

А. М. Тагирджанов, А. С. Благовещенский, А. П. Киселев

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПО ВРЕМЕНИ ПОЛЯ
“КОМПЛЕКСНЫХ ИСТОЧНИКОВ” И ИХ
ИСТОЧНИКИ В ВЕЩЕСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Поля “комплексных источников” и их загадки. С начала 1970-х годов, благодаря работам [1–3], в поле зрения специалистов по теории дифракции находится поле “комплексного источника”. Так называют решение уравнения Гельмгольца вида

$$G = \frac{e^{ikR_*}}{R_*} \quad (1)$$

где

$$R_* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2}, \quad a > 0, \quad (2)$$

– “расстояние до комплексного источника”. Положительная постоянная a произвольна. Термин “поля комплексных источников” распространился также на соответствующие мультиполи, двумерные аналоги (1), на нестационарные и статические версии (см., например, работы, соответственно, [4, 5], [6, 7], [8–11] и [12] и приведенные в них ссылки¹). Функция (1) интересна как точное решение, демонстрирующее при

$$ka \rightarrow \infty \quad (3)$$

гауссовскую локализацию около оси z , см. [1–3, 14, 15]. Разнообразные приложения полей “комплексных источников” упомянуты в [14].

Эти решения изначально были окружены некоторым ореолом таинственности как “возбуждаемые источниками в комплексном пространстве” (хотя в этой связи и было предпринято изучение обобщенных функций в комплексном пространстве [16, 17]).

Ключевые слова: комплексный источник, точные решения, локализованные волны, гауссовы пучки, уравнение Гельмгольца.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 11-01-00407А и 14-01-00535.

¹В работе [12] история комплексификации решения (1) возводится к заметке [13], где рассматривался статический случай $k = 0$.

1.2. Разрез и антенна. Мы стремимся рассеять эту таинственность, выписав явные выражения для соответствующих источников в вещественном физическом пространстве, т.е. найдя такую обобщенную функцию F , что

$$(\Delta + k^2)G = F, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (4)$$

$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Мы не рассматриваем здесь нестационарных и мультипольных полей, ограничиваясь функцией (1), которая, согласно употребительной в оптике терминологии, называется гармонической по времени фундаментальной модой поля “комплексного источника”.

Причиной того, что функция (1) удовлетворяет уравнению (4) с $F \neq 0$, является неоднозначность входящего в R_* квадратного корня. При любом выборе ветви корня G имеет скачок на некоторой поверхности $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ с краем, которая и является носителем F . Назовем \mathcal{S} *антенной*, а F – *распределением токов* на антенне. Изучение антенны для разных выборов корня и вычисление токов на ней началось в работах [18] и [14]. Антенна может быть компактна и некомпактна и иметь сколько угодно компонент связности. Мы считаем ее осесимметрической относительно оси z , а разрез, соответственно, не зависящим от полярного угла.

1.3. Beam choice и source choice. Характер асимптотического поведения функции (1) существенно зависит от того, компактна ли антенна \mathcal{S} . Говоря грубо, если \mathcal{S} некомпактна, то (при надлежащем выборе ветви корня) поле гауссовски локализовано вблизи оси z , приходя с одной бесконечности по z и уходя на другую [14]. Эта ситуация получила название *beam choice*. Если \mathcal{S} компактна, то антенна излучает в одну сторону гауссов пучок, а излучение в противоположную сторону при условии (3) очень мало. Это случай *source choice*. Термины *beam choice* и *source choice* введены в [8] для важных специальных случаев, когда антенна лежит в плоскости $z = 0$ и является, соответственно, плоскостью с круглым вырезом и бесконечно тонким диском, и распространены на общий случай в [14].

Поведение функции G и в дальней зоне, и в параксиальной области (т.е. в малой при условии (3) окрестности оси z , см., например, [15]) для широкого класса антенн исчерпывающе изучено в [14], и здесь мы этого почти не будем касаться.

Ветвь корня (2) мы фиксируем всегда так, чтобы при $z \rightarrow +\infty$ поле представляло собой уходящую волну.

Для случая *beat choice* вычисление функции F подробно изложено в [14], а для случая *source choice* в [14] приведен только результат, причем с неточностью. Здесь мы подробно излагаем вычисление распределения токов F для общего случая. Оно, как и в [14], основано на подстановке функции (1) в левую часть уравнения (4) и применении известной (см., например, [19]) техники работы с обобщенными функциями, имеющими неинтегрируемые степенные особенности.

1.4. Характер ответа. При любом выборе разреза антенна имеет край – окружность

$$C = \left\{ \mathbf{r} : z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = a \right\}, \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Относительно разреза мы делаем несколько предположений, приводящих к тому, что вблизи края поверхность \mathcal{S} локально близка к конической, а если \mathcal{S} некомпактна, то она асимптотически коническая на бесконечности. Токи всегда имеют степенную особенность на C и соответствующие обобщенные функции нуждаются в регуляризации.

Токи F представляют собой комбинацию потенциалов простого и двойного слоя на \mathcal{S} с особенностью на C . В случае, когда антенна \mathcal{S} односвязна и некомпактна, в ответ входит угол между образующей асимптотического конуса и осью z . В [14] был подробно рассмотрен случай, когда этот угол равнялся $\pi/2$ и соответствующий фактор был тривиален. Прямолинейное обобщение этого результата на общий случай содержало ошибку. Ниже мы детально излагаем вычисление токов для общего случая и приводим правильный результат.

