Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 422, 2014 г.

С. А. Назаров

РАСКРЫТИЕ ЛАКУНЫ ВОКРУГ ЗАДАННОЙ ТОЧКИ СПЕКТРА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА ПУТЕМ ПОЛОГИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ СТЕНОК

§1. Введение

1.1. Мотивировка. Периодические волноводы характеризуются возможностью появления в спектре *лакун*, т.е. интервалов на положительной вещественной полуоси $\mathbb{R}_+$, свободных от спектра σ, но имеющих концевые точки на σ. Лакуна препятствует распространению волн в соответствующем частотном диапазоне, и этот эффект используется при проектировании волновых фильтров и демпферов, а также приборов и их деталей иного назначения. Основной вопрос *инженерии чересполосного (зонного) спектра*[1] таков: как при помощи изменения формы волновода, точнее его ячейки периодичности, создать лакуну заданной ширины в предписанном месте спектра? Настоящая работа частично отвечает на вторую часть вопроса, устанавливая, что посредством периодического возмущения стенок цилиндрического волновода можно образовать лакуну в окрестности каждой точки некоторого интервала в исходном спектре, причем одной из целей становится максимальное увеличение длины упомянутого интервала. Применяются асимптотические методы анализа собственных чисел модельной задачи на ячейке периодичности, и поэтому обнаруженные лакуны оказываются *малыми*. В принципе такую открытую лакуну можно увеличивать путем последующей вариации стенок уже периодического волновода, однако автор не знает публикаций в этом

Ключевые слова: спектральная задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа, периодический волновод, лакуны, расцепление спектральных сегментов, асимптотический анализ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00348).

[1]Band-gap engineering в английской терминологии

направлении, имеющем отношение к проблеме *оптимизации форм*[2]. В частности поэтому первая часть сформулированного вопроса остается нерешенной полностью.

Асимптотические методы позволяют исследовать спектральные лакуны в тех ситуациях, когда соответствующая предельная (положили малый геометрический параметр равным нулю) задача допускает в каком-то смысле явное решение. Нетрудно указать две такие ситуации: во-первых, предельный волновод является цилиндром и возможно разделение переменных и, во-вторых, в пределе волновод распадается на периодическое семейство идентичных ячеек, на которых задача приобретает дискретный спектр (см. рис. 1 и 2 соответственно). Как уже упоминалось, в первом случае узкими оказываются лакуны. Во втором же малыми становятся сами спектральные сегменты, а интервалы между ними – лакуны – заполняют "почти всю" полуось $\mathbb{R}_+$ (см. работы [1–3] и др.). Таким образом, вторая ситуация в принципе позволяет полностью ответить на основной вопрос, указанный в предыдущем абзаце. Тем не менее конструкция волновода на рис. 2, а – массивные ячейки, соединенные тонкими перемычками – непригодна для многих практических целей, так как в подобных волноводах затруднены *любые* волновые процессы. Кроме того, обсуждаемый волновод подвержен разрушению: вблизи перемычки возникает явление *пограничного слоя*, которое провоцирует концентрацию напряжений в твердом теле или на стенках, ограничивающих газообразную или жидкую среду.

Именно приведенные соображения заставляют для образования лакун обратиться к регулярным или сингулярным локализованным возмущениям цилиндрических волноводов.

1.2. Постановка спектральных задач. Пусть ω – область в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, $d \geqslant 2$, с гладкой (класса C^∞ для простоты) границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. В окрестности $\mathcal{V} \supset \partial\omega$ введем локальные координаты n, s, где n – ориентированное расстояние до $\partial\omega$ ($n > 0$ на множестве $\mathcal{V} \setminus \overline{\omega}$), а s – подходящий атлас на $(d-2)$-мерном подмногообразии $\partial\omega$. Пусть еще h – функция, гладкая и обращающаяся в нуль при $z = 0$ и $z = l > 0$ (опять-таки для простоты). Определим d-мерный цилиндр $\Omega^0 = \omega \times \mathbb{R} \ni x = (y, z)$ с поверхностью $\Gamma^0 = \partial\omega \times \mathbb{R}$, а также l-периодическое возмущение этой

[2]Shape optimization в английской терминологии.

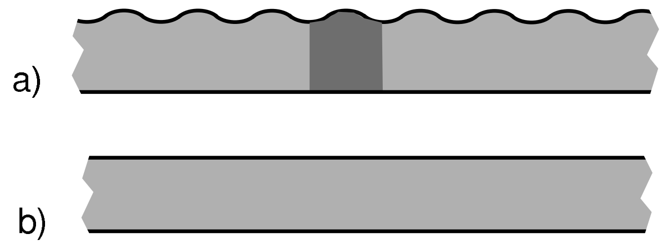

Рис. 1. Цилиндрический волновод (b) и волновод со слабо возмущенной периодической поверхностью (a). Ячейка периодичности глубоко тонирована (a).

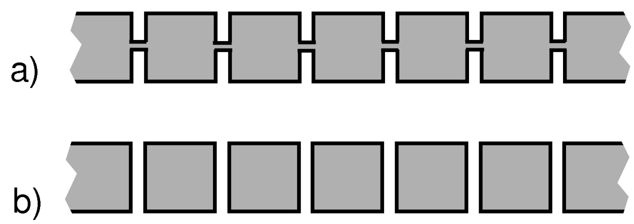

Рис. 2. Периодический волновод (a), распадающийся в пределе на периодическое семейство разъединенных ячеек (b).

поверхности

$$\Gamma^\varepsilon = \{z \in \mathcal{V} \times \mathbb{R} : n = \varepsilon h(s, z)\}; \tag{1.1}$$

здесь ε – малый положительный параметр, а профильную функцию h считаем продолженной на цилиндрическую поверхность Γ^0 по периодичности относительно продольной переменной z.

В области Ω^ε, ограниченной поверхностью (1.1), рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon, \tag{1.2}$$

снабженное краевым условием Дирихле

$$u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \Gamma^\varepsilon, \tag{1.3}$$

или Неймана

$$\partial_{\nu^\varepsilon} u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \Gamma^\varepsilon. \tag{1.4}$$

При этом Δ – оператор Лапласа, λ^ε – спектральный параметр, и $\partial_{\nu^\varepsilon}$ – производная вдоль внешней нормали, т.е. $\partial_{\nu^\varepsilon} = \nu^\varepsilon \cdot \nabla$, где $\nabla = \mathrm{grad}$, точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$, а ν^ε – единичный вектор внешней нормали к границе $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$.

Для того чтобы пользоваться опубликованными результатами, удобно произвести масштабирование и сделать период l единичным, а координаты и геометрические параметры – безразмерными. Последствия масштабирования будут обсуждаться в п. 3 §2, п. 4, 5 §3 и п. 3 §4, а также в п. 5 §1.

1.3. Спектры задач. Вариационная формулировка краевых задач (1.2), (1.3) и (1.2), (1.4) апеллирует к интегральному тождеству [4]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}, \quad v^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon), \tag{1.5}$$

где $(\ ,\ )_{\Omega^\varepsilon}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega^\varepsilon)$, а $\mathcal{H}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = H^1(\Omega^\varepsilon)$ – пространство Соболева в случае краевых условий Неймана, но в случае условий Дирихле $\mathcal{H}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ – подпространство функций $v^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, обращающихся в нуль на Γ^ε (ср. равенство (1.3)). Поскольку полуторалинейная эрмитова форма из левой части (1.5) положительна и замкнута на $\mathcal{H}^\varepsilon$, вариационной задаче (1.5) ставится [5, §10.1] в соответствие самосопряженный положительный оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega^\varepsilon)$. При необходимости оператор обозначаем $\mathcal{A}^\varepsilon_D$ или $\mathcal{A}^\varepsilon_N$, отмечая символом D или N тип краевых условий. По понятной причине оператор $\mathcal{A}^\varepsilon_D$ положительно определен.

Спектры $\sigma^\varepsilon_D \subset \mathbb{R}_+$ и $\sigma^\varepsilon_N \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ введенных операторов $\mathcal{A}^\varepsilon_D$ и $\mathcal{A}^\varepsilon_N$ объявляются спектрами вариационных задач (1.5) на пространствах $\mathcal{H}^\varepsilon_D(\Omega^\varepsilon) = \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ и $\mathcal{H}^\varepsilon_N(\Omega^\varepsilon) = H^1(\Omega^\varepsilon)$ или краевых задач Дирихле (1.2), (1.3) и Неймана (1.2), (1.4) соответственно. Известно (см., например, обзоры [6–8], монографии [9–11] и др. публикации), что спектр σ^ε принимает вид

$$\sigma^\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^\varepsilon_n \tag{1.6}$$

и состоит из *спектральных сегментов*

$$B^\varepsilon_n = \left\{ \lambda^\varepsilon = \Lambda^\varepsilon_n(\eta) \,\middle|\, \eta \in [0, 2\pi) \right\}, \tag{1.7}$$

построенных по членам образованной при учете кратностей последовательности

$$0 \leqslant \Lambda_1^\varepsilon(\eta) \leqslant \Lambda_2^\varepsilon(\eta) \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_n^\varepsilon(\eta) \leqslant \ldots \to +\infty \tag{1.8}$$

собственных чисел модельной задачи на ячейке периодичности (глубоко тонирована на рис. 1, а)

$$\varpi^\varepsilon = \{(y,z) \in \Omega^\varepsilon : z \in (0,1)\}. \tag{1.9}$$

Упомянутая модельная задача получается из исходной задачи в волноводе Π^ε при помощи преобразования Гельфанда [12] (см. также [13] и [10, 11]), и в случае задачи Дирихле (1.2), (1.3) принимает вид

$$-\Delta_y U^\varepsilon(\eta; y, z) - (\partial_z + i\eta)^2 U^\varepsilon(\eta; y, z) = \Lambda^\varepsilon(\eta) U^\varepsilon(\eta; y, z), \quad (y,z) \in \varpi^\varepsilon, \tag{1.10}$$

$$U^\varepsilon(\eta; y, z) = 0, \quad (y,z) \in \gamma^\varepsilon, \tag{1.11}$$

$$U^\varepsilon(\eta; y, 1) = U^\varepsilon(\eta; y, 0), \quad \partial_z U^\varepsilon(\eta; y, 0) = \partial_z U^\varepsilon(\eta; y, 1), \quad y \in \omega. \tag{1.12}$$

В задаче Неймана (1.2), (1.4) вместо условий (1.11) на боковой поверхности ячейки $\gamma^\varepsilon = \{(y,z) \in \Gamma^\varepsilon : z \in (0,1)\}$ ставятся условия

$$\partial_{\nu^\varepsilon} U^\varepsilon(\eta; y, z) + i\eta \nu_d^\varepsilon(y) U^\varepsilon(\eta; y, z) = 0, \quad (y,z) \in \gamma^\varepsilon. \tag{1.13}$$

При этом ν_d^ε – проекция вектора нормали ν^ε на ось $x_d = z$, а условия периодичности (1.12) назначены на торцах $\omega_1 = \omega \times \{1\}$ и $\omega_0 = \omega \times \{0\}$ ячейки (1.9). Подчеркнем, что последние формулы и значения 0 и 1 переменной z в условиях периодичности (1.12) обусловлены исключительно введенными ранее требованиями $h(s,z) = 0$ при $z = 0, l$ и $l = 1$.

Задача (1.10)–(1.12) допускает вариационную постановку

$$\begin{gathered}(\nabla_y U^\varepsilon(\eta;\cdot), \nabla_y V^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} + ((\partial_z + i\eta) U^\varepsilon(\eta;\cdot), (\partial_z + i\eta) V^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} \\ = \Lambda^\varepsilon(\eta)(U^\varepsilon(\eta;\cdot), V^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}, \quad V^\varepsilon \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}^\varepsilon(\varpi^\varepsilon),\end{gathered} \tag{1.14}$$

где $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}^\varepsilon(\varpi^\varepsilon) = \mathring{H}_{\mathrm{per}}^1(\varpi^\varepsilon; \gamma^\varepsilon)$ – подпространство функций $U^\varepsilon \in H^1(\varpi^\varepsilon)$, удовлетворяющих условию Дирихле (1.11) и первому (устойчивому по терминологии [14]) условию периодичности (1.12). Для задачи (1.10), (1.13), (1.12) интегральное тождество (1.14) ставится на подпространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}^\varepsilon(\varpi^\varepsilon) = H_{\mathrm{per}}^1(\varpi^\varepsilon) \subset H^1(\varpi^\varepsilon)$ – снимается требование $U^\varepsilon = 0$ на γ^ε. Подчеркнем, что обозначения Δ_y, ∂_z и $(\,,\,)_{\varpi^\varepsilon}$, использованные в соотношениях (1.10)–(1.14), вполне аналогичны введенным ранее и не допускают разночтений.

При вещественном параметре η полуторалинейная форма из левой части (1.14) становится эрмитовой и положительной, а значит, ввиду компактности вложения $H^1(\varpi^\varepsilon) \subset L_2(\varpi^\varepsilon)$ спектр этой вариационной задачи оказывается полностью дискретным и образует монотонную неограниченную последовательность (1.8) (см. [5, теоремы 10.1.5 и 10.2.2]). Функции

$$[0, 2\pi) \ni \eta \mapsto \Lambda_n^\varepsilon(\eta) \tag{1.15}$$

являются непрерывными (см., например, [15, гл. 9]) и 2π-периодическим (замены $\eta \mapsto \eta \pm 2\pi$ и

$$U^\varepsilon(\eta; y, z) \mapsto U^\varepsilon(\eta \pm 2\pi; y, z) = e^{\mp 2\pi i z} U^\varepsilon(\eta; y, z)$$

не сказываются на соотношениях (1.10)–(1.13)). Таким образом, множества (1.7) конечные, связные и замкнутые в самом деле.

