v_{3m-5}, v_{3m-3}, v_{3m-2}, \dots, v_{3m+r}\rangle,\\
S_8 &= \langle v_{n+3m-6}, v_{n+3m-5}, v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2}, \dots, v_{n+3m+r}\rangle,
\end{aligned}$$

и проверим, что каждый из них инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и, более того, матрица сужения оператора $(y^{-1}xyx)^{12}$ на каждый из этих подмодулей, кроме S_7 и S_8, – единичная.

Замечание 4. Для удобства дальнейшего изложения мы будем проверять действие $y^{-1}xyx = y^{-1}\pi(x_1)zy\pi(x_1)z$, учитывая действие каждого из сомножителей.

Случай 1: $S_1 = \langle v_1, v_2, v_5\rangle \oplus \langle v_3, v_4, v_8\rangle$. Сначала рассмотрим действие $y^{-1}xyx$ на образующие v_1, v_2, v_5:

$$\begin{aligned}
v_1 &\xmapsto{z} v_1 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 - v_1 \xmapsto{y} v_1 - v_3 \\
&\xmapsto{z} v_1 - v_3 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 - v_1 - v_4 \xmapsto{y^{-1}} v_3 - v_2 - v_5, \\
v_2 &\xmapsto{z} v_2 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 \xmapsto{y} v_1 \xmapsto{z} v_1 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 - v_1 \xmapsto{y^{-1}} v_3 - v_2, \\
v_5 &\xmapsto{z} v_5 \xmapsto{\pi(x_1)} v_5 \xmapsto{y} v_4 \xmapsto{z} v_4 \xmapsto{\pi(x_1)} v_3 \xmapsto{y^{-1}} v_1.
\end{aligned}$$

Кроме того, легко видеть, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие v_3, v_8, v_4, а именно:

$$\begin{aligned}
v_3 &\xmapsto{z} v_3 \xmapsto{\pi(x_1)} v_4 \xmapsto{y} v_6 \xmapsto{z} v_6 \xmapsto{\pi(x_1)} v_7 \xmapsto{y^{-1}} v_8, \\
v_8 &\xmapsto{z} v_8 \xmapsto{\pi(x_1)} v_8 \xmapsto{y} v_7 \xmapsto{z} v_7 \xmapsto{\pi(x_1)} v_6 \xmapsto{y^{-1}} v_4, \\
v_4 &\xmapsto{z} v_4 \xmapsto{\pi(x_1)} v_3 \xmapsto{y} v_2 \xmapsto{z} v_2 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 \xmapsto{y^{-1}} v_3.
\end{aligned}$$

Значит, модуль S_1 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на S_1 в базисе v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_8 равна

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $A_2^{12} = I_6$, а значит $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на S_1.

Случай 2: $S_2 = \langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle \oplus \langle v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}\rangle$. Из построения x_1 и определения π из (2) видно, что матрица $\pi(x_1)$ действует на $\langle v_{n+1}, v_{n+2}\rangle$ как

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть $v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+1}$, $v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+1}+v_{n+2}$. Тогда $y^{-1}xyx$ действует на $\langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle$ следующим образом:

$$v_{n+1} \xmapsto{z} v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+1} \xmapsto{y} -v_{n+3} \xmapsto{z} -v_{n+3} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+4} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+5},$$

$$v_{n+2} \xmapsto{z} v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+1} + v_{n+2} \xmapsto{y} v_{n+3} + v_{n+1}$$
$$\xmapsto{z} v_{n+3} + v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+4} - v_{n+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+5} - v_{n+2},$$

$$v_{n+5} \xmapsto{z} v_{n+5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+5} \xmapsto{y} v_{n+4} \xmapsto{z} v_{n+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+1}.$$

Рассмотрим далее действие $y^{-1}xyx$ на образующие v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}:

$$v_{n+3} \xmapsto{z} v_{n+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+4} \xmapsto{y} v_{n+6} \xmapsto{z} v_{n+6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+7} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+8},$$

$$v_{n+4} \xmapsto{z} v_{n+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+3} \xmapsto{y} v_{n+2}$$
$$\xmapsto{z} v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+1} + v_{n+2} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+2} + v_{n+3},$$

$$v_{n+8} \xmapsto{z} v_{n+8} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+8} \xmapsto{y} v_{n+7} \xmapsto{z} v_{n+7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+6} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+4}.$$

Таким образом, подмодуль S_2 инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и матрица сужения $y^{-1}xyx$ в базисе v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}, v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8} на этот подмодуль равна

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $A_3^{12} = I_6$, а значит $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на S_2.

Случай 3: $S_3^{(i)}$ при $0 \leqslant i \leqslant L-1$. Вначале докажем, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие модуля

$$M_3^{(i)} = \Big\langle v_{12i+6}, v_{12i+11}, p_i v_{12i+10} + v_{n+12i+10},$$
$$p_i v_{12i+9} + v_{n+12i+9}, p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14}, v_{12i+7}\Big\rangle.$$

Действительно, нетрудно проверить, что

$$
\begin{aligned}
v_{12i+6} &\xmapsto{z} v_{12i+6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+7} \xmapsto{y} v_{12i+9} \xmapsto{z} v_{12i+9} \\
&\xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+10} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+11}, \\
v_{12i+11} &\xmapsto{z} p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14} \\
&\xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14} \xmapsto{y} p_i v_{12i+13} + v_{n+12i+13} \\
&\xmapsto{z} p_i v_{12i+13} + v_{n+12i+13} \xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+12} + v_{n+12i+12} \\
&\xmapsto{y^{-1}} p_i v_{12i+10} + v_{n+12i+10}, \\
p_i v_{12i+10} + v_{n+12i+10} &\xmapsto{z} p_i v_{12i+10} + v_{n+12i+10} \\
&\xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+9} + v_{n+12i+9} \xmapsto{y} p_i v_{12i+8} + v_{n+12i+8} \\
&\xmapsto{z} p_i v_{12i+8} + v_{n+12i+8} \xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+8} + v_{n+12i+8} \\
&\xmapsto{y^{-1}} p_i v_{12i+9} + v_{n+12i+9}, \\
p_i v_{12i+9} + v_{n+12i+9} &\xmapsto{z} p_i v_{12i+9} + v_{n+12i+9} \\
&\xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+10} + v_{n+12i+10} \xmapsto{y} p_i v_{12i+12} + v_{n+12i+12} \\
&\xmapsto{z} p_i v_{12i+12} + v_{n+12i+12} \xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+13} + v_{n+12i+13} \\
&\xmapsto{y^{-1}} p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14}, \\
p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14} &\xmapsto{z} v_{12i+11} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+11} \xmapsto{y} v_{12i+10} \\
&\xmapsto{z} v_{12i+10} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+9} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+7}, \\
v_{12i+7} &\xmapsto{z} v_{12i+7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+6} \xmapsto{y} v_{12i+5} \xmapsto{z} v_{12i+5} \\
&\xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+5} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+6}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $M_3^{(i)}$ – инвариантный модуль относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_3^{(i)}$ тождественно. Теперь проверим, что $y^{-1}xyx$ действует циклично на образующие модуля