§2. АНТЕННА – ДИСК

Сперва рассмотрим простой случай, когда антенна представляет собой бесконечно тонкий диск (см. рис. 1)

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{r} : \rho \leq a, z = 0 \}, \quad (6)$$

где

$$\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$$

– полярный радиус, а ветвь корня (2) фиксирована условием $R_* > 0$ при $\rho > a, z = 0$. Предельные значения R_* на сторонах антенны тогда имеют вид

$$R_*|_{\rho \leq a, z = \pm 0} = \mp i r_1, \quad r_1 = \sqrt{a^2 - \rho^2} > 0. \quad (7)$$

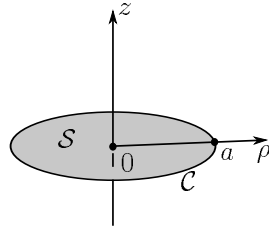


Рис. 1. Антенна S – диск.

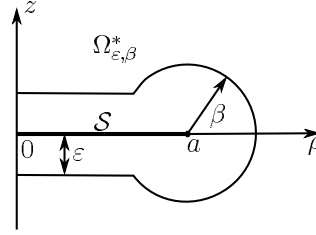


Рис. 2. Область $\Omega_{\epsilon, \beta}^*$.

Рассмотрим, следуя [14], F как обобщенную функцию, действующую на основные (гладкие финитные) функции $\Psi = \Psi(x, y, z)$

$$(F, \Psi) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\Delta + k^2) \Psi dx dy dz. \quad (8)$$

Запишем интеграл (8) в виде

$$(F, \Psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega_{\epsilon, \beta}} G(\Delta + k^2) \Psi \rho d\rho dz d\varphi, \quad (9)$$

где область интегрирования, $\Omega_{\epsilon, \beta}$ получается вращением вокруг оси z двумерной области $\Omega_{\epsilon, \beta}^*$, показанной на рис. 2.

В $\Omega_{\epsilon, \beta}$ функция G удовлетворяет однородному уравнению, $(\Delta + k^2)G = 0$. Формула Грина дает

$$(F, \Psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial\Omega_{\epsilon, \beta}} (G\Psi_n - G_n\Psi) dS, \quad (10)$$

где $\Psi_n := \partial\Psi/\partial n$ – производная функции Ψ по внешней нормали к $\partial\Omega_{\epsilon, \beta}$, dS – элемент площади поверхности. Переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, получим

$$(F, \Psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ 2\pi \int_0^{a-\beta} ([G_z]_{z=0} \bar{\phi} - [G]_{z=0} \bar{\phi}_z) \rho d\rho + \iint_{T_\beta(a)} (G\Psi_\nu - G_\nu\Psi) dS \right\}, \quad (11)$$

где $\mathcal{T}_\beta(a)$ – тор с радиусом образующей окружности β , окружающий \mathcal{C} , (см. рис. 2), $G_\nu := \partial G / \partial \nu$ – производная G по внутренней нормали к $\mathcal{T}_\beta(a)$,

$$[G]_{z=0} := G|_{z=+0} - G|_{z=-0}$$

– стандартное обозначение скачка функции, а $\bar{\phi}$ – усреднение функции

$$\phi(\rho, z, \varphi) := \Psi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \quad (12)$$

по полярному углу, введенному равенствами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$,

$$\bar{\phi}(\rho, z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\rho, z, \varphi) d\varphi. \quad (13)$$

Из (7) следуют выражения для скачков

$$[G]_{z=0} = 2ir_1^{-1} \operatorname{ch}(kr_1), \quad (14)$$

$$[G_z]_{z=0} = -2kar_1^{-2} \operatorname{sh}(kr_1) + 2ar_1^{-3} \operatorname{ch}(kr_1). \quad (15)$$

Как видно из (15), при $\beta \rightarrow 0$ интеграл $\int_0^{a-\beta} [G_z]_{z=0} \bar{\phi} \rho d\rho$ расходится. Регуляризуя его стандартным образом, мы получаем под знаком предела в (11) выражение

$$\begin{aligned} & -4\pi i \int_0^{a-\beta} r_1^{-1} \operatorname{ch}(kr_1) \bar{\phi}_z(\rho, 0) \rho d\rho - 4\pi k a \int_0^{a-\beta} r_1^{-2} \operatorname{sh}(kr_1) \bar{\phi}(\rho, 0) \rho d\rho \\ & + 4\pi a \int_0^{a-\beta} r_1^{-3} (\bar{\phi}(\rho, 0) \operatorname{ch}(kr_1) - \bar{\phi}(a, 0)) \rho d\rho + \mathfrak{I}_{\text{sing}}, \\ & \mathfrak{I}_{\text{sing}} := 4\pi a \bar{\phi}(a, 0) \int_0^{a-\beta} r_1^{-3} \rho d\rho + \iint_{\mathcal{T}_\beta(a)} (G\phi_\nu - G_\nu\phi) dS. \end{aligned} \quad (16)$$

Первый интеграл в правой части (16), очевидно, имеет асимптотику

$$2\pi \bar{\phi}(a, 0) \sqrt{2a\beta}^{-1/2} - 4\pi \bar{\phi}(a, 0) + O(\beta^{1/2}).$$

Рассмотрим второй интеграл. Введем на торе \mathcal{T}_β координаты (θ, φ) равенствами

$$\rho - a = \beta \cos \theta, \quad z = -\beta \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad \theta \in (-\pi, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