Если $U^\varepsilon(\eta; \cdot)$ – решение задачи (1.10)–(1.12) с параметрами $\Lambda^\varepsilon(\eta)$ и $\eta \in [0, 2\pi)$, то, как нетрудно проверить, функция $(y, z) \mapsto e^{-2\pi i z} \overline{U^\varepsilon(\eta; y, z)}$ удовлетворяет той же задаче с прежним параметром $\Lambda^\varepsilon(\eta)$, но новым параметром $2\pi - \eta \in (0, 2\pi]$. Иными словами, графики функций (1.15) обладают симметрией относительно прямой $\{\eta = \pi\}$ параллельной оси ординат.

1.4. Структура статьи. В п. 3 следующего параграфа на основе результатов [16, 17] о задаче Дирихле в волноводе, полученном малым периодическим возмущением поверхности цилиндра, продемонстрировано, как решается вопрос об открытии лакуны вокруг заданной точки при определенных ограничениях. Сводка нужных результатов представлена в п. 2, предварительные построения – в п. 1 §2.

Алгоритмы построения асимптотики собственных чисел модельной задачи на регулярно возмущенной ячейке периодичности и, как следствие, процедура исследования лакун подробно изложены в §3 на примере задач Неймана и Дирихле для плоских волноводов – периодических возмущений полосы. Переход к двумерным задачам не меняет существо проблемы, но значительно упрощает формулы и делает изложение более простым, а результаты – более наглядными. Подчеркнем, что обоснование асимптотических разложений собственных чисел целиком следует схеме, разработанной в статье [16] и реализованной также в публикациях [18–20] и др. Поэтому и ввиду иной направленности данной работы в теоремах 3.1 и 3.2 оценки асимптотических остатков сформулированы без доказательств.

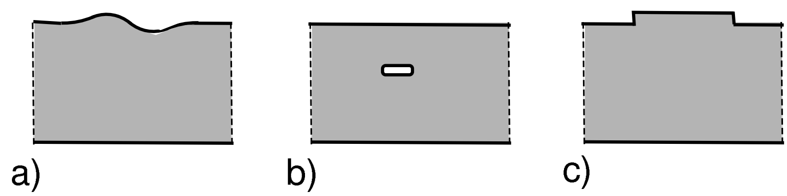

Рис. 3. Возмущение ячейки периодичности, регулярное (a), а также в виде малых полостей (b) или невысоких уступов (c).

В заключительном параграфе результаты о раскрытии лакун, полученные в п. 1–4 §3 для плоских волноводов, приспособлены к задаче Неймана в многомерном случае.

Для читателя, интересующегося исключительно проблемами инженерии чересполосного спектра, вполне достаточно ознакомиться с короткими вторым и четвертым параграфами.

Далее имеем дело только с регулярными возмущениями (1.1) границы (рис. 3, a), однако методы [16,19,20] позволяют сделать в точности такие же выводы для нерегулярных возмущений – в виде малых полостей (рис. 3, b) или, например, уступов (рис. 3, c).

1.5. Предварительное обсуждение результатов. Схема образования лакун, исследуемых при помощи асимптотического анализа, изображена на рис. 4, b и c. На первом (b) рисунке изображены дисперсионные кривые в прямом, невозмущенном, цилиндре, а на втором (c) – в периодическом, возмущенном. Первые три лакуны на рис. 4, c (считаем снизу) образовались благодаря расцеплению одиночных узлов (точки с абсциссами 0, 2π и одинаковыми ординатами отождествляются), а четвертая – благодаря синхронному расцеплению пары узлов, симметричных относительно вертикальной штрих-пунктирной линии. Раскрытие лакун первого типа описано, например, в [16–20], а второго – в [17,19,21,22].

Для открытия лакуны в спектре волновода Ω^ε с периодической поверхностью (1.1) помимо профильной функции h в распоряжении имеется период $l > 0$, который на рис. 4 взят единичным, но далее варьируется. Переход к произвольному периоду осуществляется посредством равномерного сжатия ($l < 1$) или растяжения ($l > 1$) координат

$x = (y, z)$. Графики на рис. 4 деформируются вдоль оси ординат с коэффициентом l^{-2}, соответственно растягиваются или сжимаются. Именно это обстоятельство используется для размещения лакуны вокруг заданной точки, а профильная функция остается в значительной степени произвольной, так как для образования лакуны требуется соблюдение лишь нескольких интегральных условий.

В следующих параграфах будет установлено, что лакуну всегда можно открыть вокруг любой точки

$$M \in (\mu_1, \mu_3], \tag{1.16}$$

где μ_j – собственные числа модельной задачи на сечении ω волновода Ω^0, т.е. пороги его непрерывного спектра. Если точка M близка к нижней грани спектра μ_1, то нужно сделать период большим, но при увеличении M подходящий период уменьшается. При $M = \mu_2$ сжатие графиков на рис. 4, b, происходит настолько, что первая лакуна может быть перекрытой вторым спектральным сегментом, т.е. перестать существовать. В случае $M > \mu_2$ такое перекрытие происходит всегда. В замечании 3.1 пояснено, почему рассмотрение второй и третьей лакун на рис. 4, c, никак не помогает достижению поставленной цели. Вместе с тем, при простом собственном числе μ_2 и параметре $M \in (\mu_2, \mu_3]$ на помощь приходит лакуна, образованная расщеплением парных узлов и изображенная на рис. 4, c, четвертой, однако при $M > \mu_3$ происходит и ее перекрытие. Если собственное число μ_2 кратное, то искомый результат для точек (1.16) получен уже на первом этапе. Поэтому далее всегда предполагаем, что μ_2 – простое.

При дальнейшем увеличении параметра M ферма на рис. 4, b, становится "более густой", и автор не знает возможно ли раскрытие лакун вокруг таких точек путем малых возмущений цилиндрической поверхности. Результаты работ [1–3] и приведенные выше комментарии к "распадающемуся в пределе" волноводу на рис. 2, a, показывают, что лакуну можно образовать около любой внутренней точки спектра цилиндрического волновода, однако возмущение стенок должно быть "большим". В этом плане особый интерес приобретает вывод асимптотических формул для размеров и положения лакун при малых возмущениях стенок периодических волноводов последующего итеративного их применения для сохранения лакун, но подходящего изменения формы ячейки. Еще раз упомянем, что работ в этом направлении опубликовано не было.

Известно, что при осреднении краевой задачи в области с быстро осциллирующей границей или частой сменой типа краевого условия получаются цилиндрический волновод и краевые условия с не зависящими от продольной переменной дифференциальными операторами. Иными словами, предельный спектр занимает луч целиком. Автор не знает, может ли упомянутый предельный переход, т.е. процедура осреднения, сопровождаться закрытием лакун в спектре допредельного периодического волновода, однако правдоподобная гипотеза отрицает такую возможность.

§2. Лакуны в спектре многомерной задачи Дирихле

2.1. Предельная задача в цилиндрическом волноводе. Преобразование Фурье в предельной для (1.2), (1.3) задаче Дирихле

$$-\Delta w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \Omega^0, \quad w(x) = 0, \quad x \in \Gamma^0, \tag{2.1}$$

приводит к следующей спектральной задаче на сечении цилиндра $\Omega^0 = \omega \times \mathbb{R}$:

$$-\Delta_y W(y) = \mu W(y), \quad y \in \omega, \quad W(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \tag{2.2}$$

Спектр задачи (2.2) является дискретным и образует монотонную неограниченную последовательность собственных чисел

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \leqslant \ldots \to +\infty, \tag{2.3}$$

составленную при учете их кратностей. Соответствующие собственные функции[3] $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(w_n, w_m)_\omega = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера, а $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – натуральный ряд. Первое собственное число $\mu_1 > 0$ простое, а собственную функцию W_1 можно взять положительной в области ω.

Незатухающая волна (2.5) позволяет построить сингулярную последовательность Вейля (см. книгу [5, §9.1], а также, например, обзор [8] по поводу деталей) и тем самым помещает точку (2.6) в существенный спектр задачи (2.1). Согласно общим результатам [23] (см. также [10,

[3] Благодаря предположению о гладкости границы $\partial\omega$ они бесконечно дифференцируемые вплоть до границы $\partial\omega$.

гл. 6]) задача в прямом цилиндре не может иметь собственных чисел бесконечной кратности, т.е. по определению существенный спектр совпадает с непрерывным. В итоге получаем, что спектр σ^0 задачи (2.1) является абсолютно непрерывным и представляет собой луч $[\mu_\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки[4] $\mu_\dagger = \mu_1 > 0$.

При любом $\zeta \in \mathbb{R}$ (двойственная переменная преобразования Фурье) осциллирующая или стоячая ($\zeta = 0$) волна

$$w_m(\zeta; y, z) = e^{i\zeta z} W_m(y) \tag{2.5}$$

удовлетворяет задаче (2.1) с параметром

$$\lambda = \mu_m + \zeta^2. \tag{2.6}$$

В периодическом волноводе Π^ε возникают волны Флоке. Именно, если $\{\Lambda_n^\varepsilon(\eta), U_n^\varepsilon(\eta; \cdot)\}$ – собственная пара $\{$*собственное число, собственная функция*$\}$ задачи (1.10)–(1.12), то функция

$$\Pi^\varepsilon \ni (y, z) \mapsto e^{i\eta z} U_n^\varepsilon(\eta; y, z)$$

удовлетворяет задаче (1.2), (1.3) с параметром $\lambda^\varepsilon = \Lambda_n^\varepsilon(\eta)$. Вместе с тем прямой цилиндр Ω^0 можно интерпретировать как 1-периодическое множество в направлении оси z, а значит, волна (2.5) допускает запись в форме Флоке

$$w_m(\zeta; y, z) = e^{i\eta z} U_p^0(\eta; y, z),$$

причем

$$\eta = \zeta - 2\pi q \in [0, 2\pi), \quad q = \max\left\{ j \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2\pi q \leqslant \zeta \right\}, \tag{2.7}$$

$$U_p^0(\eta; y, z) = e^{2\pi q i z} W_m(y), \tag{2.8}$$

где $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел, т.е. q – целая часть дроби $\dfrac{\zeta}{2\pi}$, а функция (2.8) остается периодической относительно продольной переменной. Нетрудно убедиться в том, что функция $U_p^0(\eta; \cdot)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} - \Delta_y U^0(\eta; y, z) - (\partial_z + i\eta)^2 U^0(\eta; y, z)& \\ = \Lambda^0(\eta) U^0(\eta; y, z), \quad (y, z) \in \varpi^0,& \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$U^0(\eta; y, z) = 0, \quad (y, z) \in \gamma^0 = \partial\omega \times (0, 1), \tag{2.10}$$

$$U^0(\eta; y, 1) = U^0(\eta; y, 0), \quad \partial_z U^0(\eta; y, 1) = \partial_z U^0(\eta; y, 0), \quad y \in \omega, \tag{2.11}$$

[4] Cut-off в английской терминологии.

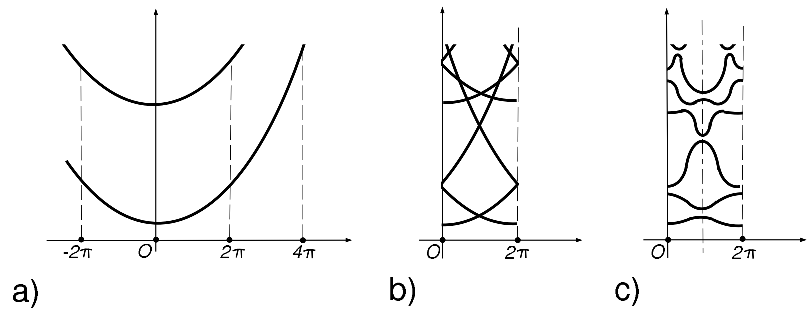

Рис. 4. Дисперсионные кривые (a), соответствующая ферма (b) и расщепление узлов фермы при возмущении ячейки периодичности (c).

с параметром

$$\Lambda_p^0(\eta) = \mu_m + (\eta + 2\pi q)^2. \tag{2.12}$$

Эта задача является предельной для (1.10)–(1.12) и поставлена в прямом конечном цилиндре $\varpi^0 = \omega \times (0,1)$.

Из-за возможности разделить переменные y и z в цилиндре ϖ^0 формулы (2.12), (2.8) дают все собственные пары задачи (2.9)–(2.11). Разумеется, в правых частях (2.12) и (2.8) фигурирует два индекса $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, и требуется еще упорядочить собственные числа в последовательность (1.8), занумеровав их одним индексом $p \in \mathbb{N}$.

Преобразование $\zeta \mapsto \eta$, указанное формулой (2.7), разбивает *дисперсионные* кривые (2.6) (на рис. 4, a приведены параболы с $m = 1$ и $m = 2$) на конечные дуги и собирает их в “ферму” Υ^0, изображенную на рис. 4, b и составленную из графиков кусочно-гладких непрерывных функций (2.12), заданных на полуинтервале $[0, 2\pi) \ni \eta$.

2. Сводка результатов. Возмущение боковой поверхности ячейки периодичности приводит к возмущению фермы Υ^0 и превращение ее в совокупность Υ^ε, вообще говоря, гладких графиков функций (1.15). Согласно формулам (1.6) и (1.7) спектр σ^ε задачи (1.2), (1.3) является проекцией множества Υ^ε на ось ординат (точно так же спектр $\sigma^0 = [\mu_\dagger, +\infty)$ задачи (2.1) – проекция на ось ординат фермы, изображенной на рис. 4, b). Распадение узлов фермы Υ^0 (вообще говоря, не всех) так, как указано на рис. 4, c, приводит к образованию лакун. Этот эффект в других геометрических ситуациях известен в физической литературе как *расцепление концов спектральных сегментов*[5] (см. [24, 25] и др.), однако впервые строгое математическое обоснование эффекта дано в работе [16] (см. также последующие статьи [17–22] и др.). Приведем несколько результатов [16, 17] о раскрытии лакун

$$G_n^\varepsilon = (g_{n-}^\varepsilon, g_{n+}^\varepsilon) = \Big(\max_{\eta\in[0,2\pi)} \Lambda_n^\varepsilon(\eta), \min_{\eta\in[0,2\pi)} \Lambda_{n+1}^\varepsilon(\eta) \Big) \tag{2.13}$$

в предположении, что

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_1 + 4\pi^2, \quad \mu_2 < \mu_3, \tag{2.14}$$

т.е., в частности, μ_2 – простое собственное число (как и всегда μ_1). Последнее условие запрещает симметрию сечения ω при $d \geqslant 3$, однако по понятной причине в двумерной ($d = 2$) задаче все числа из последовательности (2.3) простые. Отметим, что далее второе ограничение (2.14) придется усилить.