$$M_4^{(i)} = \langle v_{12i+9}, v_{12i+14}, -v_{n+12i+7}, -v_{n+12i+6}, -v_{n+12i+11}, v_{12i+10} \rangle :$$

$$
\begin{aligned}
&v_{12i+9} \xmapsto{z} v_{12i+9} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+10} \xmapsto{y} v_{12i+12} \xmapsto{z} v_{12i+12}\\
&\qquad \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+13} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+14},\\
&v_{12i+14} \xmapsto{z} -v_{n+12i+11} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+11} \xmapsto{y} -v_{n+12i+10}\\
&\qquad \xmapsto{z} -v_{n+12i+10} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+9} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+12i+7},\\
&-v_{n+12i+7} \xmapsto{z} -v_{n+12i+7} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+6} \xmapsto{y} -v_{n+12i+5}\\
&\qquad \xmapsto{z} -v_{n+12i+5} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+5} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+12i+6},\\
&-v_{n+12i+6} \xmapsto{z} -v_{n+12i+6} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+7} \xmapsto{y} -v_{n+12i+9}\\
&\qquad \xmapsto{z} -v_{n+12i+9} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+10} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+12i+11},\\
&-v_{n+12i+11} \xmapsto{z} v_{12i+14} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+14} \xmapsto{y} v_{12i+13} \xmapsto{z} v_{12i+13}\\
&\qquad \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+12} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+10},\\
&v_{12i+10} \xmapsto{z} v_{12i+10} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+9} \xmapsto{y} v_{12i+8} \xmapsto{z} v_{12i+8}\\
&\qquad \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+8} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+9}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $M_4^{(i)}$ инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_4^{(i)}$ тождественно. Наконец, заметим, что

$$
\begin{aligned}
M_3^{(i)} \oplus M_4^{(i)} = {}&\langle v_{12i+6}, v_{12i+7}, v_{12i+11}\rangle\\
&\oplus \langle v_{12i+9}, v_{12i+10}, v_{12i+14}\rangle \oplus \langle v_{n+12i+6}, v_{n+12i+7}, v_{n+12i+11}\rangle\\
&\oplus \langle v_{n+12i+9}, v_{n+12i+10}, v_{n+12i+14}\rangle = S_3^{(i)},
\end{aligned}
$$

и поэтому $S_3^{(i)}$ инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $S_3^{(i)}$ тождественно.

Случай 4: $S_4^{(i)}$ при $0 \leqslant i \leqslant L-1$. Этот случай будем рассматривать по схеме, аналогичной случаю 3. Для этого рассмотрим модуль

$$
\begin{aligned}
M_5^{(i)} = \langle &v_{12i+12}, v_{12i+17}, v_{12i+13}, p_i v_{12i+15} + v_{n+12i+15},\\
&p_i v_{12i+20} + v_{n+12i+20}, p_i v_{12i+16} + v_{n+12i+16}\rangle
\end{aligned}
$$

и проверим, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет его образующие:

$$\begin{aligned}
v_{12i+12} &\xmapsto{z} v_{12i+12} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+13} \xmapsto{y} v_{12i+15} \xmapsto{z} v_{12i+15}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+16} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+17},\\
v_{12i+17} &\xmapsto{z} v_{12i+17} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+17} \xmapsto{y} v_{12i+16} \xmapsto{z} v_{12i+16}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+15} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+13},\\
v_{12i+13} &\xmapsto{z} v_{12i+13} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+12} \xmapsto{y} v_{12i+11}\\
&\xmapsto{z} p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14} \xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14}\\
&\xmapsto{y^{-1}} p_i v_{12i+15} + v_{n+12i+15},\\
p_i v_{12i+15} + v_{n+12i+15} &\xmapsto{z} p_i v_{12i+15} + v_{n+12i+15}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+16} + v_{n+12i+16} \xmapsto{y} p_i v_{12i+18} + v_{n+12i+18}\\
&\xmapsto{z} p_i v_{12i+18} + v_{n+12i+18} \xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+19} + v_{n+12i+19}\\
&\xmapsto{y^{-1}} p_i v_{12i+20} + v_{n+12i+20},\\
p_i v_{12i+20} + v_{n+12i+20} &\xmapsto{z} p_i v_{12i+20} + v_{n+12i+20}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+20} + v_{n+12i+20} \xmapsto{y} p_i v_{12i+19} + v_{n+12i+19}\\
&\xmapsto{z} p_i v_{12i+19} + v_{n+12i+19} \xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+18} + v_{n+12i+18}\\
&\xmapsto{y^{-1}} p_i v_{12i+16} + v_{n+12i+16},\\
p_i v_{12i+16} + v_{n+12i+16} &\xmapsto{z} p_i v_{12i+16} + v_{n+12i+16}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} p_i v_{12i+15} + v_{n+12i+15} \xmapsto{y} p_i v_{12i+14} + v_{n+12i+14}\\
&\xmapsto{z} v_{12i+11} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+11} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+12}.
\end{aligned}$$