В этих координатах $dS = (a + \beta \cos \theta)\beta d\theta d\varphi$ и $R_* = \sqrt{2a\beta e^{i\theta} + \beta^2}$, откуда

$$G = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2a}}\beta^{-\frac{1}{2}} + O(1), \quad G_\nu = G_\beta = -\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\sqrt{2a}}\beta^{-\frac{3}{2}} + O(\beta^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\iint_{T_\beta(a)} (G\Psi_\nu - \Psi G_\nu) dS = -2\pi\bar{\phi}(a, 0)\sqrt{2a}\beta^{-\frac{1}{2}} + O(\beta^{\frac{1}{2}}).$$

В результате $\mathcal{J}_{\text{sing}} = -4\pi\bar{\phi}(a, 0) + O(\beta^{1/2})$, и (11) принимает вид

$$F = -2\delta(\rho - a)\delta(z) + F_1(\rho)\delta'(z) + F_2\delta(z),$$

$$(F_1, \tilde{\phi}) = 2a \int_0^a r_1^{-1} \text{ch}(kr_1) \tilde{\phi}(\rho) \rho d\rho,$$

$$(F_2, \tilde{\phi}) = -2ka \int_0^a r_1^{-2} \text{sh}(kr_1) \tilde{\phi}(\rho) \rho d\rho + 2a \int_0^a r_1^{-3} (\tilde{\phi}(\rho) \text{ch}(kr_1) - \tilde{\phi}(a)) \rho d\rho,$$

где $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\rho)$ – основная функция, зависящая от одной переменной.

§3. ПРОИЗВОЛЬНАЯ АНТЕННА

Начнем с обсуждения связи между выбором ветви корня и антенной $S = \text{supp}F$ в общем случае.

3.1. Разрез и антенна. Рассмотрим комплексную плоскость подкоренного выражения в (2),

$$\rho^2 + z^2 - a^2 - 2iaz = w =: u + iv, \quad a > 0. \quad (17)$$

Поскольку ρ и z вещественны, w принимает значения во внутренней параболы, определяемой неравенством

$$\Pi = \left\{ w : u \geq \frac{1}{4a^2}v^2 - a^2 \right\}. \quad (18)$$

На комплексной плоскости переменной w мы проведем разрез вдоль гладкой несамопересекающейся уходящей на бесконечность кривой. Пусть она задана параметрически

$$w = w(t), \quad t \in [0, +\infty). \quad (19)$$

Предположим, что выполнено условие регулярности

$$u_t^2(t) + v_t^2(t) > 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad (20)$$

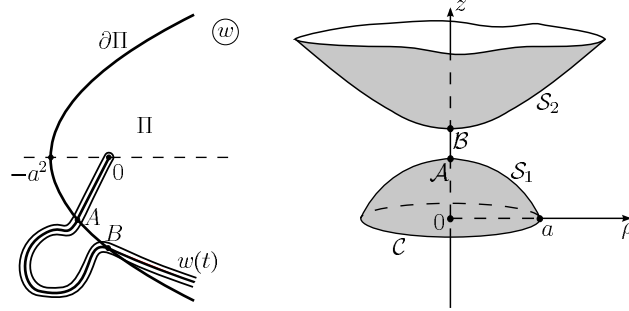


Рис. 3. Пример разреза $w(t)$ и соответствующей ему антенны \mathcal{S} . Точкам $A, B \in \partial\Pi$ отвечают точки $A, B \in \mathcal{S}$. В точке A $w = w(t_1)$ (и, соответственно, $\rho = \rho(t_1) = 0$, $z = z(t_1)$); в точке B $w = w(t_2)$, (и $\rho = \rho(t_2) = 0$, $z = z(t_2)$).

где $u(t) = \operatorname{Re} w(t)$, $v(t) = \operatorname{Im} w(t)$, $u_t = \partial u / \partial t$ и $v_t = \partial v / \partial t$. Здесь t – параметр вдоль кривой, который мы примем равным длине дуги. Кроме того, мы предполагаем, что все пересечения кривой с границей $\partial\Pi = \{w : u = \frac{1}{4a^2}v^2 - a^2\}$ области Π трансверсальны (подробнее см. [14]). Пусть $I = \{t : w(t) \in \Pi\}$ – множество значений параметра t , при которых кривая (19) принадлежит области Π (напомним, что Π , определенная неравенством (18), соответствует вещественным ρ, z , т. е. соответствует физическому пространству \mathbb{R}^3). Тогда, как легко показать (см. [14]), поверхность $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, соответствующая разрезу, является гладкой. Она задается параметрически в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \varphi) = \rho(t) \cos \varphi \mathbf{e}_x + \rho(t) \sin \varphi \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z, \quad t \in I, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (21)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты декартовых координат, причем

$$z(t) = -v(t)/2a, \quad \rho(t) = \sqrt{u(t) + a^2 - (v(t)/2a)^2}. \quad (22)$$

Соответствие между разрезом и антенной поясняет рис. 3.