В последующих вычислениях различаем два случая

$$\mu_1 + \pi^2 < \mu_2 \tag{2.15}$$

и

$$\mu_1 + \pi^2 = \mu_2. \tag{2.16}$$

Соответствующие формулам (2.14)–(2.16) фрагменты ферм изображены на рис. 5, a и b.

Введем величины

$$H_{jk}^{(q)} = \int_0^1 e^{2\pi iqz} \int_{\partial\omega} h(s,z)\partial_n W_j(y)\partial_n W_k(y)\, ds_y\, dz. \tag{2.17}$$

Подчеркнем, что благодаря сильному принципу максимума справедливо неравенство $\partial_n W_1 < 0$ на $(d-2)$-мерной поверхности $\partial\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ для положительной первой собственной функции W_1. Для второй собственной функции W_2, обязательно принимающей как отрицательные, так и положительные значения внутри области $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$, нормальная производная $\partial_n W_2$ может менять знак и на границе $\partial\omega$, но, разумеется, не обращается в нуль на ее подмножестве положительной меры

[5] Split of spectral band edges в английской терминологии.

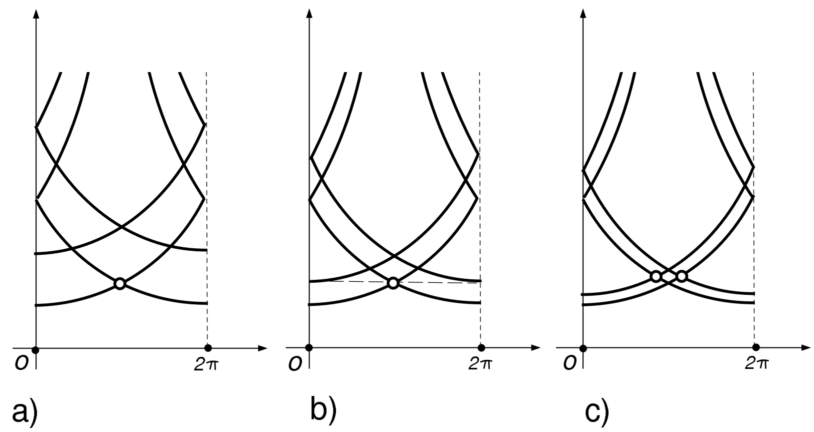

Рис. 5. Фрагменты ферм при условиях (2.15), (2.16) и (2.14), (2.23) – (a)–(c) соответственно. Рассматриваемые узлы помечены значком ∘.

mes_{d-2}. Таким образом, величинам (2.17) можно придать любые значения путем подбора весового множителя $h(s,z)$.

Согласно результатам [16] при условиях (2.15) и $H_{11}^{(1)} \neq 0 \in \mathbb{C}^2$ раскрыта лакуна G_1^ε (см. рис. 6, a) с концами

$$g_{1\pm}^\varepsilon = \mu_1 + \pi^2 + \varepsilon\left(-H_{11}^{(0)} \pm |H_{11}^{(1)}|\right) + O(\varepsilon^2), \tag{2.18}$$

происходящая от расцепления узла

$$P^1 = (\pi, \mu_1 + \pi^2), \tag{2.19}$$

отмеченного символом ∘ на рис. 5, a. Подбором профильной функции h можно добиться выполнения неравенств $g_{1-}^\varepsilon < \mu_1 + \pi^2 < g_{1+}^\varepsilon$ при малом ε, т.е. поместить точку $\Lambda_1^0(\pi) = \mu_1 + \pi^2$ вовнутрь лакуны G_1^ε. В частности, включение $\mu_1 + \pi^2 \in G_1^\varepsilon$ имеет место при выполнении требования

$$\left|H_{11}^{(1)}\right| > \left|H_{11}^{(0)}\right|. \tag{2.20}$$

Если

$$\mu_2 < \mu_1 + \pi^2, \tag{2.21}$$

т.е. оба соотношения (2.15), (2.16) нарушены, то обнаруженный зазор между графиками функций (1.15) с $n = 1, 2$ около точки $\eta = \pi$

перекрыт сегментом B_2^ε (см. рис. 5, c, и рис. 6, c). Однако, как установлено в работе [17] (см. также [19, 22]), появляется непустая лакуна G_2^ε в результате симметричного расцепления узлов

$$\begin{aligned} P_\pm^2 &= (\pi \pm \vartheta, \Lambda_2^0(\pi \pm \vartheta)) \\ &= \left(\pi \pm \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi}, \pi^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1) + \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{16\pi^2}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

(отмечены значком $\circ$ на рис. 5, c; ср. также рис. 5, a, на котором они также имеются, но специально не выделены). Именно, при условии $H_{12}^{(1)} \neq 0 \in \mathbb{C}^2$ лакуна G_2^ε имеет положительную ширину $O(\varepsilon)$ и к тому же при простых дополнительных требованиях к величинам $H_{11}^{(0)}$ и $H_{22}^{(0)}$ содержит точку $\Lambda_2^0(\pi \pm \vartheta)$ (см. определения (2.13) и (2.22)). Разумеется, для того чтобы избежать ситуации на рис. 7, когда перекрыты все рассчитанные и предполагаемые лакуны, нужно предположить, что

$$\mu_3 > \pi^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1) + \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{16\pi^2} \tag{2.23}$$

(ср. ординату узлов (2.22)). В замечании 3.2 приведены асимптотические формулы для концов $g_{2\pm}^\varepsilon$ лакуны G_2^ε. В случае (2.15), (2.23), отмеченном на рис. 5, a, открыты обе лакуны G_1^ε и G_2^ε (рис. 6, a), но в случае (2.23), (2.21) лакуна G_1^ε отсутствует (рис. 5, c, и рис. 6, c).

Обратимся теперь к равенству (2.16) (см. рис. 5, b), который характерен частичным перекрытием зазора сегментом B_2^ε (см. рис. 6, b). В работе [16] проверено, что концы лакуны (2.13), $n = 1$, удовлетворяют при малом $\varepsilon > 0$ соотношениям

$$\begin{aligned} g_{1-}^\varepsilon &= \mu_1 + \pi^2 - \varepsilon\left(-H_{11}^{(0)} + \left|H_{11}^{(1)}\right|\right) + O(\varepsilon^2), \\ g_{1+}^\varepsilon &= \mu_1 + \pi^2 - \varepsilon \min\left\{-H_{11}^{(0)} - \left|H_{11}^{(1)}\right|, H_{22}^{(0)}\right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Опять-таки подбором профиля h возмущения стенки (1.1) можно добиться неравенства $g_{1-}^\varepsilon < g_{1+}^\varepsilon$ и включения $\mu_1 + \pi^2 \in G_1^\varepsilon$.

Наконец, в случае равенства

$$\mu_3 = \pi^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1) + \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{16\pi^2} \tag{2.24}$$

также возможно полное или частичное перекрытие лакуны G_2^ε. Пусть $\mu_3 = \ldots = \mu_{2+\varkappa}$ – собственное число задачи (2.2) с кратностью $\varkappa \geqslant 1$.

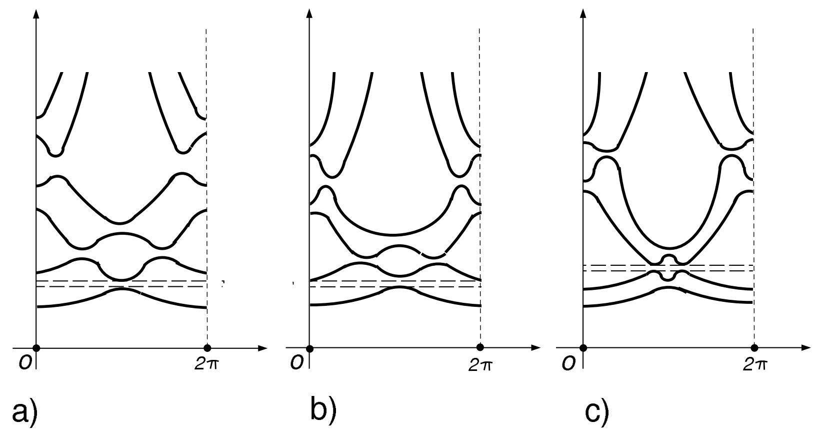

Рис. 6. Расщепление узлов при условиях (2.15), (2.16) и (2.21), (2.23) (см. (a)–(c) соответственно). Обнаруживаемые лакуны – проекции на ось ординат прямоугольников, обведенных штрих-пунктирной линией.

Справедлива формула Адамара [26] (см. далее замечание 2.1)

$$\Lambda_p^\varepsilon(0) = \mu_3 + \varepsilon\beta_p + O(\varepsilon^2), \tag{2.25}$$

где $\beta_3, \dots, \beta_{2+\varkappa}$ – собственные числа симметричной ($\varkappa \times \varkappa$)-матрицы $B = \left(H_{pq}^{(0)}\right)_{p,q=3}^{2+\varkappa}$ с элементами (2.17). Таким образом, как и в статье [16], делая эту матрицу положительно определенной путем подбора профиля возмущения h и уводя тем самым нижние точки (2.25) графиков функций Λ_p^ε от точки μ_3 вверх, сохраняем лакуну G_2^ε раскрытой.

Подведем итог. В предположении, что μ_2 – простое собственное число, принадлежащее интервалу $(\mu_1, \mu_1 + 4\pi^2)$ и удовлетворяющее требованию (2.23) или (2.24), при надлежащем выборе профиля возмущения (1.1) стенок волновода Π^ε в спектре задачи Дирихле (1.2), (1.3) найдется лакуна шириной $O(\varepsilon)$, содержащая ординату одной из точек (2.19) или (2.22).

Подчеркнем, что во всех случаях выбор профиля возмущения обусловлен лишь несколькими интегральными условиями (ср. соотношения (2.20), (2.17), а также далее (3.52), (4.13)). Столь же просто можно

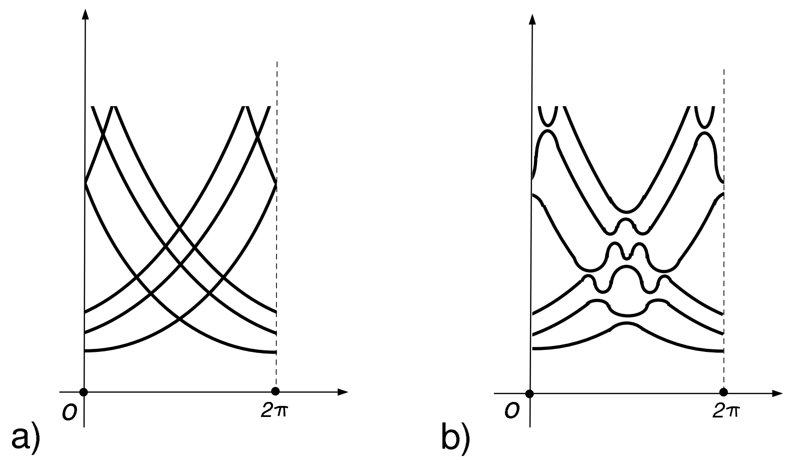

Рис. 7. При нарушении ограничений (2.23) и (2.24) все обсуждаемые лакуны перекрыты другими спектральными сегментами.

удовлетворить требованиям [16, 18–20, 22], обеспечивающим раскрытие лакун в случае нерегулярных возмущений ячейки периодичности (рис. 3, b).

2.2. Образования лакуны около заданной точки спектра. Обозначим исходный (до масштабирования) цилиндрический волновод через $\widehat{\Omega} = \widehat{\omega}\times\mathbb{R}$, а профильную функцию $\widehat{h}$, определяющую возмущенный волновод $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ по аналогичной (1.1) формуле, возьмем l-периодической с некоторым $l > 0$. Сделанное в п. 2 §1 масштабирование сопровождается заменой координат

$$\widehat{x} \mapsto x = l^{-1}\widehat{x}. \tag{2.26}$$

При этом собственные числа (2.3) задачи (2.1) на сечении

$$\omega = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} : ly \in \widehat{\omega}\}$$

волновода $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$ принимают вид

$$\mu_n = l^2\widehat{\mu}_n, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.27}$$

здесь фигурируют собственные числа

$$\widehat{\mu}_1 < \widehat{\mu}_2 < \widehat{\mu}_3 \leqslant \ldots \leqslant \widehat{\mu}_n \leqslant \ldots \to +\infty \tag{2.28}$$

задачи Дирихле для оператора Лапласа в области $\widehat{\omega}$. Второе неравенство в цепочке (2.28) строгое по предположению (это уже упоминалось неоднократно).