В частности, мы пользуемся тем, что, так как по предположению $m \geqslant 4+4L$, x действует тождественно на v_i и v_{n+i}, если $i \equiv 2 \pmod 3$, $i \leqslant 12(L-1)+20 = 12L+8 \leqslant 3(m-2)+2$. Следовательно, модуль $M_5^{(i)}$ инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_5^{(i)}$ тождественно. Кроме того, $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие модуля

$$M_6^{(i)} = \langle v_{12i+15}, v_{12i+20}, v_{12i+16}, -v_{n+12i+12}, -v_{n+12i+17}, -v_{n+12i+13}\rangle.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
v_{12i+15} &\xmapsto{z} v_{12i+15} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+16} \xmapsto{y} v_{12i+18} \xmapsto{z} v_{12i+18}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+19} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+20},\\
v_{12i+20} &\xmapsto{z} v_{12i+20} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+20} \xmapsto{y} v_{12i+19} \xmapsto{z} v_{12i+19}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+18} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+16},\\
v_{12i+16} &\xmapsto{z} v_{12i+16} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+15} \xmapsto{y} v_{12i+14} \xmapsto{z} -v_{n+12i+11}\\
&\xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+11} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+12i+12},\\
-v_{n+12i+12} &\xmapsto{z} -v_{n+12i+12} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+13} \xmapsto{y} -v_{n+12i+15}\\
&\xmapsto{z} -v_{n+12i+15} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+16} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+12i+17},\\
-v_{n+12i+17} &\xmapsto{z} -v_{n+12i+17} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+17} \xmapsto{y} -v_{n+12i+16}\\
&\xmapsto{z} -v_{n+12i+16} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+15} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+12i+13},\\
-v_{n+12i+13} &\xmapsto{z} -v_{n+12i+13} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+12i+12} \xmapsto{y} -v_{n+12i+11}\\
&\xmapsto{z} v_{12i+14} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+14} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+15}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $M_6^{(i)}$ инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_6^{(i)}$ тождественно. Наконец, заметим, что

$$\begin{aligned}
M_5^{(i)} \oplus M_6^{(i)} = &\langle v_{12i+12}, v_{12i+13}, v_{12i+17}\rangle\\
&\oplus \langle v_{12i+15}, v_{12i+16}, v_{12i+20}\rangle \oplus \langle v_{n+12i+12}, v_{n+12i+13}, v_{n+12i+17}\rangle\\
&\oplus \langle v_{n+12i+15}, v_{n+12i+16}, v_{n+12i+20}\rangle = S_4^{(i)},
\end{aligned}$$

и поэтому $(y^{-1}xyx)^6$ тождественен на $S_4^{(i)}$.

Случай 5: $S_5^{(i)}$ при $4L+2 \leqslant i \leqslant m-3$. Отметим, что данный случай возникает только, если $m \geqslant 5+4L$. Рассмотрим действие $y^{-1}xyx$

на $S_5^{(i)}$:

$$v_{3i} \xmapsto{z} v_{3i} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+1} \xmapsto{y} v_{3i+3} \xmapsto{z} v_{3i+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i+5},$$

$$v_{3i+5} \xmapsto{z} v_{3i+5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+5} \xmapsto{y} v_{3i+4} \xmapsto{z} v_{3i+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i+1},$$

$$v_{3i+1} \xmapsto{z} v_{3i+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i} \xmapsto{y} v_{3i-1} \xmapsto{z} v_{3i-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i}.$$

Здесь мы пользуемся тем, что, так как $3i-1 > 12(L-1)+14$, то z действует тождественно на векторы v_{3i-1}, v_{3i+5}. Таким образом, модули $S_5^{(i)}$ инварианты относительно действия $y^{-1}xyx$ и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на каждый из модулей $S_5^{(i)}$ равна

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, $(y^{-1}xyx)^3$ действует тождественно на модуле $S_5^{(i)}$, где $4L+2 \leqslant i \leqslant m-3$.

Случай 6: $S_6^{(i)}$ при $4L+2 \leqslant i \leqslant m-3$. Данный случай, как и предыдущий, возникает только при $m \geqslant 4L+5$. Из (2), (6) и проведенных вычислений в случае 5 следует, что $S_6^{(i)}$ инвариантны относительно $y^{-1}xyx$ и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на каждый из этих подмодулей также равна A_4, а поэтому $(y^{-1}xyx)^3$ тождественен на $S_6^{(i)}$ при $4L+2 \leqslant i \leqslant m-3$.

Таким образом, в результате изучения случаев 1–6 мы знаем, что оператор $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на всех модулях, кроме S_7 и S_8. Для завершения доказательства нам осталось рассмотреть действие оператора на этих подмодулях.

Случай 7: S_7 и S_8. Так как $m \geqslant 4L+4$, то $3m-7 > 12(L-1)+14$. В частности, z действует тождественно на

$$v_{3m-7}, \dots, v_{3m+r} \text{ и } v_{n+3m-7}, \dots, v_{n+3m+r}. \tag{7}$$

По отдельности рассмотрим каждое из возможных значений параметра r. Пусть $r=1$. Опишем действие $y^{-1}xyx$ на S_7:

$$v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},$$

$$v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},$$

$$v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},$$

$$v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},$$

$$v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},$$

$$v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},$$

$$v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.$$

Следовательно, модуль S_7 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как перестановка

$$(v_{3m-3}, v_{3m-2})(v_{3m-5}, v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m}, v_{3m+1}).$$

Отметим, что из приведенных выше вычислений, из (2) и того, что на S_7 матрицы x_1 и y_1 действуют перестановочно, а z – тождественно не только на S_7, но и на векторы из (7), следует, что S_8 также инвариантен относительно $y^{-1}xyx$ и $y^{-1}xyx$ действует на S_8 как перестановка

$$(v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2})(v_{n+3m-5}, v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m}, v_{n+3m+1}).$$

Таким образом, так как $(y^{-1}xyx)^{12}$ тождественен на всех подмодулях, кроме S_7 и S_8, то

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi((v_{3m-6}, v_{3m}, v_{3m-5}, v_{3m-1}, v_{3m+1})).$$

Теперь рассмотрим случай $r = 2$ и опишем действие $y^{-1}xyx$ на S_7:

$$v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},$$

$$v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},$$

$$v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},$$

$$v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},$$

$$v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y} v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},$$

$$v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},$$

$$v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+2},$$

$$v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.$$

Таким образом, S_7 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как

$$(v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m}, v_{3m-2}, v_{3m-3}, v_{3m+1}, v_{3m+2}, v_{3m-5}).$$

Аналогичным образом, $y^{-1}xyx$ действует на S_8 как

$$\big(v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m}, v_{n+3m-2},\\ v_{n+3m-3}, v_{n+3m+1}, v_{n+3m+2}, v_{n+3m-5}\big).$$