Нормаль к \mathcal{S} мы задаем выражением

$$\mathbf{n}(t, \varphi) := \frac{\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi|} = \frac{-z_t \cos \varphi \mathbf{e}_x - z_t \sin \varphi \mathbf{e}_y + \rho_t \mathbf{e}_z}{\sqrt{\rho_t^2 + z_t^2}}. \quad (23)$$

Потребуем, чтобы разрез $w(t)$ пересекал параболу $\partial\Pi$ конечное число N раз, допуская $N = 0$. Тогда антенна \mathcal{S} имеет $\mathcal{N} = \lceil \frac{N+1}{2} \rceil$ компонент связности, где $\lceil \kappa \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq \kappa\}$ – округление κ до ближайшего целого числа в большую сторону. Соответствующие пересечению значения параметра t мы обозначим через $t_j < t_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, N-1$ (для них $\rho(t_j) = 0$). При этом множество I представляет собой объединение непересекающихся интервалов. Если N нечетно, $N = 2M + 1$, то

$$I = [0, t_1] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_{2M}, t_{2M+1}], \quad t_{2M+1} < +\infty, \quad (24)$$

и антенна компактна. Если N четно, $N = 2M$, то

$$I = [0, t_1] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_{2M}, +\infty), \quad \text{или} \quad I = [0, +\infty), \quad (25)$$

и антенна некомпактна.

Мы предположим далее, что в случае (25) существует предел

$$\chi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\rho(t)}{z(t)}. \quad (26)$$

3.2. Фиксация ветви корня. Ветвь корня (2) мы выберем так, чтобы при $z \rightarrow +\infty$ параксиальное поле (см., например, [15]) представляло собой уходящую волну при временной зависимости $e^{i\omega t}$. Для этого зафиксируем ветвь условием $\operatorname{Re} R_* \rightarrow +\infty$ при уходе на бесконечность вдоль кривой $\partial\Pi$ в нижней полуплоскости переменной w (что, как легко понять из (18), соответствует уходу на бесконечность вдоль оси z в положительном направлении). При таком выборе ветви в параксиальной области функция G имеет при $z \rightarrow +\infty$ вид уходящего гауссова пучка, см. подробнее [14],

$$G \sim \frac{1}{z - ia} \exp \left\{ i \left(kz + \frac{kz\rho^2}{2(z^2 + a^2)} \right) + ka \left(1 - \frac{ka\rho^2}{2(z^2 + a^2)} \right) \right\}. \quad (27)$$

Итак, ветвь квадратного корня (2) на комплексной плоскости w (17) в выбрана.

Введем некоторые обозначения, которые понадобятся нам позже. Формулы (21), (23) позволяют ввести вблизи поверхности \mathcal{S} локальные координаты (t, φ, n) ,

$$\mathbf{r}(t, \varphi, n) := \mathbf{r}(t, \varphi) + \mathbf{n}, \quad (28)$$

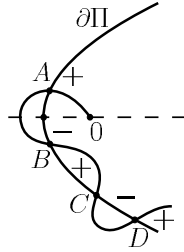


Рис. 4. К определению σ в случае (30b).

где n – расстояние до поверхности, которое может быть обоих знаков. Обозначим граничное значение функции R_* при $n = -0$ через

$$R_0(t) := R_*(\mathbf{r}(t, \varphi, n))\big|_{n=-0} = -R_*(\mathbf{r}(t, \varphi, n))\big|_{n=+0}. \quad (29)$$

Таким образом, $R_0(t)$ – это предельное значение R_* на левом берегу разреза $w(t)$ (мы считаем кривую $w = w(t)$ ориентированной в направлении роста параметра t).

Особую роль в дальнейшем будет играть первая компонента связности $\mathcal{S}_1, \mathcal{C} \subset \mathcal{S}_1$, антенны \mathcal{S} . Как следует из (24)–(25), \mathcal{S}_1 соответствует значениям параметра t из промежутка $t \in [0, \tau_*]$, где τ_* определяется как

$$\tau_* = +\infty, \quad \text{если } \{w : w = w(t)\} \cap \partial\Pi = \emptyset, \quad (30a)$$

$$\tau_* = t_1, \quad \text{если } \{w : w = w(t)\} \cap \partial\Pi \neq \emptyset. \quad (30b)$$

В случае (30a) \mathcal{S}_1 не пересекает ось z , а в случае (30b) – пересекает ее. В точке τ_* запишем R_0 в виде

$$R_0(\tau_*) = \sqrt{|w(\tau_*)|} e^{\frac{i}{2} \arg w(\tau_*) + i\pi m} = \sigma \sqrt{|w(\tau_*)|} e^{\frac{i}{2} \arg w(\tau_*)}, \quad (31)$$

где значение $m = 0, 1$ и, соответственно, значение $\sigma = \pm 1$ однозначно определяются для каждого разреза сделанным выше выбором ветви.

В важных случаях диска (см. п. 2) и отверстия в плоскости $z = 0$ (последний случай подробно разбирался в [14]), соответственно, $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$.

Поясним правило определения σ в зависимости от разреза. В случае (30a), поскольку R_0 есть предельное значение R_* на левом берегу разреза, из (31) сразу следует, что $\sigma = -1$.

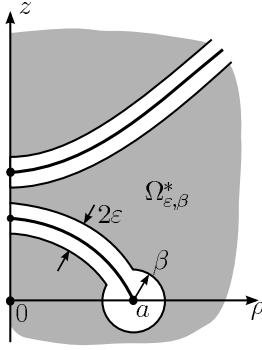


Рис. 5. Сечение области $\Omega_{\epsilon, \beta}$, соответствующей рис. 2.