Зафиксируем какую-либо точку M из полуинтервала $(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2]$ непрерывного спектра $\widehat{\sigma} = [\widehat{\mu}_1, +\infty)$. Воспользуемся приведенным выше результатом [16] о лакуне около ординаты $\mu_1 + \pi^2$ узла (2.19), которая (ордината) при учете связи (2.27) принимает вид

$$l^{-2}(l^2\widehat{\mu}_1 + \pi^2) = \widehat{\mu}_1 + \pi^2 l^{-2}. \tag{2.29}$$

Затребованное в условиях (2.15) и (2.16) неравенство $\mu_2 \geqslant \mu_1 + \pi^2$ означает, что

$$\widehat{\mu}_2 \geqslant \widehat{\mu}_1 + \pi^2 l^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad l \geqslant \pi(\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_1)^{-1/2}.$$

Теперь совсем нетрудно найти период l_M, при котором величина (2.29) совпадает с M, а именно,

$$l_M = \pi\,(M - \widehat{\mu}_1)^{-1/2} \geqslant \pi\,(\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_1)^{-1/2}.$$

Если же $M > \widehat{\mu}_2$, то применим упомянутый выше результат [17] о лакуне около точки $\Lambda_2^0(\pi \pm \vartheta) = \mu_2 + (\pi \pm \vartheta)^2$ (см. формулу (2.22)), превращающейся в точку

$$\frac{1}{l^2}\left(l^2\widehat{\mu}_2 + \left(\pi - l^2\frac{\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_1}{4\pi}\right)^2\right) = \widehat{\mu}_2 + \frac{\pi^2}{l^2}\left(1 - l^2\frac{\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_1}{4\pi^2}\right)^2. \tag{2.30}$$

Требование (2.14) переписываем следующим образом:

$$\widehat{\mu}_2 < \widehat{\mu}_1 + 4\pi^2 l^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad l < 2\pi(\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_1)^{-1/2}.$$

Последнее соотношение и простые вычисления показывают, что, когда переменная l “пробегает” интервал $(0, 2\pi(\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_1)^{-1/2})$, величина (2.30), монотонно возрастающая функция, принимает все значение на открытом луче $(\widehat{\mu}_2, +\infty)$, т.е. при определенном периоде l_M становится равной M. Осталось соблюсти требование (2.23) во избежание картины на рис. 7, b. Оно запрещает величине (2.30) превосходить третье собственное число $\widehat{\mu}_3$. В результате нужный период l_M, обеспечивающий раскрытую и содержащую точку

$$M \in (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_3] \tag{2.31}$$

(ср. указанное во введении включение (1.16)) лакуну в спектре волновода $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ для $\varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon})$, $\widehat{\varepsilon} > 0$, и некоторой возмущающей профильной функции $\widehat{h}$.

Случай $M = \widehat{\mu}_1$ особый: лакуну около точки отсечки $\widehat{\mu}_\dagger$ (нижней грани спектра волновода $\widehat{\Pi}$) открыть нельзя. Тем не менее, нижняя грань $\underline{\sigma^\varepsilon}$ спектра возмущенного волновода Π^ε удовлетворяет соотношению

$$\underline{\sigma^\varepsilon} = \mu_1 - \varepsilon H_{11}^{(0)} + O(\varepsilon^2), \tag{2.32}$$

а значит, за счет уменьшения объема ячейки ϖ^ε можно освободить окрестность точки $M = \widehat{\mu}_1$ от спектра $\widehat{\sigma}^\varepsilon$ волновода $\widehat{\Pi}^\varepsilon$. При этом каких-либо ограничений на период l не возникает.

Замечание 2.1. Ввиду симметричности графиков функций (1.15) справедливо равенство $\underline{\sigma^\varepsilon} = \Lambda_1^\varepsilon(0)$, т.е. для вывода соотношения (2.32) достаточно изучить асимптотику первого собственного числа задачи (1.10)–(1.12) при фиксированном параметре $\eta = 0$. Иными словами, представление (2.32) – классическая формула Адамара [26].

Если требования (2.23) и (2.24) нарушены, т.е.

$$\mu_3 < \pi^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1) + \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{16\pi^2}, \tag{2.33}$$

то рассмотренные лакуны не раскрываются – это видно на рис. 7, a и b. Ответ на вопрос, можно ли в ситуации (2.33) образовать лакуну при малом периодическом возмущении цилиндрической поверхности, автору неизвестен.

§3. Двумерные задачи

3.1. Задача Неймана. В качестве иллюстрации к материалам следующего и предыдущего параграфов рассмотрим задачи Неймана и Дирихле в полосе

$$\Omega^0 = (0, D) \times \mathbb{R} \tag{3.1}$$

и на ее периодическом возмущении

$$\Omega^\varepsilon = \Big\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in \mathbb{R}, -\varepsilon h_-(z) < y < D + \varepsilon h_+(z)\Big\};$$

здесь $h_\pm$ – гладкие 1-периодические функции, причем, как и ранее, предполагаем, что $h_\pm(0) = h_\pm(1) = 0$. Исходная (до масштабирования) полоса имеет единичную ширину, т.е. $\widehat{\Omega}^0 = (0, 1) \times \mathbb{R}$, а $l = D^{-1}$ – период возмущения стенок.

Обычное физическое истолкование задач Дирихле (1.2), (1.3) и (2.1) – квантовые волноводы. Задачи Неймана (1.2), (1.4) и

$$
\begin{aligned}
-\Delta w(y,z) = \lambda w(y,z), \quad (y,z) \in \Omega^0,\\
\partial_n w(y,z) = 0, \quad (y,z) \in \Gamma^0 = \partial\Omega^0,
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

могут быть в первую очередь связаны с акустическим волноводом, имеющим жесткие стенки, но в двумерном случае также с волнами на поверхности весомой жидкости (воды), заполняющей трехмерный канал с вертикальными берегами и горизонтальным дном. Дело в том, что линейная теория поверхностных волн (см., например, книгу [27]) имеет дело со спектральным краевым условием Стеклова на горизонтальной свободной поверхности жидкости $\Omega^\varepsilon \times \{0\}$ или $\Omega^0 \times \{0\}$, однако после разделения переменных в пространственном уравнении Лапласа сводится к плоским задачам Неймана (1.2), (1.4) или (3.2). Еще одна интерпретация двумерной скалярной задачи Неймана, возникающая в результате разделения переменных в трехмерной векторной системе уравнений теории упругости, соотносится с поперечными упругими волнами, путешествующими вдоль образующих периодически искривленного упругого однородного изотропного слоя (см., например, монографию [28]).

Отвечающая (3.2) модельная задача на отрезке $\omega = (0, D)$, сечении полосы (3.1),

$$
-\frac{d^2W}{dy^2}(y) = \mu W(y), \quad y \in (0,D), \quad \frac{dW}{dy}(0) = \frac{dW}{dy}(D) = 0, \tag{3.3}
$$

имеет решения

$$
\begin{gathered}
\mu_1 = 0, \quad W_1(y) = D^{-1/2},\\
\mu_{l+1} = \frac{\pi^2}{D^2} l^2, \quad W_{l+1}(y) = \sqrt{\frac{2}{D}} \cos\Big(\frac{\pi}{D} l y\Big), \quad l \in \mathbb{N}.
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Решения аналогичной (2.9)–(2.11) модельной задачи, в которой условия Дирихле (2.10) заменены условиями Неймана

$$
\partial_\nu U^0(\eta; y, z) = 0, \quad (y,z) \in \gamma^0 = \partial\omega \times (0,1), \tag{3.5}
$$

на прямоугольнике $\varpi^0 = (0,D) \times (0,1)$ приобретают вид

$$
\Lambda^0_{m,q}(\eta) = \mu_m + (\eta + 2\pi q)^2, \tag{3.6}
$$

$$U^0_{m,q}(\eta;y,z)=\sqrt{\frac{2}{D}}\,e^{2\pi iqz}\,W_m(y).$$

Собственные числа (3.6) пронумерованы двумя индексами $m\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}$, и их нужно расставить в порядке возрастания с целью образовать монотонную последовательность

$$0\leqslant\Lambda^0_1(\eta)\leqslant\Lambda^0_2(\eta)\leqslant\ldots\leqslant\Lambda^0_n(\eta)\leqslant\ldots\to+\infty.$$

В следующих разделах произведем асимптотический анализ лакун G^ε_1 и G^ε_2 в двух ситуациях

$$\mu_2=\pi^2D^{-2}>\pi^2\quad\Leftrightarrow\quad D<1 \tag{3.7}$$

и

$$\mu_2=\pi^2D^{-2}<4\pi^2\quad\Leftrightarrow\quad D>1/2. \tag{3.8}$$

Соответствующие фрагменты фермы Υ^0_N получаются из изображенных на рис. 5, a и b, смещением вниз до оси абсцисс. Всюду далее, за исключением п. 5 §3, подразумеваем именно такое преобразование этого и других рисунков. В п. 3 §3 на ширину D из (3.1) будет в дополнение к неравенству (3.8) наложено ограничение сверху.

3.2. Лакуна G^ε_1 в спектре задачи Неймана. Пусть выполнено соотношение (3.7). Следуя работе [16], введем величину ψ, описывающую отклонение параметра Флоке η от ординаты π узла $P^1_0=(\pi,\pi^2)$, который отмечен значком $\circ$ на рис. 5, a,

$$\eta=\pi+\varepsilon\psi. \tag{3.9}$$

Для собственных чисел и собственных функций модельной задачи на ячейке

$$\varpi^\varepsilon=\bigl\{(y,z):\,z\in(0,1),-\varepsilon h_-(z)<y<D+\varepsilon h_+(z)\bigr\}, \tag{3.10}$$

а именно, уравнения (1.10), снабженного условиями периодичности (1.12) и краевыми условиями

$$\partial_{\nu^\varepsilon}U^\varepsilon(\eta;y,z)+i\eta\nu^\varepsilon_d(y,z)U^\varepsilon(\eta;y,z)=0,\quad (y,z)\in\gamma^\varepsilon, \tag{3.11}$$

примем асимптотические анзацы

$$\Lambda^\varepsilon_p(\pi+\psi)=\Lambda^0_p(\pi)+\varepsilon\Lambda'_p(\psi)+\cdots, \tag{3.12}$$

$$U^\varepsilon_p(\eta;y,z)=\mathcal{U}^0_p(\psi;y,z)+\varepsilon\mathcal{U}'(\psi;y,z)+\cdots \tag{3.13}$$

При этом $p=1,2$, $\Lambda^0_1(\pi)=\Lambda^0_2(\pi)=\pi^2$,

$$\mathcal{U}^0_p(\psi;y,z)=\bigl(a^+_p(\psi)+e^{-2\pi iz}a^-_p(\psi)\bigr)\,W_1(y), \tag{3.14}$$

а поправки $\Lambda'_p(\psi)$ и $\mathcal{U}'_p(\psi;\cdot)$ подлежат определению вместе со столбцом $a_p(\psi) = (a_p^+(\psi), a_p^-(\psi))$ коэффициентов линейной комбинации (3.14) собственных функций $D^{-1/2}$ и $D^{-1/2}e^{-2\pi iz}$ задачи (2.9), (3.5), (2.11) с параметрами $\eta = \pi$ и $\Lambda^0(\pi) = \pi^2$.

Подставим анзацы (3.12) и (3.13) в соотношения (1.10), (3.11), (1.12) с параметром (3.9) и соберем коэффициенты при ε. Из уравнения (1.10) выводим, что

$$\begin{gathered}-\Delta_y\mathcal{U}'_p(\psi;y,z) - (\partial_z + i\pi)^2\mathcal{U}'_p(\psi;y,z) - \pi^2\mathcal{U}'_p(\psi;y,z)\\ = 2i\psi(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}^0_p(\psi;y,z) + \Lambda'_p(\psi)\mathcal{U}^0_p(\psi;y,z),\ (y,z)\in\varpi^0.\end{gathered}\tag{3.15}$$

Заметив, что единичный вектор внешней нормали на искривленных основаниях

$$\begin{aligned}\gamma^\varepsilon_+ &= \{(y,z) :\, z\in(0,1),\quad y = D + \varepsilon h_+(z)\},\\ \gamma^\varepsilon_- &= \{(y,z) :\, z\in(0,1),\quad y = -\varepsilon h) - (z)\}\end{aligned}$$

ячейки (3.10) приобретает вид

$$\nu^\varepsilon(z) = (1 + \varepsilon^2|\partial_z h_\pm(z)|^2)^{-1/2}(\pm1, -\varepsilon\partial_z h_\pm(z)),\tag{3.16}$$

при помощи формулы Тейлора по переменной y, примененной к функции $\mathcal{U}^0_p(\psi;\cdot)$, находим, что

$$\begin{gathered}\partial_{\nu^\varepsilon}U^\varepsilon_p(\eta; D + \varepsilon h_+(z), z) = \partial_y\mathcal{U}^0_p(\psi; D + \varepsilon h_+(z), z)\\ +\varepsilon\left(\partial_y\mathcal{U}'_p(\psi; D + \varepsilon h_+(z), z) - \partial_z h_+(z)\cdot\partial_z\mathcal{U}^0_p(\psi; D + \varepsilon h_+(z), z)\right) + O(\varepsilon^2)\\ = \partial_y\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z) + \varepsilon\big(\partial_y\mathcal{U}'_p(\psi; D, z) - \partial_z h_+(z)\cdot\partial_z\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z)\\ + h_+(z)\partial_y^2\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z)\big) + O(\varepsilon^2).\end{gathered}\tag{3.17}$$

Учитывая также второй член в левой части (3.11)

$$\begin{gathered}i(\pi + \varepsilon\psi)\nu^\varepsilon_2(z)U^\varepsilon(\pi + \varepsilon\psi; D + \varepsilon h_+(z), z)\\ = -\varepsilon i\pi\partial_z h_+(z)\cdot\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z) + O(\varepsilon^2),\end{gathered}\tag{3.18}$$

составляем краевое условие на верхнем основании γ^0_+ ячейки ϖ^0

$$\begin{aligned}\partial_y\mathcal{U}'_p(\psi; D, z) = -h_+(z)\partial_y^2\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z)&\\ + \partial_z h_+(z)(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z),&\quad z\in(0,1).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Похожие выкладки дают такое краевое условие на нижнем основании γ_-^0:

$$\begin{aligned} -\partial_y \mathcal{U}_p'(\psi;0,z) = -h_-(z)\partial_y^2 \mathcal{U}_p^0(\psi;0,z) \\ + \partial_z h_-(z)(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p^0(\psi;0,z), \quad z \in (0,1). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Условия периодичности (1.12) без изменений переносятся на функцию $\mathcal{U}_p'$, т.е.

$$\mathcal{U}_p'(\psi;y,0) = \mathcal{U}_p'(\psi;y,1), \quad \partial_z \mathcal{U}_p'(\psi;y,0) = \partial_z \mathcal{U}_p'(\psi;y,1), \quad y \in \omega. \tag{3.21}$$

Полученная задача (3.15), (3.19)–(3.21) является самосопряженной, а значит, альтернатива Фредгольма дает два условия ее разрешимости. Наиболее простой способ обработать эти условия состоит в следующем: предположим, что решение найдено, и подставим его вместе с собственными функциями задачи в формулу Грина на ячейке ϖ^0 – полученные таким образом два равенства суть ничто иное как искомые условия разрешимости.