Следовательно,

$$(y^{-1}xyx)^{12}\\ = \pi((v_{3m-6}, v_{3m-3})(v_{3m-5}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m+1})(v_{3m}, v_{3m+2})).$$

Наконец, рассмотрим случай $r = 3$. Опишем действие оператора $y^{-1}xyx$ на S_7:

$$v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},$$

$$v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},$$

$$v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},$$

$$v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},$$

$$v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+3} \xmapsto{y} v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+2},$$

$$v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},$$

$$v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+3},$$

$$v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+3} \xmapsto{z} v_{3m+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},$$

$$v_{3m+3} \xmapsto{z} v_{3m+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.$$

Тогда модуль S_7 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как перестановка

$$(v_{3m-3}, v_{3m-2})(v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m+2}, v_{3m}, v_{3m+1}, v_{3m+3}, v_{3m-5}).$$

Аналогичным образом, S_8 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_8 как

$$(v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2})\\ \times (v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m+2}, v_{n+3m}, v_{n+3m+1}, v_{n+3m+3}, v_{n+3m-5}).$$

Следовательно,

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi((v_{3m-6}, v_{3m+3}, v_{3m}, v_{3m-1}, v_{3m-5}, v_{3m+1}, v_{3m+2})).$$

Таким образом, при каждом значении параметра r верно, что

$$(y^{-1}xyx)^{12} \in \pi(\mathrm{Alt}(\Delta_1)). \qquad \square$$

Теперь определим

$$\Delta = \{v_{3m-8}, v_{3m-7}, \dots, v_{3m+r}\} \subseteq \Delta_1 \subseteq B.$$

Из доказательства леммы 3 мы знаем, что $(y^{-1}xyx)^{12} = \pi(\gamma)$, где

- $\gamma = (v_{3m-6}, v_{3m}, v_{3m-5}, v_{3m-1}, v_{3m+1})$, если $r = 1$;
- $\gamma = (v_{3m-6}, v_{3m-3})(v_{3m-5}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m+1})(v_{3m}, v_{3m+2})$, если $r = 2$;
- $\gamma = (v_{3m-6}, v_{3m+3}, v_{3m}, v_{3m-1}, v_{3m-5}, v_{3m+1}, v_{3m+2})$, если $r = 3$.

Следовательно, при каждом значении параметра r перестановка γ совпадает с α, где α определена в доказательстве леммы 3 в [12]. Кроме того, несложно заметить, что мы используем аналогичные конструкции для гомоморфизма π из (2) и матрицы y из (6), что и в [12, раздел 2]. В связи с этим, аналогично лемме 3 из [12], доказывается следующее утверждение:

Лемма 4. *Справедливо включение* $\pi(\mathrm{Alt}(\Delta)) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Также, из [12], мы знаем, что справедлива следующая лемма:

Лемма 5 ([12], лемма 4). *Пусть* $\Gamma \subset B$ *и* $|\Gamma| \geqslant 3$. *Рассмотрим перестановку* $\xi = (c_1, c_2)(c_3, c_4)$, *где* $c_1 \in B \setminus \Gamma$ *и* $c_2, c_3, c_4 \in \Gamma$ *– попарно различны. Тогда* $\langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{c_1\})$.

Теперь, используя лемму 5, мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 6. *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant m-3$ *и* $\Gamma = \{v_{3i+1}, \dots, v_{3m+r}\} \subset B$. *Если* $\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma)) \subseteq \langle x, y\rangle$, *то* $\pi(\mathrm{Alt}(\{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\} \cup \Gamma)) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим перестановку

$$\gamma = (v_{3i+1}, v_{3m-5})(v_{3m-3}, v_{3m-2}) \in \mathrm{Alt}(\Gamma).$$

Тогда $x\pi(\gamma)x^{-1} \in \langle x, y\rangle$, так как $\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma)) \subseteq \langle x, y\rangle$ по условию леммы. Так как $z = z^{-1}$ действует нетождественно только на

$$\Big\langle v_k \mid k \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \\ \{12i+11, 12i+14, n+12i+11, n+12i+14 \mid 0 \leqslant i \leqslant L-1\}\Big\rangle,$$

то $z\pi(\gamma)z^{-1} = \pi(\gamma)$. В частности, $x\pi(\gamma)x^{-1} = \pi(x_1\gamma x_1^{-1})$. Так как по построению x_1 действует перестановочно на $\{v_3, \ldots, v_n\}$, то

$$\xi = x_1\gamma x_1^{-1} = (v_{3i}, v_{3m-6})(v_{3m-3}, v_{3m-2}).$$

Применяя лемму 5, получаем, что

$$\langle x_1\gamma x_1^{-1}, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}),$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})) &= \pi(\langle x_1\gamma x_1^{-1}, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle) \\ &= \langle x\pi(\gamma)x^{-1}, \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma))\rangle \subseteq \langle x, y\rangle. \qquad (8)\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим перестановку

$$\delta = (v_{3i}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m}) \in \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}).$$

Тогда $y\pi(\delta)y^{-1}$ и $y^2\pi(\delta)y^{-2}$ лежат в $\langle x, y\rangle$, так как по доказанному

$$\pi(\delta) \in \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})) \subseteq \langle x, y\rangle. \qquad (9)$$

Более того, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}y\pi(\delta)y^{-1} &= \pi(y_1\delta y_1^{-1}) = \pi(\epsilon), \quad \text{где} \ \ \epsilon = (v_{3i-1}, v_{3m})(v_{3m-2}, v_{3m-1}), \\ y^2\pi(\delta)y^{-2} &= \pi(y_1^2\delta y_1^{-2}) = \pi(\eta), \quad \text{где} \ \ \eta = (v_{3i-2}, v_{3m-1})(v_{3m}, v_{3m-2}).\end{aligned}$$

Дважды применяя лемму 5, получаем, что

$$\begin{aligned}\langle \epsilon, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})\rangle &= \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-1}, v_{3i}\}), \\ \langle \eta, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-1}, v_{3i}\}\rangle &= \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\}),\end{aligned}$$

а значит, используя (8) и (9),

$$\begin{aligned}&\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\})) = \pi(\langle \epsilon, \eta, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})\rangle) \\ &\quad = \langle y\pi(\delta)y^{-1}, y^2\pi(\delta)y^{-2}, \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}))\rangle \subseteq \langle x, y\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 7. *Справедливо включение* $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Следует из лемм 4 и 6. $\square$

§4. Доказательство теоремы 1

Введем некоторые обозначения, которые будут использоваться далее в разделе.

Обозначения.

Через $\overline{e}_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, будем обозначать матрицу размера $n \times n$, у которой в i-ой строке и j-ом столбце стоит 1, а остальные коэффициенты равны 0.

Через $t_{i,j}(u)$ мы будем обозначать элементарные трансвекции в $\mathrm{GL}_n(R)$, то есть $t_{i,j}(u) = I_n + u \cdot \overline{e}_{i,j}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и $u \in R$.

Через $w_{i,j}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, будем обозначать матрицу из $\mathrm{Sym}(B)$, соответствующую транспозиции элементов v_i и v_j.

Через $h_{i,j}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ будем обозначать оператор из $\mathrm{GL}_n(R)$, действующий тождественно на v_k, где $k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i,j\}$, а действие сужения оператора на модуль $\langle v_i, v_j \rangle$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $h_{i,j}$ – инволюция и действие x_1 и $h_{1,2}$ совпадает на $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Далее определим следующие диагональные матрицы:

$$d_i(u) = I_n + (u-1) \cdot \overline{e}_{i,i}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{и} \quad u \in R.$$

Кроме того, для попарно различных индексов $1 \leqslant k_0, \dots, k_{2L+3} \leqslant 2n$ и $\mu \in \{0,1\}$ определим матрицу

$$g(k_0,\dots,k_{2L-1}; k_{2L}, k_{2L+1}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; \mu) \\ = \pi(h_{k_{2L},k_{2L+1}}) \pi(w^{\mu}_{k_{2L+2},k_{2L+3}}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(p_i).$$

Для попарно различных индексов $1 \leqslant k_0, \dots, k_{2L+4} \leqslant 2n$ и $\mu \in \{0,1\}$ определим матрицу

$$\widetilde{g}(k_0,\dots,k_{2L-1}; k_{2L}, k_{2L+1}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; k_{2L+4}; \mu) \\ = \pi(d_{k_{2L+4}}(-1)) \pi(t_{k_{2L},k_{2L+1}}(1)) \pi(w^{\mu}_{k_{2L+2},k_{2L+3}}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(p_i).$$

Мы также будем использовать следующее обозначение для коммутатора: $[U,V] = UVU^{-1}V^{-1}$.

Из леммы 2 мы знаем, что $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, а значит $\langle x, y\rangle$ содержится в $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$. Для доказательства теоремы 1 осталось доказать обратное включение:

Теорема 3. *Группа* $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ *содержится в* $\langle x, y\rangle$.

Доказательство. Несложно заметить, что для матриц вида (1) справедливы следующие равенства:

$$
\begin{array}{ll}
E_{i,j}^{(k)}(u)E_{i,j}^{(k)}(v) = E_{i,j}^{(k)}(u+v), & \text{где } 1 \leqslant i, j \leqslant n \text{ и } k \in \{1,2\},\\
E_{i,j}^{(3)}(u)E_{i,j}^{(3)}(v) = E_{i,j}^{(3)}(u+v), & \text{где } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\\
\left(E_{i,j}^{(k)}(u)\right)^{-1} = E_{i,j}^{(k)}(-u), & \text{где } 1 \leqslant i, j \leqslant n \text{ и } k \in \{1,2\},\\
\left(E_{i,j}^{(3)}(u)\right)^{-1} = E_{i,j}^{(3)}(-u), & \text{где } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,
\end{array}
$$

а $u, v \in R$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида $E_{i,j}^{(1)}(u), E_{i,j}^{(2)}(u)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и $E_{i,j}^{(3)}(u)$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, а u представим следующим образом:

$$u = \prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{s_i}, \text{ где } s_i \geqslant 0. \tag{10}$$

Доказательство далее будет разделено на 4 этапа:

- Этап 1: предварительные построения;
- Этап 2: $E_{i,j}^{(3)}(u) \in \langle x, y\rangle$, где u из R имеет вид (10);
- Этап 3: $E_{i,j}^{(2)}(u) \in \langle x, y\rangle$, где u из R имеет вид (10);
- Этап 4: $E_{i,j}^{(1)}(u) \in \langle x, y\rangle$, где u из R имеет вид (10).

Прежде чем приступить к этапу 1, отметим, что все построенные далее матрицы g_i содержатся в группе $\langle x, y\rangle$.

Этап 1. Из определений x_1 и $h_{1,2}$ следует, что $x_1 h_{1,2} \in \mathrm{Sym}(B)$, а значит можно найти такую перестановку $\alpha \in \mathrm{Alt}(B)$, что

$$\alpha x_1 = h_{1,2} w_{3,4}^{\eta},$$

где η – 0 или 1 в зависимости от четности перестановки $x_1h_{1,2}$. Так как $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x,y\rangle$ в силу леммы 7, то

$$g(11,14,23,26,\ldots,12(L-1)+11,12(L-1)+14;1,2;3,4;\eta)$$
$$= \pi(h_{1,2})\pi(w_{3,4}^{\eta})\prod_{i=0}^{L-1} z_{12i+11,12i+14}(p_i) = \pi(\alpha x_1)z = \pi(\alpha)x \in \langle x,y\rangle.$$

Легко видеть, что в определении матрицы $\pi(\alpha)x$ участвуют $2L+4$ попарно различных индексов. Выберем произвольные попарно различные индексы $1 \leqslant k_0,\ldots,k_{2L+3} \leqslant n$. Так как $n \geqslant 13+12L$, то можно выбрать попарно различные индексы $1 \leqslant k_{2L+4},\ldots k_{4L+7} \leqslant n$, не содержащиеся в множестве

$$\{1,\ldots,4\} \cup \{12i+11, 12i+14 \mid 0 \leqslant i \leqslant L-1\} \cup \{k_0,\ldots,k_{2L+3}\}.$$

Рассмотрим теперь следующие перестановки из $\mathrm{Alt}(B)$:

$$\beta_1 = \prod_{i=1}^{4} w_{i,k_{4L+3+i}} \cdot \prod_{i=0}^{L-1} w_{12i+11,k_{2L+4+2i}} \cdot \prod_{i=0}^{L-1} w_{12i+14,k_{2L+5+2i}},$$
$$\beta_2 = \prod_{i=0}^{2L+3} w_{k_{2L+4+i},k_i}.$$

Так как $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x,y\rangle$ в силу леммы 7, то при помощи несложных матричных вычислений проверяется, что в $\langle x,y\rangle$ содержится матрица вида

$$\begin{aligned} g_1 &= \pi(\beta_2\beta_1)\pi(\alpha)x\pi(\beta_2\beta_1)^{-1} \\ &= \pi(h_{k_{2L},k_{2L+1}})\pi(w^{\eta}_{k_{2L+2},k_{2L+3}})\prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(p_i) \\ &= g(k_0,\ldots,k_{2L-1};k_{2L},k_{2L+1};k_{2L+2},k_{2L+3};\eta) \end{aligned} \tag{11}$$

для попарно различных индексов $1 \leqslant k_0,\ldots,k_{2L+3} \leqslant n$.

Замечание 5. Так как индексы $k_0,\ldots,k_{2L+3}$ попарно различны, то матрицы $\pi(h_{k_{2L},k_{2L+1}})$, $\pi(w^{\eta}_{k_{2L+2},k_{2L+3}})$ и $z_{k_{2i},k_{2i+1}}(p_i)$, где $0 \leqslant i \leqslant L-1$, в (11) попарно коммутируют друг с другом. Далее будем использовать этот факт без дополнительного упоминания.

В связи с тем, что матрицы вида (11) содержатся в группе $\langle x, y\rangle$, то в ней содержится следующая матрица:

$$g_2 = \bigl[g(2,3,\dots,2L+1; 2L+2, 2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta), \\ g(2L+6,\dots,4L+5; 2,3; 4L+6, 4L+7; \eta)\bigr].$$

Здесь при выборе индексов в матрицах вида (11) мы пользуемся тем, что $n \geqslant 13 + 12L$. Легко видеть, что

$$g_2 = [z_{2,3}(p_0), \pi(h_{2,3})] = [z_{2,3}(1), \pi(h_{2,3})] = (z_{2,3}(1)\pi(h_{2,3}))^2.$$

Из определений $z_{2,3}(1)$ и $\pi(h_{2,3})$ следует, что g_2 действует тождественно на всех v_i, $i \in \{1,\dots,2n\} \setminus \{2,3,n+2,n+3\}$, а сужение g_2 на модуль $M_7 = \langle v_2, v_3, v_{n+2}, v_{n+3}\rangle$ определяется следующей матрицей:

$$A_5 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = -I_4.$$

Таким образом, $g_2 = \pi(d_2(-1)d_3(-1))$.

Покажем теперь, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся все матрицы вида

$$\pi(d_i(-1)d_j(-1)), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Так как $n \geqslant 13 + 12L$, то можно выбрать такие $1 \leqslant k_0 \neq k_1 \leqslant n$, что $k_0, k_1 \notin \{2,3,i,j\}$. Рассмотрим четные перестановки

$$\beta_1 = w_{2,k_0} w_{3,k_1} \quad \text{и} \quad \beta_2 = w_{k_0,i} w_{k_1,j}.$$

Так как $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$ в силу леммы 7, то $\pi(\beta_1)$ и $\pi(\beta_2)$ содержатся в $\langle x, y\rangle$, а значит в $\langle x, y\rangle$ содержится матрица вида

$$\pi(\beta_2\beta_1) g_2 \pi(\beta_2\beta_1)^{-1} = \pi(d_i(-1)d_j(-1)), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n. \tag{12}$$

Кроме того, несложно видеть, что $d_i(-1)h_{i,j} = t_{j,i}(1)$. Следовательно, используя тот факт, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида (11) и (12), мы получаем следующее: в группе $\langle x, y\rangle$ содержится матрица вида

$$\begin{aligned} g_3 &= \pi(d_{k_{2L+1}}(-1)d_{k_{2L+4}}(-1)) g(k_0,\dots,k_{2L-1}; k_{2L+1}, k_{2L}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; \eta) \\ &= \pi(d_{k_{2L+4}}(-1))\pi(t_{k_{2L},k_{2L+1}}(1))\pi(w^{\eta}_{k_{2L+2},k_{2L+3}}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(p_i) \\ &= \widetilde{g}(k_0,\dots,k_{2L-1}; k_{2L}, k_{2L+1}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; k_{2L+4}; \eta) \end{aligned} \tag{13}$$

при любых попарно различных индексах $1 \leqslant k_0, \ldots, k_{2L+4} \leqslant n$.

Используя две подходящие матрицы вида (13), мы можем построить следующую матрицу в $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned} g_4 = \big[&\widetilde{g}(4, \ldots, 2L+3; 3, 2; 2L+4, 2L+5; 2L+6; \eta), \\ &\qquad\qquad \widetilde{g}(2L+7, \ldots, 4L+6; 2, 1; 4L+7, 4L+8; 4L+9; \eta)\big]. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что

$$g_4 = [\pi(t_{3,2}(1)), \pi(t_{2,1}(1))] = \pi([t_{3,2}(1), t_{2,1}(1)]) = \pi(t_{3,1}(1)) = E^{(3)}_{3,1}(1).$$

Здесь мы воспользовались тем, что π – гомоморфизм, а также коммутаторным тождеством для элементарных трансвекций:

$$[t_{i,j}(u_1), t_{j,k}(u_2)] = t_{i,k}(u_1 u_2), \tag{14}$$

где $1 \leqslant i,\, j, k \leqslant n$ – попарно различные индексы и $u_1, u_2 \in R$.

Тем самым мы показали, что $E^{(3)}_{3,1}(1) \in \langle x, y\rangle$. Следовательно, сопрягая данную матрицу при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что справедливо следующее включение:

$$E^{(3)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n. \tag{15}$$

Этап 2. Аналогично тому, как была получена матрица g_2, мы можем показать, что, подбирая соответствующие индексы у двух матриц вида (11), в $\langle x, y\rangle$ можно построить следующие матрицы:

$$\begin{aligned} g_5 &= \big[g(3, 2, 4, \ldots, 2L+1; 2L+2, 2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta), \\ &\qquad\qquad g(2L+6, \ldots, 4L+5; 1, 2; 4L+6, 4L+7; \eta)\big], \\ g_6(k) &= \big[g(\Upsilon; 2L+2, 2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta), \\ &\qquad\qquad g(2L+6, \ldots, 4L+5; 1, 2; 4L+6, 4L+7; \eta)\big], \end{aligned}$$

где $0 \leqslant k \leqslant L-1$, а через Υ мы обозначаем следующий набор индексов:

$$\Upsilon = \begin{cases} 2, \ldots, 2L+1, & \text{если} \quad k = 0, \\ 4, \ldots, 3+2k, 2, 3, 4+2k, \ldots, 2L+1, & \text{если} \quad 1 \leqslant k \leqslant L-2, \\ 4, \ldots, 2L+1, 2, 3, & \text{если} \quad k = L-1. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} g_5 &= [z_{3,2}(p_0), \pi(h_{1,2})] = (z_{3,2}(1)\pi(h_{1,2}))^2, \\ g_6(k) &= [z_{2,3}(p_k), \pi(h_{1,2})] = (z_{2,3}(p_k)\pi(h_{1,2}))^2. \end{aligned}$$

Напомним, что $p_0 = 1$. Из определений $z_{2,3}(p_k), z_{3,2}(1)$ и $\pi(h_{1,2})$ следует, что g_5 и $g_6(k)$ действуют тождественно на v_i, $i \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{1, 2, 3, n+1, n+2, n+3\}$, а на модуле $M_8 = \langle v_1, v_2, v_3, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}\rangle$ их действие определяется матрицами $(A_6A_8)^2$ и $(A_7(k) \cdot A_8)^2$ соответственно, где

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p_k & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & p_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи несложных матричных вычислений получаем, что

$$g_5 = I_{2n} + e_{2,1} - e_{n+1,n+2} + e_{n+1,3} + e_{n+3,1} = E^{(2)}_{1,3}(1)E^{(3)}_{2,1}(1),$$
$$g_6(k) = I_{2n} + e_{2,1} - e_{n+1,n+2} - p_ke_{3,1} + p_ke_{n+1,n+3} - e_{n+1,3} - e_{n+3,1},$$

где $0 \leqslant k \leqslant L-1$. В силу (15), $E^{(3)}_{2,1}(-1) = \left(E^{(3)}_{2,1}(1)\right)^{-1} \in \langle x, y\rangle$, а значит $E^{(2)}_{1,3}(1) = g_5E^{(3)}_{2,1}(-1) \in \langle x, y\rangle$. Как и выше, используя сопряжение при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что справедливо следующее включение:

$$E^{(2)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n. \tag{16}$$

Используя (15), (16) и уже доказанный факт, что $g_6(k) \in \langle x, y\rangle$, мы можем получить, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы

$$g_6(k)E^{(2)}_{1,3}(1)\left(E^{(3)}_{2,1}(1)\right)^{-1} = I_{2n} - p_ke_{3,1} + p_ke_{n+1,n+3} + p_ke_{n+1,1}$$

при всех $0 \leqslant k \leqslant L-1$.

Следовательно, используя сопряжение при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что справедливо следующее включение:

$$g_7(i,j;k) = I_{2n} - p_k e_{i,j} + p_k e_{n+j,n+i} + p_k e_{n+j,j} \in \langle x, y\rangle \tag{17}$$

при всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и $0 \leqslant k \leqslant L-1$.

Используя (15) и (17), мы можем построить в $\langle x, y\rangle$ следующие матрицы:

$$g_8(k) = g_7(3,1;k)\Big[g_7(3,2;k), E^{(3)}_{2,1}(-1)\Big] = E^{(2)}_{1,2}(-p_k),$$

где $0 \leqslant k \leqslant L-1$. Следовательно, сопрягая $g_8(k)$ при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида

$$E^{(2)}_{i,j}(p_k) = \Big(E^{(2)}_{i,j}(-p_k)\Big)^{-1}$$
$$\text{при всех} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \text{ и } 0 \leqslant k \leqslant L-1. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь следующую матрицу вида (11) из $\langle x, y\rangle$:

$$g_9 = g(2,\dots,2L+1; 2L+2, 2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta).$$

Несложные матричные вычисления показывают, что

$$g_9 E^{(2)}_{1,2}(-u) g_9^{-1} = z_{2,3}(1) E^{(2)}_{1,2}(-u) z_{2,3}(1)^{-1} = E^{(3)}_{3,1}(u), \tag{19}$$

где $u \in R$. В силу (18), $E^{(2)}_{1,2}(p_k) \in \langle x, y\rangle$ при всех $0 \leqslant k \leqslant L-1$, а значит, используя формулу (19), получаем, что $E^{(3)}_{3,1}(p_k)$ содержится в $\langle x, y\rangle$. Следовательно, используя сопряжение при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы можем показать, что справедливо включение:

$$E^{(3)}_{i,j}(p_k) \in \langle x, y\rangle \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \text{ и } 0 \leqslant k \leqslant L-1. \tag{20}$$

В силу (20) и определений p_k в (4), мы знаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(1), E^{(3)}_{i,j}(\mathrm{X}_k) \in \langle x, y\rangle \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \text{ и } 1 \leqslant k \leqslant l.$$

Тогда, используя коммутаторное тождество для элементарных трансвекций из (14) и применяя вложение π, мы получаем, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида

$$E^{(3)}_{i,j}(u) \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \quad \text{и} \quad u \text{ из } R, \quad \text{имеющих вид (10)}. \tag{21}$$

Этап 3. Перепишем формулу (19) в виде:

$$E_{1,2}^{(2)}(u) = g_9^{-1} E_{3,1}^{(3)}(-u) g_9, \quad \text{где} \quad u \in R.$$

Используя данную формулу и (21), а также сопряжение при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что

$$E_{i,j}^{(2)}(u) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \text{ и } u \text{ из } R, \\ \text{имеющих вид (10).} \tag{22}$$

Для завершения этапа 3 доказательства нам остается лишь показать, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида $E_{i,i}^{(2)}(u)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и элемент u из R имеет вид (10). Для начала докажем справедливость последнего утверждения для случая, когда $u = p_k$, где $0 \leqslant k \leqslant L-1$. Так как $g_7(i,j;k)$ в силу (17) и g_9 в силу (11) содержатся в $\langle x, y\rangle$, то следующие матрицы также принадлежат группе $\langle x, y\rangle$:

$$g_{10}(k) = g_9 g_7(3,1;k) g_9^{-1} = z_{2,3}(1) g_7(3,1;k) z_{2,3}(1)^{-1} = E_{1,1}^{(2)}(p_k) E_{1,2}^{(2)}(p_k),$$

где $0 \leqslant k \leqslant L-1$. Мы знаем, что, в силу (18), $E_{1,2}^{(2)}(p_k) \in \langle x, y\rangle$ при всех $0 \leqslant k \leqslant L-1$, а значит $E_{1,1}^{(2)}(p_k) \in \langle x, y\rangle$. Тогда, используя сопряжение при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что

$$E_{i,i}^{(2)}(p_k) \in \langle x, y\rangle \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{и} \quad 0 \leqslant k \leqslant L-1. \tag{23}$$

Теперь рассмотрим общий случай, то есть когда элемент u имеет вид (10). Из определений p_k в (4) следует, что найдется такой индекс $0 \leqslant k_0 \leqslant L-1$, что

$$u = p_{k_0} \cdot \prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{2s_i}, \quad \text{где} \quad s_i \geqslant 0.$$

Из построений выше мы знаем, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся следующие матрицы: $E_{2,1}^{(3)}(\prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{s_i})$ в силу (21), $E_{1,2}^{(2)}(p_{k_0} \cdot \prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{s_i})$ в силу (22), $E_{2,2}^{(2)}(p_{k_0})$ в силу (23), а значит, применяя следующее равенство:

$$\Big[E_{2,1}^{(3)}(u_1), E_{2,2}^{(2)}(u_2)\Big] E_{1,2}^{(2)}(u_1 u_2) = E_{1,1}^{(2)}(u_1^2 u_2), \quad \text{где} \quad u_1, u_2 \in R,$$

получаем, что $E_{1,1}^{(2)}(u) \in \langle x, y\rangle$. Как и выше, используя сопряжение при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что справедливо следующее включение:

$$E_{i,i}^{(2)}(u) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ и } u \text{ из } R, \text{ имеющих вид (10).} \quad (24)$$

Этап 4. Для завершения доказательства нам осталось показать, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида $E_{i,j}^{(1)}(u)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и элемент u из R имеет вид (10). Для этого отметим, что справедливы следующие матричные равенства:

$$g_9 E_{1,2}^{(3)}(u) g_9^{-1} = z_{2,3}(1) E_{1,2}^{(3)}(u) z_{2,3}(1)^{-1} = E_{1,3}^{(1)}(u),$$
$$g_9 \left(E_{2,2}^{(2)}(u)\right)^{-1} g_9^{-1} = z_{2,3}(1) \left(E_{2,2}^{(2)}(u)\right)^{-1} z_{2,3}(1)^{-1} = E_{3,3}^{(1)}(u),$$

где $u \in R$. Так как $E_{1,2}^{(3)}(u) \in \langle x, y\rangle$ в силу (21) и $\left(E_{2,2}^{(2)}(u)\right)^{-1} \in \langle x, y\rangle$ в силу (24), где u из R имеет вид (10), то $E_{1,3}^{(1)}(u), E_{3,3}^{(1)}(u) \in \langle x, y\rangle$. А значит, используя сопряжение при помощи подходящей матрицы из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что $E_{i,j}^{(1)}(u) \in \langle x, y\rangle$ при всех $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$ и всех элементах u из R, имеющих вид (10).

Из этапов 2, 3 и 4 с учетом замечания, сделанного в начале доказательства, следует справедливость теоремы. □

Литература

1. L. Di Martino, N. Vavilov, $(2,3)$-*generation of* $SL(n,q)$. I. *Cases* $n = 5,6,7$. — Comm. Algebra **22(4)** (1994), 1321–1347.
2. L. Di Martino, N. Vavilov, $(2,3)$-*generation of* $SL(n,q)$. II. *Cases* $n \geqslant 8$. — Comm. Algebra **24** (1996), 487–515.
3. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Grundlehren Math. Wiss., Bd. 291, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
4. S. Lang, *Introduction to Modular Forms.* Springer, 1976.
5. M. W. Liebeck, A. Shalev, *Classical groups, probabilistic methods, and the* $(2,3)$-*generation problem.* — Ann. Math. (2) **144** (1996), 77–125.
6. A. Lucchini, M. C. Tamburini, *Classical groups of large rank as Hurwitz groups.* — J. Algebra **219** (1999), No. 2, 531–546.
7. P. Sanchini, M. C. Tamburini. *Constructive* $(2,3)$-*generation: a permutational approach.* — Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **64** (1994), 141–158.
8. M. C. Tamburini, *Generation of certain simple groups by elements of small order.* — Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **121** (1987), 21–27.
9. M. C. Tamburini, J. S. Wilson, N. Gavioli, *On the* $(2,3)$-*generation on some classical groups.* I. — J. Algebra **168** (1994), No. 1, 353–370.

10. V. L. Vasilyev, M. A. Vsemirnov, *On* $(2,3)$*-generation of low-dimensional symplectic groups over the integers.* — Communications Algebra **38** (2010), No. 9, 3469–3483.
11. V. L. Vasilyev, M. A. Vsemirnov, *The group* $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ *is* $(2,3)$*-generated.* — Central European J. Math. **9** (2011), No. 1, 36–49.
12. V. L. Vasilyev, M. A. Vsemirnov, *On the* $(2,3)$*-generation of hyperbolic symplectic groups of large rank.* — J. Pure Appl. Algebra **217** (2013), No. 11, 2036–2049.
13. М. А. Всемирнов, *Является ли группа* $\mathrm{SL}(6,\mathbb{Z})$ $(2,3)$*-порожденной?* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 101–130.
14. М. А. Всемирнов, *О* $(2,3)$*-порождении матричных групп над кольцом целых чисел.* — Алгебра и анализ **19** (2007), No. 6, 22–58.
15. M. A. Vsemirnov, *The group* $GL(6,Z)$ *is* (2,3)*-generated.* — J. Group Theory **10** (2007), No. 4, 425–430.

Vasilyev V. L. On the $(2,3)$-generation of hyperbolic symplectic groups.

For any finitely generated, commutative ring R and any sufficiently large n, we prove that the elementary hyperbolic symplectic group $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ can be generated by an involution and an element of order 3.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия
E-mail: mr.vadim.vasilyev@gmail.com

Поступило 13 февраля 2014 г.