В случае (30b) ответ зависит от характера пересечений разреза и параболы $\partial\Pi$. Рассмотрим точки пересечения $w(t_j)$ разреза с параболой, для которых $z(t_j) \geq z(\tau_*)$ (точки A, B, C, D на рис. 4, иллюстрирующем наше рассмотрение на частном примере). Очевидно, что в точках $w \in \partial\Pi$ (что соответствует оси z) $R_* = \sqrt{w}$ принимает значения

$$R_* = \pm(z - ia). \tag{32}$$

Для точек на $\partial\Pi$, отвечающих значениям $z > \max_{j=1, \dots, N} z(t_j)$ сделанный нами выбор ветви дает $R_* = z - ia$. Будем двигаться вдоль параболы $\partial\Pi$ от точки, отвечающей $z = \max_{j=1, \dots, N} z(t_j)$, (точка D на рис. 4) к точке $w(\tau_*)$ (точка A на рис. 4). При каждом пересечении параболой разреза знак в правой части (32) переменится на противоположный. Таким образом, если число точек, удовлетворяющих условию $z(t_j) \geq z(t_1)$ четно, то на левом берегу разреза мы получим $R_* = -(z - ia)$, откуда $\sigma = -1$. Если же число таких точек нечетно, то $\sigma = 1$.

3.3. Скачки поля на антенне. Как прежде, представим F в виде (10), где область $\Omega_{\epsilon, \beta}$ выглядит, как изображено на рис. 5. Переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, получим

$$(F, \Psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \iint_{S \setminus C_\beta} ([G_n]_S \psi - [G]_S \psi_n) d\Sigma + \iint_{T_\beta} (G_\nu \Psi - G \Psi_\nu) dS \right\}. \tag{33}$$

Здесь первый интеграл в (33) берется по поверхности \mathcal{S} с исключенной окрестностью края,

$$\mathcal{C}_\beta = \mathcal{S} \cap \{\mathbf{r} : (\rho - a)^2 + z^2 \leq \beta^2\}. \quad (34)$$

Далее, dS и $d\Sigma = |\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi| dt d\varphi$ – элементы площади тора \mathcal{T}_β и поверхности \mathcal{S} , соответственно, G_ν – производная G по внешней нормали ν к тору \mathcal{T}_β , а

$$\psi(t, n, \varphi) = \Psi(\mathbf{r}(t, \varphi, n)). \quad (35)$$

Скачки на антенне задаются выражениями

$$\begin{aligned} [G]_{\mathcal{S}} &:= G|_{n=+0} - G|_{n=-0} = -2 \frac{\cos(kR_0)}{R_0}, \\ [G_n]_{\mathcal{S}} &= 2 \left(k \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} + \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} \right) (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (36)$$

где R_0 – предельное значение R_* , определенное в (29),

$$\mathbf{r}_*(t, \varphi) := \mathbf{r}(t, \varphi) - ia\mathbf{e}_z = x(t, \varphi)\mathbf{e}_x + y(t, \varphi)\mathbf{e}_y + (z(t) - ia)\mathbf{e}_z. \quad (37)$$

3.4. Регуляризация интегралов в (33). Подставив (36) в (33), получим под знаком предела выражение

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \iint_{\mathcal{T}_\beta} (G_\nu \Psi - G \Psi_\nu) dS + 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\cos(kR_0)}{R_0} \psi_n(t, 0, \varphi) d\Sigma \\ &+ 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \left(k \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} + \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} \right) (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \psi(t, 0, \varphi) d\Sigma. \end{aligned}$$

Последний интеграл в этом выражении при $\beta \rightarrow 0$ расходится и нуждается в регуляризации на первой компоненте связности \mathcal{S}_1 поверхности \mathcal{S} . В итоге получаем выражение $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{reg} + \mathfrak{J}_{sing}$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{reg} &:= 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\cos(kR_0)}{R_0} \psi_n d\Sigma + 2k \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \psi d\Sigma \\ &+ 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1} \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \psi d\Sigma \\ &+ 2 \iint_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\cos(kR_0) \psi(t, 0, \varphi) - \psi(0, 0, \varphi)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{I}_{\text{sing}} := \iint_{\mathcal{T}_\beta} (G_\nu \Psi - G \Psi_\nu) dS + 2 \iint_{S_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\psi(0, 0, \varphi)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma. \quad (38)$$

Перейдем к исследованию интегралов, входящих в $\mathfrak{I}_{\text{sing}}$.

3.5. Интеграл по тору. Рассмотрим

$$\mathfrak{I}_\mathcal{T} := \iint_{\mathcal{T}_\beta} (G_\nu \Psi - G \Psi_\nu) dS. \quad (39)$$

Введем на торе \mathcal{T}_β координаты (θ, φ) ,

$$\rho - a = \beta \cos \theta, \quad z = -\beta \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad (40)$$

$\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Здесь $\theta_0 \in (-2\pi, 0]$ — значение θ , задающее в системе координат (θ, φ) окружность $\mathcal{T}_\beta \cap \mathcal{S}$, по которой пересекаются \mathcal{T}_β и \mathcal{S} . В системе координат (t, φ) на поверхности \mathcal{S} , эта окружность задается некоторым $t = \tau_\beta$, зависящим от β , причем $\tau_\beta \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$. Из (29), (40) следует, что

$$R_*|_{\theta=\theta_0} = R_0(\tau_\beta). \quad (41)$$

Из (31), (40) видно, что

$$R_* = \sqrt{2a\beta e^{i\theta} + \beta^2} = \sigma \sqrt{2a} e^{i\frac{\theta}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} + O(\beta), \quad (42)$$