Первая собственная функция W_1 приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \Lambda_p'(\psi)\int\limits_{\varpi^0} W_1 \mathcal{U}_p^0\,dx &= -\int\limits_{\varpi^0} W_1\left(\partial_y^2 + (\partial_z + i\pi)^2 + \pi^2\right)\mathcal{U}_p'\,dx \\ &\quad - 2i\psi\int\limits_{\varpi^0} W_1(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p'\,dx \\ &= -2i\psi\int\limits_{\varpi^0} W_1(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p'\,dx \\ &\quad - \sum_{\pm}\int\limits_0^1 W_1\left(-h_\pm \partial_y^2 \mathcal{U}_p^0 + \partial_z h_\pm \cdot (\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p^0\right)dz. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Принимая во внимание выражения (3.14) и (3.4) для $\mathcal{U}_p^0$ и W_1 соответственно, преобразуем равенство (3.22) к виду

$$\Lambda_p'(\psi)a_p^+(\psi) = 2\pi\psi \int\limits_0^1 (a_p^+(\psi) - e^{-2\pi iz}a_p^-(\psi))\,dz$$

$$- i\frac{\pi}{D}\int\limits_0^1 \left(a_p^+(\psi) - e^{-2\pi iz}a_p^-(\psi)\right)\partial_z h_\oplus(z)\,dz$$

$$= 2\pi\psi a_p^+(\psi) - \frac{2\pi^2}{D}\,\overline{H_\oplus^{(1)}}a_p^-(\psi), \tag{3.23}$$

где

$$h_\oplus(z) = h_+(z) + h_-(z), \quad H_\oplus^{(q)} = \int\limits_0^1 e^{2\pi iqz}h_\oplus(z)\,dz. \tag{3.24}$$

Оперируя со второй собственной функцией $e^{-2\pi iz}W_1$ по прежней схеме, выводим еще одно соотношение

$$\Lambda_p'(\psi)a_p^-(\psi) = -2\pi\psi a_p^-(\psi) + \frac{2\pi^2}{D}H_\oplus^{(1)}a_p^+(\psi). \tag{3.25}$$

Характеристическое уравнение линейной алгебраической системы (3.23), (3.25) с эрмитовой (2×2)-матрицей $Q(\psi;\Lambda_p'(\psi))$ имеет вид

$$0 = \det Q(\psi;\Lambda_p'(\psi)) = -\Lambda_p'(\psi)^2 + 4\pi^2\psi^2 + 4\pi^4 D^{-2}|H_\oplus^{(1)}|^2,$$

а значит, асимптотические поправки в анзаце (3.12) выглядят так:

$$\Lambda_{1,2}'(\psi) = \pm 2\pi\sqrt{\psi^2 + \pi^2 D^{-2}\left|H_\oplus^{(1)}\right|^2}.$$

При этом индексу 1 отвечает знак минус, а индексу 2 – знак плюс.

Асимптотические представления собственных чисел $\Lambda_1^\varepsilon(\pi+\varepsilon\psi)$ и $\Lambda_2^\varepsilon(\pi+\varepsilon\psi)$ обосновываются по стандартной схеме (см., например, статью [16]) – переход к краевым условиям Неймана не требует каких-либо новых соображений или вычислений. Приведем результат.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены требования $D<1$ и $H_\oplus^{(1)} \neq 0 \in \mathbb{C}$ (см. соотношения* (3.7) *и* (3.24)*). Тогда найдутся такие положительные величины ε_1, ψ_1, ρ_1 и c_1, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ и $|\psi| < \psi_1^{-1/2}$ в ρ_1-окрестности точки π^2 расположены в точности два собственных числа $\Lambda_1^\varepsilon(\pi+\varepsilon\psi)$ и $\Lambda_2^\varepsilon(\pi+\varepsilon\psi)$ задачи* (1.10), (3.11), (1.12). *Оба* *собственных числа простые, и для них верны асимптотические формулы*

$$
\begin{aligned}
&\left|\Lambda_1^\varepsilon(\pi+\varepsilon\psi)-\pi^2+2\pi\varepsilon\sqrt{\psi^2+\pi^2D^{-2}\left|H_\oplus^{(1)}\right|^2}\right|\leqslant c_1\varepsilon^{3/2},\\
&\left|\Lambda_2^\varepsilon(\pi+\varepsilon\psi)-\pi^2-2\pi\varepsilon\sqrt{\psi^2+\pi^2D^{-2}\left|H_\oplus^{(1)}\right|^2}\right|\leqslant c_1\varepsilon^{3/2}.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Формулы (3.26) показывают, что в окрестности узла $P_0^1=(\pi,\pi^2)$ графики функций (1.15) при $n=1,2$ ведут себя так, как продемонстрировано на рис. 6, a. Строгое обоснование непустоты лакуны проводится аналогично работе [16] (см. также публикации [17, 18, 20] и др.). Сформулируем результат.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.1 раскрыта лакуна* G_1^ε*, а ее концы удовлетворяют оценкам*

$$
\left|g_{1\pm}^\varepsilon-\pi^2\mp 2\varepsilon\pi^2D^{-2}\left|H_\oplus^{(1)}\right|\right|\leqslant c_1\varepsilon^{3/2}.
$$

Подчеркнем, что точка π^2 попадает вовнутрь лакуны.

3.3. Лакуна G_2^ε в спектре задачи Неймана. В предположении (3.8) изучим лакуну, изображенную на рис. 6, c, и возникающую вследствие расщепления узлов $P_\pm^2=(\pi\pm(2D)^{-2},\pi^2(1+(2D)^{-2})^2)$ фермы Υ^0, отмеченных значком $\circ$ на рис. 5, c. Для того чтобы возможная лакуна G_2^ε не была перекрыта соседним спектральным сегментом (ср. рис. 7, b), нужно предположить, что

$$
\begin{aligned}
&\pi^2\Big(1+\frac{1}{4D^2}\Big)^2\leqslant\mu_3=\frac{4\pi^2}{D^2}\\
&\qquad\Leftrightarrow\quad D\in\left[\sqrt{\frac74-\sqrt3},\sqrt{\frac74+\sqrt3}\,\right]=:\big[D_-,D_+\big].
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Учитывая еще ограничение (3.8), считаем, что

$$
D\in\left(\frac12,\sqrt{\frac74+\sqrt3}\,\right].
\tag{3.28}
$$

Ввиду упомянутой в конце п. 2 §1 симметрии графиков функций (1.15) относительно прямой $\{\eta = \pi\}$ достаточно рассмотреть только один из узлов, для определенности P^2_-. Введем параметр отклонения ψ, т.е. положим

$$\eta = \pi\left(1 - \frac{1}{4D^2}\right) + \varepsilon\psi =: \eta_- + \varepsilon\psi. \tag{3.29}$$

Назначим аналогичный (1.15) асимптотический анзац

$$\Lambda^\varepsilon_p(\eta_- + \varepsilon\psi) = \Lambda^0_p + \varepsilon\Lambda'_p(\psi) + \cdots \tag{3.30}$$

для собственных чисел $\Lambda^\varepsilon_2(\eta)$ и $\Lambda^\varepsilon_3(\eta)$, расположенных в окрестности ординаты $\Lambda^0_p = \pi^2(1 + (2D)^{-2})^2$ узлов $P^2_\pm$. Сохраним анзац (3.13) с индексами $p = 2, 3$ для соответствующих собственных функций, но в качестве главного асимптотического члена возьмем линейную комбинацию

$$\mathcal{U}^0_p(\psi; y, z) = a^1_p(\psi)e^{-2\pi i z}W_1(y) + a^2_p(\psi)W_2(y) \tag{3.31}$$

собственных функций задачи (2.9), (3.5), (2.11) с параметрами $\eta = \eta_-$ и $\Lambda(\eta) = \Lambda^0_p$, построенных по собственным функциям (3.4) задачи (3.3).

Задача для определения поправок $\mathcal{U}'_p(\psi;\cdot)$ и $\Lambda'_p(\psi)$ находится по прежней схеме. Уравнение (3.15) теперь приобретает вид

$$\begin{aligned} &-\partial^2_y\mathcal{U}'_p(\psi; y, z) - (\partial_z + i\eta_-)^2\mathcal{U}'_p(\psi; y, z) - \Lambda^0_p\mathcal{U}'_p(\psi; y, z) \\ &= 2i\psi(\partial_z + i\eta_-)\mathcal{U}^0_p(\psi; y, z) + \Lambda'_p(\psi)\mathcal{U}^0_p(\psi; y, z), \quad (y, z) \in \varpi^0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Формулы (3.16), (3.17), а также (3.18) с заменой $\pi \mapsto \eta_-$ обеспечивают краевые условия

$$\partial_y\mathcal{U}'_p(\psi; D, z) = -h_+(z)\partial^2_y\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z) + \partial_z h_+(z)(\partial_z + i\eta_-)\mathcal{U}^0_p(\psi; D, z),$$

$$-\partial_y\mathcal{U}'_p(\psi; 0, z) = -h_-(z)\partial^2_y\mathcal{U}^0_p(\psi; 0, z) + \partial_z h_-(z)(\partial_z + i\eta_-)\mathcal{U}^0_p(\psi; 0, z),$$

$$z \in (0, 1) \tag{3.33}$$

а условия периодичности (3.21) остаются без изменений. Обработаем условия разрешимости задачи (3.32), (3.33), (3.21). Первое (с собственной функцией $\mathcal{W}_1(z) = e^{-2\pi i z}W_1$; см. определения (3.31) и (3.4)) равносильно соотношению

$$\begin{aligned}\Lambda_p'(\psi)a_p^1(\psi) &= \Lambda_p'(\psi)\int\limits_{\varpi^0}\overline{\mathcal{W}_1}\,\mathcal{U}_p^0\,dydz\\ &= -2i\psi\int\limits_{\varpi^0}\overline{\mathcal{W}_1}\,(\partial_z+i\eta_-)\,\mathcal{U}_p^0\,dy\,dz\\ &-\sum_{\pm}\int\limits_0^1\overline{\mathcal{W}_1}\,(-h_\pm\partial_y^2\mathcal{U}_p^0+\partial_z h_\pm\cdot(\partial_z+i\eta_-)\,\mathcal{U}_p^0)\,dz \qquad (3.34)\\ &= 2\psi(\eta_- - 2\pi)a_p^1(\psi)+\sqrt{2}D^{-1}(\pi^2D^{-2}+2\pi\eta_-)H_\ominus^{(1)}a_p^2(\psi),\end{aligned}$$

в котором

$$h_\ominus(z)=h_+(z)-h_-(z),\quad H_\ominus^{(q)}=\int\limits_0^1 e^{2\pi iqz}h_\ominus(z)\,dz. \qquad (3.35)$$

Формула Грина со второй собственной функцией $\mathcal{W}_2(y)=W_2(y)$ (см. определения (3.31) и (3.4)) порождает еще одно уравнение

$$\begin{aligned}\Lambda_p'(\psi)a_p^2(\psi) &= 2\psi\eta_-a_p^2(\psi)+2\pi^2D^{-3}H_\oplus^{(0)}a_p^2(\psi)\\ &-\sqrt{2}D^{-1}2\pi(\eta_- - 2\pi)\overline{H_\ominus^{(1)}}\,a_p^1(\psi). \qquad (3.36)\end{aligned}$$

Поскольку в силу соотношения (3.29) справедливо равенство

$$\pi^2D^{-2}+2\pi\eta_- = -2\pi(\eta_- - 2\pi),$$

матрица системы алгебраических уравнений (3.34), (3.36) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} B_{11}+\psi T_1 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}+\psi T_2\end{pmatrix}, \qquad (3.37)$$

где

$$B_{11}=0,\quad B_{22}=2\frac{\pi^2}{D^3}H_\oplus^{(0)},\quad B_{21}=\overline{B_{12}}=\frac{\sqrt{2}}{D}2\pi(2\pi-\eta_-)H_\ominus^{(1)},$$

$$T_1=2(\eta_- - 2\pi)<0,\quad T_2=2\eta_- >0. \qquad (3.38)$$

Собственные числа матрицы (3.37) находятся по формуле

$$\Lambda_\pm(\psi) = \frac{1}{2}(B_{22} + B_{11} + \psi(T_2 + T_1)) \\ \pm \pm\frac{1}{2}\sqrt{(B_{22} - B_{11} + \psi(T_2 - T_1))^2 + 4|B_{12}|^2}\,. \qquad (3.39)$$

Несложный анализ выражений (3.39) показывает, что при ограничениях

$$|T_2 - T_1| > |T_2 + T_1|, \quad |B_{12}| \neq 0 \qquad (3.40)$$

справедливо соотношение

$$\max_{\psi\in\mathbb{R}} \Lambda_-(\psi) < \min_{\psi\in\mathbb{R}} \Lambda_+(\psi), \qquad (3.41)$$

которое далее обеспечит раскрытие лакуны. Подчеркнем, что первое неравенство (3.40) вытекает из формул (3.39), а второе будет затребовано.

Подстановка в правую часть (3.39) величин (3.38) доставляет поправки $\Lambda_3'(\psi) = \Lambda_+'(\psi)$ и $\Lambda_2'(\psi) = \Lambda_-'(\psi)$ в асимптотических анзацах (3.30). Ссылаясь по-прежнему на работы [16, 18, 19] по поводу оправдания асимптотик, сформулируем результат.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены требования $D \in (1/2, D_+)$ и $H^1_\ominus \neq 0 \in \mathbb{C}$ (см. определения (3.35) и (3.27)). Тогда найдутся такие положительные величины ε_2, ψ_2, ρ_2 и c_2, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ и $|\psi| < \psi_2\varepsilon^{-1/2}$ в ρ_2-окрестности точки $\pi^2(1 + (2D)^{-2})^2$ расположены в точности два собственных числа $\Lambda_2^\varepsilon(\pi(1 - (2D)^{-2}) + \varepsilon\psi)$ и $\Lambda_3^\varepsilon(\pi(1 - (2D)^{-2}) + \varepsilon\psi)$ задачи (1.10), (3.11), (1.12). Оба собственных* *числа простые, и для них верны асимптотические формулы*

$$\begin{gathered}\Bigg|\Lambda_2^\varepsilon\Big(\pi\Big(1-\tfrac{1}{4D^2}\Big)+\varepsilon\psi\Big)-\pi^2\Big(1+\tfrac{1}{4D^2}\Big)^2-\varepsilon\Bigg(\tfrac{\pi^2}{D^3}H_\oplus^{(0)}-\tfrac{\pi\psi}{2D^2}\\ -\sqrt{\Big(\tfrac{\pi^2}{D^3}H_\oplus^{(0)}-2\pi\psi\Big)^2+\tfrac{8\pi^4}{D^2}\Big(1+\tfrac{1}{4D^2}\Big)^2\Big|H_\ominus^{(1)}\Big|^2}\Bigg)\Bigg|\leqslant C_2\varepsilon^{3/2},\\ \Bigg|\Lambda_2^\varepsilon\Big(\pi\Big(1-\tfrac{1}{4D^2}\Big)+\varepsilon\psi\Big)-\pi^2\Big(1+\tfrac{1}{4D^2}\Big)^2-\varepsilon\Bigg(\tfrac{\pi^2}{D^3}H_\oplus^{(0)}-\tfrac{\pi\psi}{2D^2}\\ +\sqrt{\Big(\tfrac{\pi^2}{D^3}H_\oplus^{(0)}-2\pi\psi\Big)^2+\tfrac{8\pi^4}{D^2}\Big(1+\tfrac{1}{4D^2}\Big)^2\Big|H_\ominus^{(1)}\Big|^2}\Bigg)\Bigg|\leqslant C_2\varepsilon^{3/2}.\end{gathered}\tag{3.42}$$

Напомним, что формулы (3.42) сохраняются и для собственных чисел $\Lambda_2^\varepsilon(\pi(1+(2D)^{-2})+\varepsilon\psi)$ и $\Lambda_3^\varepsilon(\pi(1+(2D)^{-2})+\varepsilon\psi)$, расположенных симметрично относительно линии $\{\eta=\pi\}$ на графиках, изображенных на рис. 6, а.

Теорема 3.2 не обслуживает верхнюю грань $D_+=\sqrt{\frac{7}{4}+\sqrt{3}}$ сегмента (3.28), и для раскрытия лакуны требуется воспользоваться формулой Адамара [26] для возмущения собственного числа

$$\Lambda_4^0(0)=\mu_3(D_*)=\frac{4\pi^2}{D_+^2}=\pi^2\left(1+\frac{1}{4D_+^2}\right)^2$$

совпадающего с ординатой узлов $P_\pm^2$. Вывод асимптотики

$$\Lambda_3^\varepsilon(0)=\frac{\pi^2}{D_+^2}+\varepsilon\frac{8\pi^2}{D_+^3}H_\oplus^{(0)}+O(\varepsilon^2),\tag{3.43}$$

весьма прост (ср. замечание 2.1). В случае

$$H_\oplus^{(0)}>0\tag{3.44}$$

возмущение (3.43) приподнимает график $\Lambda_4^0(\eta)=\mu_3(D_*)+\eta^2$ и тем самым не препятствует раскрытию лакуны

Явные выражения для максимума и минимума (3.41) выглядят достаточно громоздко, и поэтому асимптотику концов лакуны G_2^ε укажем в упрощенном случае.

Следствие 3.2. 1) *В условиях теоремы 3.2 лакуна* G_2^ε *раскрыта. Подбором профильных функций* $h_\pm$ *можно добиться раскрытия лакуны и при* $D = D_+$.

2) *Пусть* $D < D_+$ *и* $H_\oplus^{(0)} = 0$, *т.е. среднее суммы* $h_+ + h_-$ *по отрезку* $(0,1)$ *равно нулю и площади ячеек* ϖ^0 *и* ϖ^ε *совпадают. Тогда концы лакуны* G_2^ε *удовлетворяют оценкам*

$$\left| g_{2\pm}^\varepsilon - \pi^2\Big(1 + \frac{1}{4D^2}\Big)^2 \mp 2\sqrt{2}\,\frac{\pi^2}{D}\varepsilon\Big(1 + \frac{1}{4D^2}\Big)\left|H_\ominus^1\right| \right| \leqslant C_2\varepsilon^{3/2}.$$

В следствии 3.2 (2) лакуна G_2^ε содержит ординату $\pi^2(1 + (2D)^{-2})^2$ узлов $P_\pm^2$.

Если возмущение полосы (3.1) происходит симметрично, а именно при помощи профильных функций $h_+ = h_-$, основное требование $\left|H_\ominus^{(1)}\right| \neq 0$ в теореме 3.2 и следствии 3.2 нарушено, и получить информацию о лакуне без вычисления младших членов асимптотики собственных чисел невозможно. Вопрос о ее существовании остается открытым.

3.4. 4. О раскрытии лакун в спектре задачи Неймана. Спектр задачи Неймана в полосе $\widehat{\Omega}^0$ единичной ширины занимает луч $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$. Зафиксируем число $M \in (0, \pi^2)$. Заменой координат

$$(\widehat{y}, \widehat{z}) \mapsto (y, z) = (D\widehat{y}, D\widehat{z}) \tag{3.45}$$

полоса $\widehat{\Omega}^0$ трансформируется в полосу (3.1), а точка M переводится в точку $D^{-2}M$. Положив $D = \pi^{-1}M^{1/2} \in (0,1)$, совмещаем $D^{-2}M$ с точкой π^2, вокруг которой по теореме 3.1 при условии $\left|H_\oplus^{(1)}\right| \neq 0$ (см. определение (3.24)) образуется лакуна G_1^ε.

Пусть теперь $M \in (\pi^2, 4\pi^2]$. Положим

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{M}{\pi^2} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{M}{\pi^2}\Big(\frac{M}{\pi^2} - 1\Big)}} \in \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{4} + \sqrt{3}}\,\right],$$

обеспечив тем самым требование (3.28), а также равенство $D^{-2}M = (1 + (2D)^{-2})^2$. Теорема 3.2 и следствие 3.2 предоставляет требования к величинам $H_\ominus^{(1)}$ и $H_\oplus^{(0)}$ из формул (3.35) и (3.24), при которых полученная точка попадает вовнутрь лакуны G_2^ε, а значит, точка M

содержится в лакуне

$$\widehat{G}_2^\varepsilon = \left\{\lambda :\ D^{-2}\lambda \in G_2^\varepsilon\right\}. \tag{3.46}$$

Осталось рассмотреть точки $M = 0$ и $M = \pi^2$. Нижней гранью спектра задачи Неймана в периодической полосе всегда служит начало координат, т.е. освободить точку $M = 0$ от спектра нельзя. В случае $M = \pi^2$ в дополнение к теореме 3.1, сохраняющей силу и при $D = 1$, укажем асимптотическую формулу Адамара [26] (см. замечание 2.1)

$$\Lambda_2^\varepsilon(0) = \pi^2\left(1 - \varepsilon H_\oplus^{(0)}\right) + O(\varepsilon^2)$$

для второго собственного числа задачи (1.10), (3.11), (1.12) с параметром $\eta = 0$. Поскольку благодаря оценкам (3.26) при $D = 1$ между графиками функций (1.15) с $n = 1$, образуется зазор

$$\left(\pi^2\left(1 - 2\varepsilon\left|H_\oplus^{(1)}\right|\right) + O(\varepsilon^2), \pi^2\left(1 + 2\varepsilon\left|H_\oplus^{(1)}\right|\right) + O(\varepsilon^2)\right),$$

при условии $H_\oplus^{(0)} < 0$ и $|H_\oplus^{(1)}| \neq 0$ лакуна G_1^ε оказывается раскрытой и включает точку $M = \pi^2$. При этом период возмущения берется единичным.

Итак, вокруг любой точки

$$M \in (0, 4\pi^2] \tag{3.47}$$

удается открыть лакуну путем подбора периода и формы возмущения сторон единичной полосы. Подчеркнем, что $\widehat{\mu}_1 = 0$ и

$$\pi^2\left(1 + \frac{1}{4D_+^2}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{D_+^2} = \mu_3 = \frac{\widehat{\mu}_3}{D_+^2},$$

т.е. полуинтервал (3.47) совпадает с полуинтервалом (2.31).

Замечание 3.1. Если $D < 1/2$ и $\mu_2 > \mu_1 + 4\pi^2 = 4\pi^2$, то по прежней схеме можно открыть лакуну G_2^ε вокруг точки $4\pi^2$ (см. рис. 4, b и c). Лакуна (3.46) в спектре задачи Неймана на единичной полосе с подходящим периодическим возмущении образуется вокруг точки $M = 4\pi^2 D^2 < \pi^2$, т.е. расширить участок (3.47) не удается. Такой же эффект наблюдается в случае $D < 1/3$ и $\mu_2 > \mu_1 + 9\pi^2 = 9\pi^2$: третья лакуна на рис. 4, c, трансформируется в лакуну $\widehat{G}_3^\varepsilon$ вокруг точки $M = 9\pi^2 D^2 < \pi^2$.

3.5. Лакуны в спектре задачи Дирихле. Рассмотрим задачу Дирихле (2.1) в полосе (3.1). Собственные пары соответствующей модельной задачи (2.1) на сечении полосы Π – отрезке $\omega = (0, D)$,

$$-\frac{d^2W}{dy^2}(y) = \mu W(y), \quad y \in (0, D), \quad W(0) = W(D) = 0,$$

приобретают вид

$$\mu_n = \frac{\pi^2}{D^2} n^2, \quad W_n(y) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin\Big(\frac{\pi}{D} n y\Big), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.48}$$

Все собственные числа простые, а луч $[\pi^2 D^{-2}, +\infty)$ – непрерывный спектр задачи (2.1). Кроме того, условие (2.14) означает, что

$$D > \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{3.49}$$

а условия (2.15) и (2.16) превращаются соответственно в такие:

$$D < \sqrt{3} \quad \text{и} \quad D = \sqrt{3}. \tag{3.50}$$

Спектр задачи Дирихле в полосе $\widehat{\Omega}^0$ единичной ширины – луч $[\pi^2, +\infty)$. Зафиксируем точку $M \in (\pi^2, 4\pi^2)$. При замене (3.45) эта точка трансформируется в точку $D^{-2}M$ спектра задачи (2.1) в полосе (3.1) и при

$$D = \pi^{-1}(M - \pi^2)^{1/2} < \sqrt{3}$$

(см. первое ограничение (3.50)) совпадает с ординатой узла (2.19). Полученная в статье [16] формула (2.18) для концов лакуны G_1^ε конкретизируется согласно (3.48) следующим образом:

$$g_{1\pm}^\varepsilon = \pi^2 + \frac{\pi^2}{D^2} + \varepsilon \frac{2\pi^2}{D^3} \left(-H_\oplus^0 \pm \left|H_\oplus^{(1)}\right|\right) + O(\varepsilon^2) \tag{3.51}$$

(ср. определения (2.17) и (3.24), (3.48)). Как уже упоминалось в п. 3 §2, нетрудно добиться включения $\pi^2(1 + D^{-2}) \in G_1^\varepsilon$, наложив всего лишь одно условие

$$\left|H_\oplus^{(0)}\right| < \left|H_\oplus^{(1)}\right| \tag{3.52}$$

на три коэффициента Фурье функции $h_\oplus = h_+ + h_-$. Если $H_\oplus^{(0)} = 0$ (аннулировали один коэффициент и одновременно сохранили площадь $\mathrm{mes}_2 \varpi^0 = D$ у ячейки ϖ^ε), то достаточно, чтобы хотя бы один из коэффициентов Фурье при $\sin(\pi z)$ или $\cos(\pi z)$ был отличен от нуля.

Кратко опишем способ вывода формул (3.51). Годятся асимптотические анзацы (3.12) и (3.13), в которых $p = 1, 2$, а главные члены заданы формулами $\Lambda_p^0(\pi) = \pi^2(1 + D^{-2})$ и (3.14), причем множитель $W_1(y)$ берется из списка (3.48). Задача для поправок $\mathcal{U}'_p(\psi;\cdot)$ и $\Lambda'_p(\psi)$ формируется из уравнения (3.15) и условий периодичности (3.21), а также неоднородных условий Дирихле

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}'_p(\psi; D, z) = -h_+(z)\,\partial_y \mathcal{U}_p^0(\psi; D, z), \\ &\mathcal{U}'_p(\psi; 0, z) = h_-(z)\,\partial_y \mathcal{U}_p^0(\psi; 0, z), \quad z \in (0,1). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Применив формулу Грина аналогично выкладке (3.22), получим следующие два условия разрешимости задачи (3.15), (3.53), (3.21):

$$\begin{aligned} &\Lambda'_p(\psi) a_p^{\pm}(\psi) \\ &\quad = -2i\psi \int\limits_{\varpi^0} \overline{\mathcal{W}_\pm}\,(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p^0\,dx - \sum_\pm \int\limits_0^1 \overline{\partial_y \mathcal{W}_\pm}\,h_\pm \partial_y \mathcal{U}_p^0\,dz. \end{aligned} \tag{3.54}$$

При этом $\mathcal{W}_+(y,z) = W_1(y)$ и $\mathcal{W}_-(y,z) = e^{-2\pi i z} W_1(y)$ – собственные функции задачи в прямоугольнике $(0,D)\times(0,1)$, составленной из уравнения (2.9) с параметрами $\eta = \pi$, $\Lambda^0(\pi) = \pi^2(1 + D^{-2})$, условий периодичности (2.11) и условий Дирихле

$$U^0(\eta; D, z) = U^0(\eta; 0, z) = 0,\ z \in (0,1).$$

Ставшие привычными вычисления переделывают соотношения (3.54) в систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Lambda'_p(\psi) a_p^+(\psi) &= 2\pi\psi a_p^+(\psi) - \frac{2\pi^2}{D^3}\left(H_\oplus^{(0)} a_p^+(\psi) + \overline{H_\oplus^{(1)}}\, a_p^-(\psi)\right), \\ \Lambda'_p(\psi) a_p^-(\psi) &= -2\pi\psi a_p^-(\psi) - \frac{2\pi^2}{D^3}\left(H_\oplus^{(1)} a_p^+(\psi) + H_\oplus^{(0)} a_p^-(\psi)\right). \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим поправки

$$\Lambda'_{1,2}(\psi) = -\frac{2\pi^2}{D^3} H_\oplus^{(0)} \pm 2\pi \sqrt{\frac{\pi^2}{D^6}\left|H_\oplus^{(1)}\right|^2 + \psi^2} \tag{3.55}$$

в анзаце (3.12) для собственных чисел, а оценка асимптотического остатка в котором вытекает из результатов [16]. Величины (3.55) с $\psi = 0$ как раз и фигурируют множителями при ε в соотношениях (3.51).

Теперь примем ограничение (3.49) и рассмотрим лакуну G_2^ε, найденную в работе [17] и появляющуюся в результате расцепления узлов

(2.22), которые в силу формул (3.48) принимают вид

$$P_{\pm}^2 = \left(\pi\Big(1 \pm \frac{3}{4D^2}\Big), \pi^2\Big(1 + \frac{5}{2D^2} + \frac{9}{16D^2}\Big)\right). \tag{3.56}$$

Для того чтобы не случилось перекрытие лакуны (рис. 7), нужно соблюсти неравенство

$$\pi^2\Big(1 + \frac{5}{2D^2} + \frac{9}{16D^2}\Big) \leqslant \frac{9\pi^2}{D^4},$$

означающее, что

$$D^4 - \frac{13}{2}D^2 + \frac{9}{16} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad D \in \big[D_-, D_+\big],\ D_{\pm} = \sqrt{\frac{13}{4} \pm \sqrt{10}}.$$

Таким образом, поскольку $D_- < \sqrt{3}$, допустимы следующие значения ширины:

$$D \in \left(\sqrt{3}, \sqrt{\frac{13}{4} + \sqrt{10}}\,\right].$$

Поясним, как при условии $H_{\ominus}^{(1)} \neq 0 \in \mathbb{C}$ проверяется раскрытие лакуны. Достаточно рассмотреть окрестность точки $\eta_- = \pi(1-3(2D)^{-2})$, т.е. аналогично (3.29) положить $\eta = \eta_- + \varepsilon\psi$ и принять асимптотический анзац (2.15) с числом Λ_p^0 – ординатой узлов (3.56). В качестве главного члена асимптотики собственных функций $U_p^{\varepsilon}(\eta_- + \varepsilon\psi; \cdot)$, $p = 2, 3$, возьмем линейную комбинацию (3.31) собственных функций

$$\mathcal{W}_1(y,z) = e^{-2\pi i z}\sqrt{\frac{2}{D}}\,\sin\Big(\frac{\pi}{D}y\Big), \quad \mathcal{W}_2(y,z) = \sqrt{\frac{2}{D}}\,\sin\Big(\frac{2\pi}{D}y\Big)$$

задачи (2.9)–(2.11) в прямоугольнике $\varpi^0 = (0, D) \times (0, 1)$ с параметрами $\eta = \eta_-$ и $\Lambda^0(\eta) = \Lambda_p^0$. Поправочное слагаемое $\mathcal{U}_p'(\psi; \cdot)$ в анзаце (3.13) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.17), условию Дирихле (3.53) и условиям периодичности (3.21). Как и ранее, такая краевая задача имеет решение при выполнении двух равенств, которые при помощи формулы (3.54) с заменами $\pi \mapsto \eta_-$ и $\mathcal{W}_{\pm} \mapsto \mathcal{W}_q$ превращаются в систему двух линейных алгебраических уравнений с матрицей (3.37) и следующими ее ингредиентами:

$$\begin{gathered} 4B_{11} = B_{22} = -\frac{2\pi^2}{D^3}H_{\oplus}^{(0)}, \quad B_{12} = \overline{B_{21}} = \frac{4\pi^2}{D^3}H_{\oplus}^{(1)}, \\ T_1 = -2\pi\Big(1 + \frac{3}{4}D^{-2}\Big), \qquad T_2 = 2\pi\Big(1 - \frac{3}{4}D^{-2}\Big). \end{gathered} \tag{3.57}$$

Собственные числа этой матрицы находятся по формуле (3.39) и приобретают вид

$$\Lambda_p'(\psi) = -5\frac{\pi^2}{D^2}H_\oplus^{(0)} + \frac{3\pi}{2D^2}\psi \pm \sqrt{\Big(3\frac{\pi^2}{D^2}H_\oplus^{(0)} + 2\pi\psi\Big)^2 + 16\frac{\pi^2}{D^6}\Big|H_\ominus^{(1)}\Big|^2},$$

причем индексу $p = 2$ отвечает знак минус, а индексу $p = 3$ – знак плюс. Поскольку $\frac{3}{2}\pi D^{-2} < 2\pi$ в силу ограничения (3.49), при условии $\Big|H_\ominus^{(1)}\Big| \neq 0$ выполнены требования (3.40), и в случае $D \in \big(\sqrt{3}, D_+\big)$ лакуна G_2^ε раскрыта, так как $\Lambda_3'(\psi_3) > \Lambda_2'(\psi_2)$ при всех ψ_3, $\psi_2 \in \mathbb{R}$. Например, в случае равенства $H_\oplus^{(0)} = 0$, сохраняющего площадь ячейки ϖ^ε, функции Λ_3' и Λ_2' достигают соответственно минимума $L' > 0$ и максимума $-L' < 0$ в точках

$$\psi_3 = -\frac{3}{2}\Big(D^4 - \frac{9}{16}\Big)^{-1}\frac{|H_\ominus^{(1)}|}{D^3} \quad \text{и} \quad \psi_2 = \frac{3}{2}\Big(D^4 - \frac{9}{16}\Big)^{-1}\frac{|H_\ominus^{(1)}|}{D^3}.$$

При этом концы лакуны G_2^ε удовлетворяют соотношению

$$g_{2\pm}^\varepsilon = \pi^2\Big(1 + \frac{5}{2D^2} + \frac{9}{16D^4}\Big) \pm \varepsilon L' + O(\varepsilon^2),$$

а значит, она содержит ординату $g_{2+}^0 = g_{2-}^0$ узлов (3.56).

Замечание 3.2. Как установлено в работе [17] для обсуждавшейся в §2 многомерной задачи Дирихле поправки в асимптотических разложениях (3.30) собственных чисел

$$\Lambda_p^\varepsilon(\pi - (2\pi)^{-1}(\mu_2 - \mu_1) + \varepsilon\psi), \quad p = 2, 3,$$

определяющих лакуну G_2^ε при расцеплении узла (2.22) в предположении (2.14), находятся при решении системы двух линейных алгебраических уравнений с матрицей (3.37), в которой

$$\begin{gathered} B_{11} = -H_{11}^{(0)}, \quad B_{22} = -H_{22}^{(0)}, \quad B_{12} = \overline{B_{21}} = -H_{12}^{(1)}, \\ T_1 = -2\pi - \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\pi} < 0, \quad T_2 = 2\pi - \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\pi} > 0, \end{gathered} \tag{3.58}$$

а $H_{jk}^{(q)}$ – величины (2.17), вычисленные по собственным функциям задачи (2.2) на сечении ω цилиндра $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Формулы (3.57) получаются из формул (3.58) подстановкой явных выражений (3.48).

Для того чтобы закончить повторение рассуждений из п. 3 §2 и образовать лакуну вокруг любой точки M из сегмента спектра $[\pi^2, 9\pi^2]$ задачи Дирихле в единичной полосе $\widehat{\Omega}^0 = (0,1) \times \mathbb{R}$, осталось написать три формулы Адамара [26]

$$\Lambda_k^\varepsilon(0) = \frac{k^2\pi^2}{D^2} - \varepsilon\frac{2k^2\pi^2}{D^3}H_\oplus^{(0)} + O(\varepsilon^2), \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.59}$$

для собственных чисел задачи (1.10)–(1.12) с фиксированным параметром $\eta = 0$ на ячейке $\varpi^\varepsilon = \{(y,z) : z \in (0,1), -\varepsilon h_-(z) < y < D + \varepsilon h_+(z)\}$ с регулярно возмущенными основаниями.

Напоминаем, что вокруг точки $M \in (\pi^2, 4\pi^2]$ открывается лакуна, полученная из лакуны G_1^ε заменой $\lambda^\varepsilon \mapsto \widehat{\lambda}^\varepsilon = D^2\lambda^\varepsilon$ спектрального параметра, а вокруг точки $M \in (4\pi^2, 9\pi^2]$ – лакуна, полученная из лакуны G_2^ε.

§4. Лакуны в спектре многомерной задачи Неймана

4.1. Первая лакуна. Собственные числа задачи Неймана

$$-\Delta_y W(y) = \mu W(y), \quad y \in \omega, \quad \partial_\nu W(y) = 0, \quad y \in \partial\omega,$$

на сечении $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ цилиндра Ω^0 образуют последовательность

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \leqslant \ldots \to +\infty, \tag{4.1}$$

а соответствующие собственные функции $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots \in H^1(\omega)$ (по предположению о границе $\partial\omega$ они гладкие на множестве $\overline{\omega}$) можно подчинить условиям ортогональности и нормировки (2.4). При этом $W_1(y) = (\mathrm{mes}_{d-1}\omega)^{1/2}$ – постоянная. Как обычно, предполагаем, что μ_2 – простое собственное число, т.е.

$$0 = \mu_1 < \mu_2 < \mu_3.$$

Изучим расцепление нижнего узла $P^1 = (\pi, \pi^2)$ (в определении (2.19) теперь фигурирует элемент $\mu_1 = 0$ последовательности (4.1)) при условии

$$\mu_2 > \pi^2. \tag{4.2}$$

Примем формулы (3.9) и (3.12)–(3.14). Подставим анзацы (1.15) и (3.13) в задачу (1.10), (3.11), (1.12) и сразу же получим дифференциальное уравнение (3.15) вместе с условиями периодичности (3.21). Неоднородное краевое условие Неймана на боковой поверхности $\gamma^0 = \partial\omega \times (0,1)$ цилиндрической ячейки ϖ^0 выглядят так:

$$\partial_\nu \mathcal{U}_p'(\psi;0,s,z) = -h(s,z)\partial_\nu^2 \mathcal{U}_p^0(\psi;0,s,z) + \nabla_s h(s,z)\cdot\nabla_s \mathcal{U}_p^0(\psi;0,s,z)$$
$$+\partial_z h(s,z)\cdot(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p^0(\psi;0,s,z),\ (s,z)\in\partial\omega\times(0,1). \qquad (4.3)$$

Здесь сохранены обозначения $\mathcal{U}_p^0(\psi;\nu,s,z)$ и $\mathcal{U}_p'(\psi;\nu,s,z)$ для функций, записанных при помощи криволинейных координат ν, s, z. Условия разрешимости задачи (3.15), (4.3), (3.21), а именно, равенства

$$\Lambda_p'(\psi)\int\limits_{\varpi^0} \overline{\mathcal{W}_\pm}\,\mathcal{U}_p^0\,dx$$
$$= -2i\psi\int\limits_{\varpi^0} \overline{\mathcal{W}_\pm}\,(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p^0\,dx - \int\limits_0^1\int\limits_{\partial\omega} \overline{\mathcal{W}_\pm}\,\partial_z h\,(\partial_z + i\pi)\mathcal{U}_p^0\,ds\,dz$$

с функциями $\mathcal{W}_\pm(y,z) = W_1(y)$ и $\mathcal{W}_-(y,z) = e^{-2\pi iz}W_1(y)$, преобразуем аналогично выкладкам (3.22)–(3.25). Они принимают вид системы алгебраических уравнений

$$\Lambda_p'(\psi)a_p^+(\psi) = 2\pi\psi a_p^+(\psi) + \frac{2\pi^2\overline{H^{(1)}}}{\mathrm{mes}_{d-1}\omega}\,a_p^-(\psi),$$
$$\Lambda_p'(\psi)a_p^-(\psi) = -2\pi\psi a_p^-(\psi) + \frac{2\pi^2 H^{(1)}}{\mathrm{mes}_{d-1}\omega}\,a_p^+(\psi),$$

где аналогично (3.24)

$$H^{(1)} = \int\limits_0^1\int\limits_{\partial\omega} e^{2\pi iz}h(s,z)\,dsdz.$$

Таким образом,

$$\Lambda_{1,2}'(\psi) = \pm 2\pi\sqrt{\frac{\pi^2|H^{(1)}|^2}{(\mathrm{mes}_{d-1}\omega)^2} + \psi^2},$$

и, следовательно, для концов лакуны G_1^ε верны асимптотические формулы

$$g_{1\pm}^\varepsilon = \pi^2 \pm \frac{2\pi^2\varepsilon}{\mathrm{mes}_{d-1}\omega}\,\left|H^{(1)}\right| + O(\varepsilon^2). \qquad (4.4)$$

Эта лакуна заведомо раскрыта при $H^{(1)} \neq 0 \in \mathbb{C}$, причем точка π^2 попадает вовнутрь G_1^ε.

4.2. Вторая лакуна. В предположении

$$\mu_2 < 4\pi^2 \tag{4.5}$$

изучим расцепление узлов

$$P_\pm^2 = \Big(\pi \pm \frac{\mu_2}{4\pi}, \pi^2 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\mu_2^2}{16\pi^2}\Big) \tag{4.6}$$

(ср. формулу (2.22), где $\mu_1 = 0$). Во избежание перекрытия возможной лакуны другими спектральными сегментами (см. рис. 7), предположим, что

$$\pi^2 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\mu_2^2}{16\pi^2} \leqslant \mu_3 \tag{4.7}$$

Рассматривая окрестность точки $\eta_- = \pi - (4\pi)^{-1}\mu_2$, положим

$$\eta = \pi - \frac{\mu_2}{4\pi} + \varepsilon\psi.$$

Назначим асимптотический анзац (3.29) для собственных чисел $\Lambda_p^\varepsilon(\eta)$ и анзац (3.13) для собственных функций $U_p^\varepsilon(\eta;\cdot)$; здесь $p = 2, 3$. Главный член $\mathcal{U}_p^0(\psi; y, z)$ имеет вид (3.31); кроме того, Λ_p^0 – ордината узлов (1.7). Поправочные слагаемые $\mathcal{U}_p'(\psi; y, z)$ и $\Lambda_p'(\psi)$ находятся из краевой задачи (3.15), (4.3), (3.21), условия разрешимости которой превращаются в систему линейных алгебраических уравнений

$$\Lambda_p'(\psi) a_p^1(\psi) = -2\psi\Big(\pi + \frac{\mu_2}{4\pi}\Big) a_p^1(\psi) + H^{(12)} a_p^2(\psi),$$
$$\Lambda_p'(\psi) a_p^2(\psi) = 2\psi\Big(\pi - \frac{\mu_2}{4\pi}\Big) a_p^1(\psi) + H^{(21)} a_p^1(\psi) + H^{(22)} a_p^2(\psi),$$

где

$$H^{(12)} = \overline{H^{(21)}} = -\frac{4\pi^2 + \mu_2}{2(\mathrm{mes}_{d-1}\omega)^{1/2}} \int_0^1 e^{2\pi i z} \int_{\partial\omega} h(s,z) W_2(y)\, ds dz,$$

$$H^{(22)} = \int_0^1 \int_{\partial\omega} h(s,z) \left(|\nabla_s W_2(y)|^2 - \mu_2 |W_2(y)|^2\right) ds dz. \tag{4.8}$$

Подчеркнем важное обстоятельство: множители при h в подынтегральных выражениях (4.8) не обращаются тождественно в нуль на

$\partial\omega$. Для $W_2(y)$ сказанное очевидно, так как решение уравнения Гельмгольца $\Delta_y W_2 + \mu_2 W_2 = 0$ в области ω не может удовлетворять обоим краевым условиям Дирихле и Неймана на границе $\partial\omega$. Проверим аналогичное утверждение для функции

$$T(y) = |\nabla_s W_2(y)|^2 - \mu_2 |W_2(y)|^2. \tag{4.9}$$

Пусть y^+ и y^- – точки, в которых реализуется максимум и минимум сужения гладкой функции W_2 на поверхность $\partial\omega$. Поскольку $\nabla_s W_2(y^\pm) = 0$, функция (4.9) аннулируется в обеих точках $y^\pm$ разве лишь в случае $W_2(y^\pm) = 0$, приводящем, как уже пояснялось, к абсурдному равенству $W_2 \equiv 0$ на ω.

Далее предполагаем выполненным требование

$$\int_0^1 e^{2\pi i z} \int_{\partial\omega} h(s,z) W_2(y)\, ds dz \neq 0 \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

Формула (3.39) для собственных чисел матрицы (3.37) показывает, что

$$\Lambda'_{2,3}(\psi) = \frac{1}{2}(H^{(22)} - 2\psi\vartheta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(H^{(22)} + 4\pi\psi)^2 + 4|H^{(12)}|^2}\,.$$

Поскольку при условии (4.10) справедливы соотношения (3.40), обнаруживаем согласно неравенству (3.41), что

$$\max_{\psi\in\mathbb{R}} \Lambda'_2(\psi) < \min_{\psi\in\mathbb{R}} \Lambda'_3(\psi), \tag{4.11}$$

т.е. лакуна G_2^ε раскрыта в силу проверенных асимптотических представлений собственных чисел

$$\Lambda_k^\varepsilon(\pi \pm \frac{\mu_2}{4\pi} + \varepsilon\psi) = \pi^2 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\mu_2^2}{16} + \varepsilon\Lambda'_k(\psi) + O(\varepsilon^2), \quad k = 2, 3..$$

Подбором профильной функции h величинам (4.8) можно придать любые значения и, например, сделать минимум из (4.11) положительным, а максимум – отрицательным, т.е. поместить ординату узлов (4.6) вовнутрь лакуны.

4.3. Образование лакуны около заданной точки спектра. Примем обозначения $\widehat{\Omega}$, $\widehat{\mu}_n$ и пр. из п. 3 §2. Зафиксируем точку $M \in (0, \widehat{\mu}_2)$ из спектра $\widehat{\sigma} = [0, +\infty)$. При учете преобразования (2.27) видим, что ордината π^2 узла P^1 превращается в $\pi^2 l^{-2}$, а требование (4.2) означает, что

$$\widehat{\mu}_2 \geqslant \pi^2 l^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad l \geqslant \pi(\widehat{\mu}_2)^{-1/2}.$$

Поскольку $\pi^2 l_M^{-2} = M$ при $l_M = \pi M^{-1/2} > \pi(\widehat{\mu}_2)^{-1/2}$ в спектре $\widehat{\sigma}^\varepsilon$ волновода $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ образуется лакуна

$$\widehat{G}_1^\varepsilon = \left\{\widehat{\lambda} : l^2\widehat{\lambda} \in G_1^\varepsilon\right\}, \tag{4.12}$$

получающаяся из лакуны $G_1^\varepsilon \ni \pi^2$ (см. п. 1 §4) и потому содержащая заданную точку M.

Пусть теперь $M \in (\widehat{\mu}_2, \widehat{\mu}_3)$. Преобразование (2.26) переделывает ординаты узлов (4.6) в величину

$$l^{-2}\left(\pi^2 + l^2\frac{\widehat{\mu}_2}{2} + l^4\frac{\widehat{\mu}_2^2}{16\pi^2}\right) = l^{-2}\pi^2 + \frac{\widehat{\mu}_2}{2} + l^2\frac{\widehat{\mu}_2^2}{16\pi^2} =: N(l),$$

а условия (4.5) и (4.7) – в ограничение

$$l^2\widehat{\mu}_2 < 4\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad l < 2\pi(\widehat{\mu}_2)^{-1/2}.$$

При $l \in (0, 2\pi(\widehat{\mu}_2)^{-1/2})$ функция $l \mapsto N(l)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $\widehat{\mu}_2$, а значит, принимает значение M при некотором $l_M < 2\pi(\widehat{\mu}_2)^{-1/2}$. Как и в предыдущих параграфах, неравенство $N(l_M) < l_M^2\widehat{\mu}_3$ сохраняет лакуну открытой, но ограничивает снизу интервал изменения параметра l. Решая квадратное уравнение, находим, что

$$l > l_* := \frac{2\sqrt{2}\pi}{\widehat{\mu}_2}\sqrt{\widehat{\mu}_3 - \frac{\widehat{\mu}_2}{2} - \sqrt{\widehat{\mu}_3\,(\widehat{\mu}_3 - \widehat{\mu}_2)}}$$

Поскольку $N(l_*) = \widehat{\mu}_3$, желанный результат о раскрытии лакуны установлен на всем полуинтервале (1.16), за исключением точек $M = \widehat{\mu}_2$ и $M = \widehat{\mu}_3$.

Заметим, что собственное число $\Lambda_2^\varepsilon(0)$ задачи (1.10), (3.11), (1.12) с параметром $\eta = 0$ на возмущенной ячейке ϖ^ε допускает аналогичное (3.59) разложение

$$\Lambda_2^\varepsilon(0) = \mu_2 + \varepsilon H^{(22)} + O(\varepsilon^2),$$

где $H^{(22)}$ – величина из списка (4.8). Поскольку, как и ранее, равенство $|\nabla_s W_2(y)| = \mu_2^{1/2}|W_2(y)|$ невозможно всюду на поверхности $\partial\omega$, подбором профиля h добиваемся неравенств

$$|H^{(1)}| \neq 0, \quad H^{(22)} \geqslant \frac{2\pi^2|H^{(1)}|}{\mathrm{mes}_{d-1}\omega}, \tag{4.13}$$

и в силу результата из п. 1 §4 обнаруживаем лакуну G_1^ε с концами (4.4), содержащую точку π^2. Наконец, зафиксируем период $l = \pi(\widehat{\mu}_2)^{-1/2}$ и переведем точку $M = \widehat{\mu}_2$ в ординату узла $P^1 = (\pi, \pi^2)$. Полученная обратным преобразованием лакуна (4.12) содержит рассматриваемую точку. Точно так же поступаем и с точкой $M = \widehat{\mu}_3$.

Литература

1. С. А. Назаров, *Лакуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области.* — Функц. анализ и его прилож. **43**, No. 3 (2009), 92–95.
2. С. А. Назаров, *Пример множественности лакун в спектре периодического волновода.* — Матем. сборник **201**, No. 4 (2010), 99–124.
3. S. A. Nazarov, K. Ruotsalainen, J. Taskinen. *Essential spectrum of a periodic elastic waveguide may contain arbitrarily many gaps.* — Appl. Anal. **89**, No. 1 (2010), 109–124.
4. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М., 1973.
5. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980.
6. П. А. Кучмент, *Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных.* — Успехи матем. наук **37**, No. 4 (1982), 3–52.
7. P. Kuchment, *The mathematics of photonic crystals.* — Ch. 7. In “Mathematical Modeling in Optical Science,” Frontiers Appl. Math., SIAM **22** (2001), 207–272.
8. S. A. Nazarov, *Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains.* — Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz’ya V., Ed.) International Mathematical Series , Vol. 9. New York: Springer (2008), pp. 261–309.
9. М. М. Скриганов, *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов.* — Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **171**, Наука, Ленинград, 1985.
10. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука, М., 1991.
11. P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations.* Birchäuser, Basel, 1993.
12. И. М. Гельфанд, *Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами.* — Доклады АН СССР **73** (1950), 1117–1120.
13. С. А. Назаров, *Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре.* — Известия АН СССР. Серия матем. **45**, No. 1 (1981), 101–112.
14. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Мир, М., 1971.
15. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
16. С. А. Назаров, *Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода.* — Матем. заметки **87**, No. 5 (2010), 764–786.
17. С. А. Назаров, *Асимптотика спектральных лакун в регулярно возмущенном периодическом волноводе.* — Вестник СПбГУ. Сер. 1 Вып. 2, No. 7 (2013), 54–63.

18. G. Cardone, S. A. Nazarov, C. Perugia, *A gap in the essential spectrum of a cylindrical waveguide with a periodic perturbation of the surface.* — Math. Nachr. **283**, No. 9 (2010), 1222–1244.
19. С. А. Назаров, *Асимптотический анализ лакун в спектре волновода, возмущенного периодическим семейством малых полостей.* — Проблемы матем. анализа **66** (2012), 101–146.
20. F. L. Bakharev, S. A. Nazarov, K. M. Ruotsalainen. *A gap in the spectrum of the Neumann–Laplacian on a periodic waveguide.* — Appl. Anal. **88** (2012), 1–17.
21. Д. И. Борисов, К. В. Панкрашкин, *Открытие лакун и расщепление краев зон для волноводов, соединенных периодической системой малых окон.* — Матем. заметки **93**, No. 5 (2013), 665–683.
22. D. Borisov, K. Pankrashkin, *Quantum waveguides with small periodic perturbations: gaps and edges of Brillouin zones.* — J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013), 1–18.
23. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. об-ва **16** (1963), 219–292.
24. J. Harrison, P. Kuchment, A. Sobolev, B. Winn, *On occurrence of spectral edges for periodic operators inside the Brillouin zone.* — J. Phys. A **40**, No. 27 (2007), 7597–7618.
25. P. Exner, P. Kuchment, B. Winn, *On the location of spectral edges in Z-periodic media.* — J. Phys. A **43**, No. 47 (2010), id 474022.
26. J. Hadamard, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'éuilibre des plaques élastiques encastrées.* — Œuvres **2** (1968), 515–631.
27. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
28. Ю. Н. Работнов, *Механика деформируемого твердого тела.* Наука, М.. 1988.

Nazarov S. A. Gap opening around a given point of the spectrum of a cylindrical waveguide by means of gentle periodic perturbation of walls.

We discuss one of the main questions in band-gap engineering, namely by an asymptotic analysis it is proven that any given point of a certain interval in the spectrum of a cylindrical waveguide can be surrounded with a spectral gap by means of a periodical perturbation of the walls. Both the Dirichlet and Neumann boundary conditions for the Laplace operator are considered in planar and multi-dimensional waveguides.

ИПМаш РАН В.О. Большой пр. 61,
199178 Санкт-Петербург, Россия
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 2 декабря 2013 г.