откуда легко получаются оценки

$$G = \frac{\sigma e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2a}} \beta^{-\frac{1}{2}} + O(1), \quad G_\nu = G_\beta = -\frac{\sigma e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\sqrt{2a}} \beta^{-\frac{3}{2}} + O(\beta^{-\frac{1}{2}}),$$

подставляя которые в (39), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_\mathcal{T} &= -2\pi a \sigma \beta^{-1/2} \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\sqrt{2a}} \bar{\phi}(a + \beta \cos \theta, -\beta \sin \theta) d\theta + O(\beta^{\frac{1}{2}}) \\ &= 2\pi i \sigma \sqrt{2a} \bar{\phi}(a, 0) e^{-i\frac{\theta_0}{2}} \beta^{-\frac{1}{2}} + O(\beta^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

где $\bar{\phi}$ определено в (13). Используя (35), (41), (42), мы можем переписать это выражение в виде

$$\mathfrak{I}_\mathcal{T} = \frac{4\pi i a \bar{\phi}(a, 0)}{\sigma \sqrt{2a} e^{i\frac{\theta_0}{2}} \beta^{\frac{1}{2}}} + O(\beta^{\frac{1}{2}}) = 4\pi i a \bar{\psi}(0, 0) R_0^{-1}(\tau_\beta) + O(\beta^{\frac{1}{2}}). \quad (43)$$

3.6. Интеграл по антенне без окрестности края. Рассмотрим теперь второй интеграл в правой части (38),

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} := 2 \iint_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\psi(0, 0, \varphi)(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3} d\Sigma. \quad (44)$$

Из (21), (23) и (37) видно, что

$$(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) = \frac{(z - ia)\rho_t - \rho z_t}{\sqrt{\rho_t^2 + z_t^2}}, \quad d\Sigma = |\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi| dt d\varphi = \rho \sqrt{\rho_t^2 + z_t^2} dt d\varphi.$$

Поверхность $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta$ задается значениями параметра $t \in [\tau_\beta, \tau_*]$, где τ_β – значение параметра t , соответствующее линии пересечения поверхности \mathcal{S} с тором \mathcal{T}_β , а τ_* определено в (30). Интеграл (44) принимает вид

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} = 4\pi \bar{\psi}(0, 0) \int_{\tau_\beta}^{\tau_*} \frac{(z - ia)\rho\rho_t - \rho^2 z_t}{R_0^3} dt, \quad (45)$$

где

$$\bar{\psi}(t, n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t, n, \varphi) d\varphi. \quad (46)$$

Заметим, что

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} = 4\pi \bar{\psi}(0, 0) (J(\tau_*) - J(\tau_\beta)), \quad (47)$$

где

$$J(t) := -\left. \frac{\partial R_*}{\partial z} \right|_{n=0} = -\frac{z(t) - ia}{R_0(t)}. \quad (48)$$

В точке $t = \tau_\beta$ (поскольку $z(0) = 0$) из (48) следует

$$J(\tau_\beta) = iaR_0^{-1}(\tau_\beta) (1 + O(\tau_\beta)). \quad (49)$$

В точке $t = \tau_*$ возможны два варианта. В случае (30b), когда \mathcal{S} пересекает ось z , $R_0(\tau_*) = \sqrt{(z(t_1) - ia)^2} = \sigma(z(t_1) - ia)$, где σ определено в п. 3.2. Тогда

$$J(t_1) = -\sigma. \quad (50)$$

В случае (30a), когда \mathcal{S} не пересекает ось z , записывая (48) в виде

$$J(t) = -\frac{z(t) - ia}{\sqrt{\rho^2(t) + (z(t) - ia)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2(t)/(z(t) - ia)^2}},$$

и устремляя t к бесконечности, получим

$$J(+\infty) = -\frac{\sigma}{\sqrt{1+\chi^2}}, \quad (51)$$

где χ определено в (26). В частности, для подробно рассмотренного в [14] случая отверстия в плоскости, $\chi = \infty$ и $J(+\infty) = 0$.

Как можно легко увидеть из (49), $-4\pi \bar{\psi}(\mathbf{r})|_{t=0} J(\tau_\beta)$ сокращается с (43) и, таким образом,

$$\mathfrak{J}_{\text{sing}} = -4\pi \tilde{\sigma} \bar{\psi}(0, 0) + O(\tau_\beta^{1/2}), \quad (52)$$

где

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{если } N \geq 1, \\ \frac{\sigma}{\sqrt{1+\chi^2}}, & \text{если } N = 0, \end{cases} \quad (53)$$

где N – число пересечений антенны \mathcal{S} с осью z (см. (24)–(25)).

§4. ТОКИ НА АНТЕННЕ

4.1. Токи на антенне как функционалы на пространстве основных функций. Нами найдено распределение тока F на антенне \mathcal{S} (см. (4)). Значение функционала F на основной функции $\psi(t, n, \varphi)$ равно

$$\begin{aligned} (F, \Psi) &= -4\pi \tilde{\sigma} \bar{\psi}(0, 0) + 2 \iint_S \frac{\cos(kR_0)}{R_0} \psi_n d\Sigma \\ &+ 2k \iint_S \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \psi d\Sigma \\ &+ 2 \iint_{S \setminus \mathcal{S}_1} \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \psi d\Sigma \\ &+ 2 \iint_{\mathcal{S}_1} \frac{\cos(kR_0) \psi(t, 0, \varphi) - \psi(0, 0, \varphi)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (54)$$

где параметр $\tilde{\sigma}$ определен в (53), функция R_0 определена в (29), а $(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})$ – скалярное произведение вектор-функции \mathbf{r}_* (см. (37)) и вектора нормали (см. (23)).

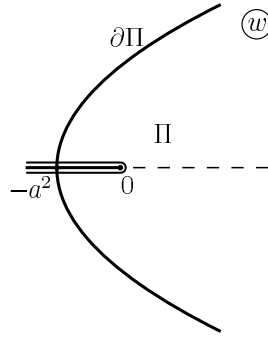


Рис. 6. Разрез для антенны \mathcal{S} , показанной на рис. 1.

4.2. Явный вид токов. Введем, следуя [20], обобщенные функции

$$(f(\mathbf{r})\delta_{\mathcal{S}}, \Psi(\mathbf{r})) := \iint_{\mathcal{S}} f\Psi d\Sigma, \quad \left(\frac{\partial}{\partial n}(g(\mathbf{r})\delta_{\mathcal{S}}), \Psi(\mathbf{r})\right) := -\iint_{\mathcal{S}} g\frac{\partial\Psi}{\partial n} d\Sigma,$$

обозначающие потенциалы простого и двойного слоя на поверхности \mathcal{S} с плотностями f и g , соответственно, а также

$$(\delta_{\mathcal{C}}, \Psi(\mathbf{r})) := \int_0^{2\pi} \Psi(a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)d\varphi$$

и

$$\left(\left\{\frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3}\right\}_{\mathcal{S}_1}, \Psi(\mathbf{r})\right) := \iint_{\mathcal{S}_1} \frac{\Psi(\mathbf{r}(t, 0, \varphi)) - \Psi(\mathbf{r}(0, 0, \varphi))}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma.$$

Тогда ответ запишется в виде

$$\begin{aligned} F = & -2\tilde{\sigma}\delta_{\mathcal{C}} - 2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos(kR_0)}{R_0}\delta_{\mathcal{S}}\right) + 2k\frac{\sin(kR_0)}{R_0^2}(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})\delta_{\mathcal{S}} \\ & + 2\frac{\cos(kR_0)}{R_0^3}(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})\delta_{\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_1} + 2\cos(kR_0)\left\{\frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3}\right\}_{\mathcal{S}_1}. \end{aligned} \tag{55}$$

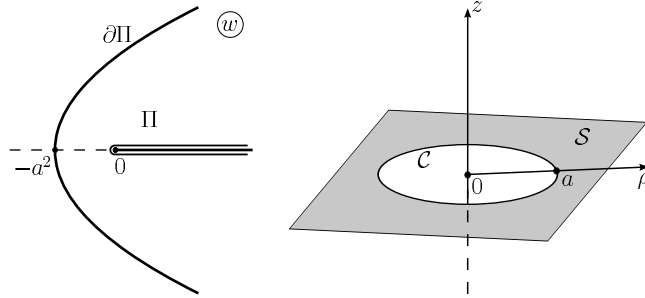


Рис. 7. Разрез (61) и соответствующая ему антенна \mathcal{S} .

§5. ПРИМЕРЫ

5.1. Антенна – диск (6). Для рассмотрения этого случая выбираем разрез в виде (см. рис. 6)

$$u(t) = -t, \quad v(t) = 0, \quad t \in [0, a^2]. \quad (56)$$

Из (22) получаем, что $\rho(t) = \sqrt{a^2 - t} \geq 0$, $z(t) = 0$. Таким образом, как видно из (21), поверхность \mathcal{S} представляет собой диск, рассмотренный в п. 2 (см. рис. 1). Нормаль (23) примет вид $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$, откуда $(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) = ia$. Фиксируя ветвь согласно п. 3.2, получим, что

$$R_0 = R_*|_{n=-0} = R_*|_{z=+0} = -ir_1, \quad (57)$$

где функция r_1 определена в (7). Здесь $\tilde{\sigma} = \sigma = 1$.

Выражение (55) примет вид

$$F = -2\delta_c + 2i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\text{ch}(kr_1)}{r_1} \delta_S \right) - 2ka \frac{\text{sh}(kr_1)}{r_1^2} \delta_S + 2a \text{ch}(kr_1) \left\{ \frac{1}{r_1^3} \right\}_S. \quad (58)$$

Введя функцию Хевисайда

$$H(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \geq 0, \\ 0, & \text{если } X < 0, \end{cases} \quad (59)$$

мы можем записать

$$\delta_S = H(a - \rho)\delta(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} (g(\mathbf{r})\delta_S) = g(\mathbf{r})H(a - \rho)\delta'(z). \quad (60)$$

5.2. Антенна – плоскость $z = 0$ с круглым отверстием. Выберем теперь разрез в виде (см. рис. 7)

$$u(t) = t, \quad v(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \quad (61)$$

Тогда $\rho(t) = \sqrt{t + a^2}$, $z(t) = 0$, а нормаль задается выражением $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, откуда $(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) = -ia$. Фиксируя ветвь согласно п. 3.2, получим

$$R_0 = R_*|_{n=-0} = R_*|_{z=-0} = -r_0, \quad r_0 = \sqrt{\rho^2 - a^2} \geq 0. \quad (62)$$

Теперь $\sigma = -1$, $\tilde{\sigma} = 0$. Выражение (55) примет вид

$$F = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\cos(kr_0)}{r_0} \delta_S \right) + 2ika \frac{\sin(kr_0)}{r_0^2} \delta_S + 2iacos(kr_0) \left\{ \frac{1}{r_0^3} \right\}_S, \quad (63)$$

где можно записать

$$\delta_S = H(\rho - a)\delta(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} (g(\mathbf{r})\delta_S) = g(\mathbf{r})H(\rho - a)\delta'(z). \quad (64)$$

Этот случай подробно разобран независимым образом в [14].

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вполне аналогично вычисляются токи на антенне для нестационарных, мультипольных и других обобщений решения (1).

В [15] была высказана мысль о том, что локализованные решения, возникающие при разделении переменных в уравнении Гельмгольца, не удовлетворяют ему во всем пространстве. Настоящая статья (наряду с исследованиями [14] и [7], посвященными близким вопросам и работой [21], касающейся сфероидальных функций) служит ей подтверждением.

Авторы признательны Василию Михайловичу Бабичу, Марии Гонсалес, Джерри Кейзеру, Раулю Маййо и Алексею Попову за полезные обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Измestьев, *Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве*. — Изв. вузов. Радиопизика **13**, No. 9 (1970), 1380–1388.
2. G. A. Deschamps, *Gaussian beam as a bundle of complex rays*. — Electron. Lett. **7**, No. 23 (1971), 684–685.
3. L. B. Felsen, *Complex-source-point solutions of the field equations and their relation to the propagation and scattering of Gaussian beams*. — In: Symposia Matematica, Istituto Nazionale di Alta Matematica **18** (1976), Academic Press, London, pp. 40–56.

4. K. Luk, P. Yu, *Generation of Hermite–Gaussian beam modes by multipoles with complex source points*. — J. Opt. Soc. Amer. A **2**, No. 11 (1985), 1818–1820.
5. M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, *Higher-order complex source for elegant Laguerre–Gaussian waves*. — Opt. Lett. **29**, No. 19 (2004), 2213–2215.
6. R. Mahillo-Isla, M. J. González-Morales, C. Dehesa-Martínez, *Diffraction of 2D complex beams by a perfect conductor half-plane a spectral approach*. — In: Proc. Days on Diffraction'2007, St.Petersburg University Press, SPb, 2007, pp. 67–72.
7. А. М. Тагирджанов, “Комплексный источник” в двумерном пространстве. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 176–186.
8. S. Y. Shin, L. B. Felsen, *Gaussian beam modes by multipoles with complex points sources*. — J. Opt. Soc. Amer. **67**, No. 5 (1977), 699–700.
9. E. Heyman, L. B. Felsen, *Complex-source pulsed-beam fields*. — J. Opt. Soc. Amer. A **6**, No. 6 (1989), 806–817.
10. E. Heyman, *Complex source pulsed beam representation of transient radiation*. — Wave Motion **11**, No. 4 (1989), 337–349.
11. А. М. Тагирджанов, А. П. Киселев, *Complexified spherical waves and their sources in the physical space*. — In: Progress in Electromagnetics Research Symposium PIERS Proceedings, Stockholm 2013 (2013), pp. 270–273.
12. M. J. González-Morales, R. Mahillo-Isla, C. Dehesa-Martínez, E. Gago-Ribas, *Complex point source for the 3D Laplace operator*. — In: Progress in Electromagnetics Research **127** (2011), pp. 445–459.
13. P. E. Appell, *Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes. (Extrait d’une lettre adressée à Mr. F. Klein)*. — Math. Annalen **30** (1887), 155–156.
14. А. М. Тагирджанов, А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, “Complex source” wavefields: sources in real space. — J. Phys. A: Math. Theor. **44**, No. 42 (2011), pap. 425203.
15. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (Обзор)*. — Оптика и Спектроскопия **102**, No. 4 (2007), 661–681.
16. G. Kaiser, *Complex-distance potential theory, wave equations, and physical wavelets*. — Math. Methods Appl. Sci. **25** (2002), 1577–1588.
17. G. Kaiser, *Physical wavelets and their sources: real physics in complex spacetime*. — J. Phys. A: Math. Gen. **36**, No. 30 (2003), R291–R338.
18. А. М. Тагирджанов, А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, *Complex source: Singularities in real space*. — In: Progress in Electromagnetics Research Symposium PIERS Proceedings, Moscow (2009), pp. 1527–1530.
19. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, М., 1959.
20. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.
21. R. Boyack, J. Lekner, *Non-existence of separable spheroidal beams*. — J. Opt. **13**, No. 8 (2011), pap. 085701.

Tagirdzhanov A. M., Blagovestchenskii A. S., Kiselev A. P. Time-harmonic “complex source” wavefields and their sources in real space.

The paper concerns the complexified Green function of the 3D Helmholtz equation in the free space, which is interesting as an exact solution demonstrating Gaussian-beam behavior. This function involves a square root and satisfies an inhomogeneous Helmholtz equation, the right-hand side of which depends on the cut and on the branch of the root. We deal with the explicit description of this generalized function.

Санкт-Петербургский государственный
университет, физический факультет,
Ульяновская ул. д. 3, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: aztagr@gmail.com
ablagoreshhenskij@yandex.ru
aleksei.kiselev@gmail.com

Поступило 13 января 2014 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru