

А. И. Корольков, А. В. Шанин

**ДИФРАКЦИЯ НА РЕШЕТКЕ ИЗ ПОГЛОЩАЮЩИХ
ЭКРАНОВ РАЗНОЙ ВЫСОТЫ. НОВЫЕ
УРАВНЕНИЯ**

1. ВВЕДЕНИЕ

Л. А. Вайнштейном была исследована задача об отражении волновой моды от торца плоского волновода с акустически твердыми тонкими стенками [1]. Задача была решена методом Винера–Хопфа [2], и в результате были получены коэффициенты рассеяния моды, бегущей к торцу волновода, в различные моды, убегаящие от торца. Данная задача имеет существенное практическое значение. Помимо, собственно, излучения из волновода, она помогает описать колебания в плоском резонаторе Фабри–Перо, который в этом случае представляется фрагментом волновода. Волновой процесс в таком резонаторе представляется как последовательные отражения волны от торцов.

Ключевой результат, полученный Л. А. Вайнштейном, состоит в следующем. Высокочастотная мода (т. е. мода с длиной волны много меньшей ширины волновода) вблизи частоты отсечки (т. е. распространяющаяся почти перпендикулярно к оси волновода) имеет коэффициент отражения, близкий к -1 . Этот результат является достаточно неожиданным, поскольку в торце волновода отсутствуют какие-либо структуры, способные обеспечить почти идеальное отражение. Напротив, интуитивно ожидается коэффициент отражения близкий к 0 , что соответствует выходу энергии волны из волновода в окружающее пространство. Близость коэффициента отражения к -1 объясняет высокую добротность резонатора Фабри–Перо при отсутствии фокусирующих элементов, а также позволяет качественно описать моды.

Описание рассеяния высокочастотной моды, близкой к частоте отсечки, является весьма сложной дифракционной задачей. Сложность

Ключевые слова: дифракционная решетка, поглощающие экраны, параболическое приближение.

Работа поддержана грантом правительства РФ 11.G34.31.0066, грантом “Научные школы” 2631.2012.2, а также грантом РФФИ 12-02-00114.

связана со следующим обстоятельством. Данная задача не допускает описания в рамках геометрической теории дифракции или какой-либо родственной теории, поскольку поле представляет собой многократно переотраженную полутеневую зону.

Л. А. Вайнштейном было замечено, что применение метода отражений позволяет переформулировать задачу о дифракции на торце волновода в виде задачи отражения волны от бесконечной периодической дифракционной решетки, состоящей из точек ветвления разветвленной поверхности. Формулировка задачи, связанная с дифракцией на решетке, представляется весьма удобной, поскольку позволяет ввести краевые функции Грина. При рассмотрении высокочастотного случая можно воспользоваться параболическим приближением. При этом вместо решетки из точек ветвления можно рассматривать решетку из идеально поглощающих экранов.

К задачам, сходным с задачей Л. А. Вайнштейна, приводит попытка вычислить добротность высокочастотных мод в открытом прямоугольном резонаторе [3]. Моды в таких резонаторах представляются семействами лучей, распространяющихся по замкнутым бильiardным траекториям. Потери имеют чисто дифракционную природу. Такие задачи также могут быть сведены к дифракции на периодических дифракционных решетках, однако периоды решеток имеют более сложную структуру. Эти задачи уже не могут быть решены классическим методом Винера–Хопфа. В частности, задача, рассматриваемая в данной работе, принадлежит именно к этому классу и сводится к матричному уравнению Винера–Хопфа, решение которого неизвестно.

Авторами работы предложен метод [4, 5] решения задач вайнштейновского класса, не опирающийся на технику Винера–Хопфа. Целью авторов является развитие данного метода, применение его к различным задачам, построение эффективных численных и асимптотических методов на его основе. Этому и посвящена данная статья.

Физическая задача, дающая мотивацию данного исследования, это задача излучения из торца плоского волновода, стенки которого имеют разную “высоту” (см. рис. 1 а)). Рассматривается акустическая стационарная задача, стенки волновода предполагаются идеально отражающими (неймановскими) и бесконечно тонкими. Падающая волноводная мода предполагается высокочастотной и близкой по частоте

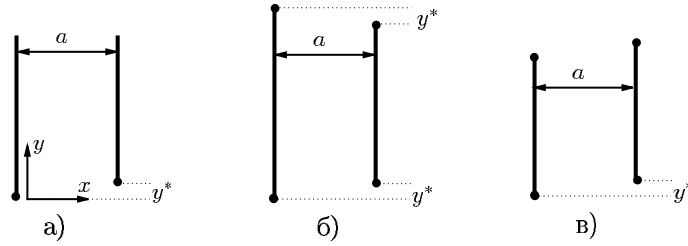


Рис. 1. Геометрия изучаемых систем: а) открытый волновод, б), в) резонаторы Фабри–Перо.

к отсечке, т. е. парциальные (бриллюэновские) плоские волны, составляющие моду, распространяются почти перпендикулярно к оси волновода. Основным интерес представляют коэффициенты отражения в различные отраженные моды.

В случае, если данная задача используется для описания резонатора Фабри–Перо, она описывает волны в резонаторе с параллельными зеркалами разного размера или с зеркалами, сдвинутыми друг относительно друга (см. рис. 1 б), в)). Данная задача рассматривалась в работе [1] с помощью интегральных уравнений Фокса–Ли. Задача была сведена к функциональному уравнению для коэффициентов генерации дифракционных порядков, откуда в приближении малых углов была получена грубая оценка для главного коэффициента генерации. Однако Л. А. Вайнштейном не было получено асимптотических выражений для коэффициентов генерации.

Методом, подробно описанным в [5], а именно методом отражений, данная задача может быть приближенно сведена к задаче распространения волны, описываемой параболическим уравнением, и отражения ее от периодической решетки идеально отражающих экранов (см. рис. 2). Коэффициенты отражения в волноводные моды из исходной задачи соответствуют коэффициентам рассеяния в дифракционных максимумах.

Для задачи о дифракции на решетке выводится формула расщепления, выражающая коэффициенты генерации дифракционных максимумов через диаграммы направленности краевых функций Грина. Далее выводится спектральное уравнение, представляющее собой обыкновенное дифференциальное уравнение для диаграмм направленности

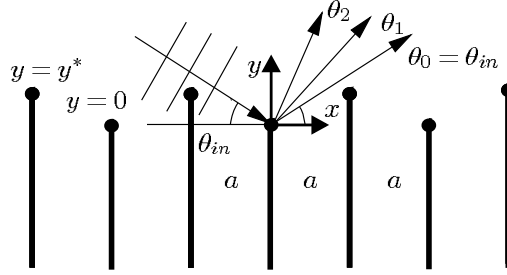


Рис. 2. Геометрия периодической решетки.

краевых функций Грина. Для коэффициента спектрального уравнения строится ОЕ-уравнение, которое может быть решено численно. Эта часть работы близка к результатам, подробно описанным в [5]. Далее выводится эволюционное уравнение, описывающее поведение краевых функций Грина и коэффициента спектрального уравнения при изменении геометрического параметра задачи y^* . С помощью эволюционного уравнения строится асимптотика диаграмм направленности краевых функций Грина и асимптотика коэффициента генерации основного дифракционного максимума R_0 .

В целях экономии места там, где это возможно, мы будем использовать выкладки и рассуждения, описанные подробно в [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскость (x, y) , на которой для полевой переменной u выполняется параболическое уравнение теории дифракции

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0. \quad (1)$$

На плоскости расположены экраны, занимающие полупрямые $x = x_m$, $y < y_m$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$x_m = at \quad (2)$$

$$y_m = \begin{cases} 0 & m \text{ четное} \\ y^* & m \text{ нечетное} \end{cases} \quad (3)$$

Поле на экранах имеет разрывы. Экраны являются идеально поглощающими, т. е. на правых сторонах экранов (при $x = x_m + 0$, $y < y_m$)

выполняются граничные условия

$$u(x_m + 0, y) = 0. \quad (4)$$

Идеально поглощающие экраны возможны в параболическом приближении, поскольку уравнение (1) имеет первый порядок по x .

Рассматривается коротковолновое приближение:

$$ka \gg 1. \quad (5)$$

Полное поле представляется суммой

$$u = u_{\text{in}} + u_{\text{sc}},$$

где u_{in} – падающая плоская волна, имеющая вид

$$u_{\text{in}}(x, y) = \exp\left\{-ikx\frac{\theta_{\text{in}}^2}{2} - iky\theta_{\text{in}}\right\}, \quad (6)$$

а u_{sc} – рассеянное поле. Предполагается, что угол θ_{in} мал:

$$\theta_{\text{in}} \ll 1. \quad (7)$$

Заметим, что граничные условия для u_{sc} имеют вид

$$u_{\text{sc}}(x_m + 0, y) = -u_{\text{in}}(x_m, y), \quad y < y_m. \quad (8)$$

Постановку задачи необходимо дополнить условиями в конечных точках экранов, а также условиями излучения. Условия в конечных точках заключаются в том, что полное поле предполагается ограниченным вблизи конечных точек экранов (x_m, y_m) . Ограниченность поля гарантирует отсутствие источников вблизи конечных точек.

Условие излучения заключается в том, что рассеянное поле не содержит компонент, приходящих из области больших $|y|$ (это учитывается при построении Фурье-разложений решения).

Геометрический период решетки экранов составляет $2a$ вдоль оси x . Падающая волна обладает свойством

$$u_{\text{in}}(x + 2a, y) = \chi u_{\text{in}}(x, y), \quad \chi = \exp\{-ika\theta_{\text{in}}^2\}.$$

В соответствии с теорией Флоке, рассеянное поле должно обладать таким же свойством

$$u_{\text{sc}}(x + 2a, y) = \chi u_{\text{sc}}(x, y). \quad (9)$$

Следовательно, в верхней полуплоскости (при $y > \max(0, y^*)$) рассеянное поле может быть представлено в виде ряда

$$u_{sc} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m \exp \left\{ -ikx \frac{\theta_m^2}{2} +iky\theta_m \right\}, \quad (10)$$

$$\theta_m = \sqrt{\theta_{in}^2 + \frac{2\pi m}{ka}}. \quad (11)$$

В соответствии с условием излучения, значение квадратного корня выбирается положительным действительным или положительным мнимым. Положительные действительные θ_m соответствуют дифракционным максимумам, а положительные мнимые θ_m соответствуют неоднородным волнам, формирующим ближнее поле. Отметим что $\theta_0 = \theta_{in}$. Цель исследования – найти коэффициенты генерации дифракционных максимумов, т. е. R_m при таких m , что θ_m действительно.

Задача содержит четыре геометрических параметра: k , a , y^* , θ_{in} . Структура параболического уравнения такова, что с точностью до перенормировки задача зависит всего от двух безразмерных комбинаций: от $\theta_{in}\sqrt{ka}$ и $y^*\sqrt{k/a}$. Первый параметр определяет для параболической задачи область очень малых углов, а именно, при

$$\theta_{in}\sqrt{ka} \ll 1$$

в задаче Л. А. Вайнштейна асимптотически $R_0 \approx -1$. Также, в соответствии с (11), величина $1/\sqrt{ka}$ по порядку близка к разнице $\theta_1 - \theta_0$. Второй безразмерный параметр представляет собой отношение разности высот экранов y^* к величине первой зоны Френеля $\sqrt{a/k}$. Именно величина первой зоны Френеля (а не длина волны) является значимым параметром в направлении оси y . Таким образом,

$$y^*\sqrt{k/a} \ll 1$$

соответствует малой разности высот экранов.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФОКСА–ЛИ И МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ВИНЕРА-ХОПФА

Как известно, в произвольной полосе $X_1 < x < X_2$, не содержащей экранов, параболическое уравнение (1) допускает явное решение

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(X_1, y')g(x - X_1, y - y')dy', \quad (12)$$

где

$$g(x, y) = \begin{cases} k^{1/2}(2\pi x)^{-1/2} \exp\{iky^2/(2x) - i\pi/4\}, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (13)$$

– функция Грина плоскости без экранов. Пользуясь данной формулой, нетрудно вывести систему интегральных уравнений, взяв в качестве неизвестных функций значения рассеянного поля u_{sc} на полупрямых $x = x_0 (= 0)$, $y > y_0 (= 0)$ и $x = x_1 (= a)$, $y > y_1 (= y^*)$:

$$u_{sc}(a, y) = \int_0^\infty u_{sc}(0, y')g(a, y - y')dy' - \int_{-\infty}^0 u_{in}(0, y')g(a, y - y')dy', \quad y > y^*, \quad (14)$$

$$\chi u_{sc}(0, y) = \int_{y^*}^\infty u_{sc}(a, y')g(a, y - y')dy' - \int_{-\infty}^{y^*} u_{in}(a, y')g(a, y - y')dy', \quad y > 0. \quad (15)$$

При выводе данных уравнений учитывались граничные условия (8). Кроме того, при выводе последнего уравнения учитывалось равенство (9), т. е. $u_{sc}(2a, y) = \chi u_{sc}(0, y)$.

Уравнения (14) и (15) представляют собой систему уравнений Фокса–Ли для рассматриваемой задачи. По-видимому, ее решение может быть получено итерационным методом. С точки зрения определения коэффициентов R_m такое решение не слишком перспективно, поскольку итерационный ряд сходится медленно. Кроме того, итерационный ряд не дает возможности определить важные асимптотические свойства коэффициентов генерации гармоник. Именно поэтому ниже (начиная со следующего раздела) строится принципиально новый метод решения задачи.

По системе (14), (15) может быть построено матричное уравнение Винера–Хопфа. Введем преобразования Фурье неизвестных функций

$$\widehat{U}_0(\xi) = \int_0^\infty u_{sc}(0, y)e^{-i\xi y}dy, \quad (16)$$

$$\widehat{U}_1(\xi) = \int_{y^*}^\infty u_{sc}(a, y)e^{-i\xi(y-y^*)}dy. \quad (17)$$

Кроме того, введем вспомогательные функции

$$\widehat{W}_0(\xi) = \int_{-\infty}^0 u_{sc}(-0, y) e^{-i\xi y} dy, \quad (18)$$

$$\widehat{W}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{y^*} u_{sc}(a-0, y) e^{-i\xi(y-y^*)} dy. \quad (19)$$

Система (14), (15) может быть переписана в виде

$$\begin{pmatrix} \widehat{W}_0 \\ \widehat{W}_1 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} \widehat{U}_0 \\ \widehat{U}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{r}, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{K}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{ika\theta_{in}^2 - i\xi y^* - ia\xi^2/(2k)\} \\ -\exp\{i\xi y^* - ia\xi^2/(2k)\} & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{r}(\xi) = \frac{-i}{\xi + k\theta_{in}} \begin{pmatrix} \exp\{i\xi y^* - ia\xi^2/(2k)\} \\ \exp\{ika\theta_{in}^2 - i\xi y^* - ia\xi^2/(2k)\} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В уравнении (20) неизвестные функции \widehat{U}_0 , \widehat{U}_1 должны быть регулярными и убывающими в нижней полуплоскости комплексного аргумента ξ , а неизвестные функции \widehat{W}_0 , \widehat{W}_1 должны быть регулярны и убывать в верхней полуплоскости.

Построенная задача Винера–Хопфа является матричной, и решение ее не известно авторам.

4. КРАЕВЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Основная идея “расщепления” заключается в сведении исходной задачи к двум (в данном случае) вспомогательным задачам. Введем краевые функции Грина v_0 и v_1 как решения следующих *неоднородных* параболических уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_0 = \delta(x-0, y), \quad (23)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_1 = \delta(x-a-0, y-y^*) \quad (24)$$

на плоскости с поглощающими экранами, описанными выше. Таким образом, во вспомогательных задачах имеются точечные источники. Эти источники изображены на рис. 3.

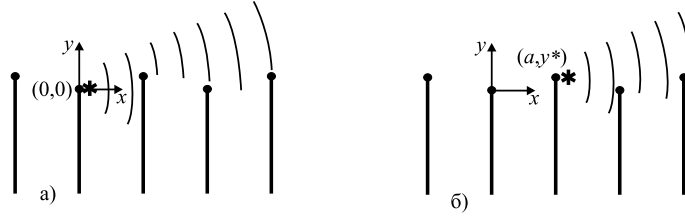


Рис. 3. Задачи для краевых функций Грина: Случай а) соответствует v_0 , Случай б) соответствует v_1 .

Аргументы $x-0$ и $x-a-0$ означают, что источники располагаются правее точек $(0,0)$ и (a, y^*) . Такое расположение гарантирует, что функция $v_0(x, y)$ в области $0 < x < a$ равна $g(x, y)$, а функция $v_1(x, y)$ в области $a < x < 2a$ равна $g(x-a, y-y^*)$.

Учитывая периодичность задачи вдоль оси x , легко видеть, что краевые функции Грина v_n для точечных источников, расположенных в краях всех остальных экранов, выражаются через v_0 и v_1 с помощью трансляций вдоль координаты x :

$$v_{m+2n}(x, y) = v_m(x - 2an, y).$$

Определим диаграммы направленности V_m краевых функций Грина v_m как коэффициент в старшем члене асимптотики

$$v_m(x, y) = g(x - x_m, y - y_m) V_m \left(\frac{y - y_m}{x - x_m} \right) + o \left((x - x_m)^{-1/2} \right), \quad m = 0, 1. \quad (25)$$

Параболическое уравнение позволяет формально построить явные выражения для $v_m(x, y)$ пользуясь формулой (12). Очевидно,

$$v_m(x, y) = 0 \quad \text{при } x < x_m. \quad (26)$$

Далее,

$$v_m(x, y) = g(x - x_m, y - y_m) \quad \text{при } x_m < x < x_{m+1}, \quad (27)$$

$$v_m(x, y) = \int_{y_n}^{\infty} v_m(x_n - 0, y') g(x - x_n, y - y') dy' \quad \text{при } x_n < x < x_{n+1}. \quad (28)$$

Таким образом, выражение для поля $v_m(x, y)$ в полосе $x_n < x < x_{n+1}$ содержит $n - m$ вложенных интегралов. Такие выражения, однако, не слишком удобны для вычисления диаграмм направленности функций $V_m(\theta)$.

Введем величины, играющие важную роль в дальнейшем изложении, а именно значения краевых функций Грина на краях экранов:

$$z_{m,n} = \lim_{x \rightarrow x_n - 0} v_m(x_n, y_n) \quad m < n. \quad (29)$$

Предельный переход необходим, поскольку в точке (x_n, y_n) решение параболического уравнения, определяемое формулой (28), не является непрерывным. Берется левый предел, поскольку слева от экрана поле гладко.

Докажем важную формулу, которая используется при выводе спектрального и эволюционного уравнений. Пусть рассматривается чуть более общая задача, в которой края поглощающих экранов имеют координаты (x_m, y_m) произвольные, а не связанные условием (2), (3). Для такой задачи также можно ввести краевые функции Грина. Более того, явный вид краевых функций Грина будет задаваться рекуррентными формулами (26), (27), (28). Рассмотрим семейство таких задач, индексируемое параметром α . В этом семействе величины y_m являются функциями α (достаточно гладкими). Краевые функции Грина этого семейства будем обозначать как $v_m(\alpha, x, y)$, а краевые значения (аналогичные (29)) как $z_{m,n}(\alpha)$.

Теорема 1. *Выполняется формула*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_m(\alpha, x, y)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{\partial y_m}{\partial \alpha} - \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} \right) z_{m,n}(\alpha) v_n(\alpha, x, y) - \frac{\partial y_m}{\partial \alpha} \frac{\partial v_m(\alpha, x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем для каждого x параметр $n(x)$ такой, что $x_{n(x)} < x \leq x_{n(x)+1}$. Доказательство теоремы элементарно проводится индукцией по $n(x) - m$. При этом используются формулы (27), (28). Действительно, при $n(x) = m$ работает формула (27), и этот случай проверяется легко (в правой части (30) отсутствует сумма). Это база индукции. Выполним индукционный переход. Пусть теорема верна для

$n(x) - m = l - 1$. Для $n(x) - m = l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{y_{m+l}}^{\infty} v_m(x_{m+l} - 0, y') g(x - x_{m+l}, y - y') dy' \\ &= -\frac{\partial y_{m+l}}{\partial \alpha} v_m(x_{m+l} - 0, y_{m+l}) g(x - x_{m+l}, y - y_{m+l}) \\ &\quad + \int_{y_{m+l}}^{\infty} \frac{\partial v_m(x_{m+l} - 0, y')}{\partial \alpha} g(x - x_{m+l}, y - y') dy' \end{aligned}$$

В последнем интеграле производная может быть преобразована по формуле (30) (здесь используется предположение индукции). Принимая во внимание, что

$$\int_{y_{m+l}}^{\infty} v_n(x_{m+l} - 0, y') g(x - x_{m+l}, y - y') dy' = v_n(x, y),$$

а также что

$$\begin{aligned} &\int_{y_{m+l}}^{\infty} \frac{\partial v_m(\alpha, x_{m+l} - 0, y')}{\partial \alpha} g(x - x_{m+l}, y - y') dy' \\ &= \left(-z_{m, m+l}(\alpha) v_{m+l}(\alpha, x, y) + \frac{\partial v_m(\alpha, x, y)}{\partial y} \right) \frac{\partial y_m}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

получаем справедливость (30) для $n(x) - m = l$.

5. ФОРМУЛА РАСЩЕПЛЕНИЯ

Формула расщепления связывает искомые коэффициенты генерации дифракционных порядков с диаграммами направленности краевых функций Грина. Эта формула дается следующей теоремой:

Теорема 2. Для m таких, что θ_m – действительная величина, выполняется тождество

$$R_m = \frac{\sum_{n=0}^1 V_n(\theta_{\text{in}}) V_n(\theta_m) \exp \{ ikx_n(\theta_m^2 - \theta_{\text{in}}^2)/2 -iky_n(\theta_m - \theta_{\text{in}}) \}}{2ika\theta_m(\theta_{\text{in}} + \theta_m)}. \quad (31)$$

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения из [5]. Коротко повторим основные этапы вывода формулы расщепления, не воспроизводя деталей. Применим к полному полю $u(x, y)$ оператор

$$H \equiv \frac{\partial}{\partial y} +iky\theta_{\text{in}}. \quad (32)$$

В [5] показано, что поле $w(x, y) = H[u](x, y)$ удовлетворяет параболическому уравнению и граничным условиям на краях, удовлетворяет условию излучения, имеет источники в вершинах (x_m, y_m) с амплитудами $u_m(x_m, y_m)$. Используя единственность решения дифракционной задачи, можно представить $w(x, y)$ как суперпозицию краевых функций Грина v_n :

$$H[u](x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x_n - 0, y_n)v_n(x, y). \quad (33)$$

Значения поля на краях экранов $u(x_m - 0, y_m)$ могут быть выражены через краевые функции Грина с помощью теоремы взаимности для параболического уравнения. Выражение имеет вид

$$u(x_m - 0, y_m) = \exp\{-ikx_m\theta_{\text{in}}^2/2 +iky_m\theta_{\text{in}}\} V_m(\theta_{\text{in}}). \quad (34)$$

Подставляя это выражение в (33) и переходя от полей к диаграммам направленности, получим (31).

Наиболее простой вид имеет формула (31) для зеркального отражения, т. е. для R_0 :

$$R_0 = \frac{(V_0(\theta_{\text{in}}))^2 + (V_1(\theta_m))^2}{4ika\theta_{\text{in}}^2}. \quad (35)$$

Таким образом, для решения исходной задачи нам необходимо тем или иным образом определить диаграммы направленности V_0, V_1 .

6. СПЕКТРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теорема 3. *Вектор-строка из диаграммы направленности $(V_0(\theta), V_1(\theta))$ удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:*

$$\frac{d}{d\theta}(V_0, V_1) = (V_0, V_1)\Pi(\theta y^*)C(\theta, y^*)\Pi^{-1}(\theta y^*), \quad (36)$$

с начальными условиями

$$V_0(+\infty) = 1, \quad V_1(+\infty) = 1, \quad (37)$$

где

$$\Pi(\theta y^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{-ik y^* \theta\} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$C(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} \\ C_{1,0} & C_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$C_{0,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} (x_{2m} - x_0) z_{0,2m} \exp\{ik(x_{2m} - x_0)\theta^2/2\}, \quad (40)$$

$$C_{1,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} (x_{2m+1} - x_0) z_{0,2m+1} \exp\{ik(x_{2m+1} - x_0)\theta^2/2\}, \quad (41)$$

$$C_{0,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} (x_{2m+2} - x_1) z_{1,2m+2} \exp\{ik(x_{2m+2} - x_1)\theta^2/2\}, \quad (42)$$

$$C_{1,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} (x_{2m+1} - x_1) z_{1,2m+1} \exp\{ik(x_{2m+1} - x_1)\theta^2/2\}. \quad (43)$$

Вывод спектрального уравнения дословно повторяет вывод соответствующего уравнения из [5]. Покажем здесь, как этот вывод может быть проделан с помощью формулы (30). Зафиксируем m (как 0 или 1). Введем семейство задач, имеющих такие же значения x_n , как (2), но иные значения y'_m :

$$y'_n = y_n + \alpha(x_n - x_m).$$

В силу того, что оператор

$$K_m = (x - x_m) \frac{\partial}{\partial y} - iky \quad (44)$$

является оператором симметрии параболического уравнения в классическом смысле, можно построить решения для всех α , зная решение для $\alpha = 0$:

$$v_n(\alpha, x, y) = v_n(x, y - \alpha(x - x_m)) \exp\{ik\alpha(y - y_m) + ik\alpha^2(x - x_m)/2\}.$$

Кроме того (например, из последнего равенства),

$$K_m[v_m] = -\frac{\partial v_m}{\partial \alpha}.$$

Применим к левой части последнего равенства формулу (30) и положим $\alpha = 0$. Получим

$$K_m[v_m](x, y) = \sum_{n=m+1}^{\infty} (x_n - x_m) z_{m,n} v_n(x, y).$$

Переходя в последней формуле от полей к диаграммам направленности, получим (36).

В [5] было показано, что спектральное уравнение может быть сформулировано в более общем виде. Аналогичное утверждение справедливо и в данном случае.

Теорема 4. *Выполняется обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \Pi(\theta y^*) C(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \Pi^{-1}(\theta y^*), \quad (45)$$

где

$$\bar{V}_{0,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l,0}(\theta) \exp\{ik(x_{2l} - x_0)p\}, \quad (46)$$

$$\bar{V}_{1,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l+1,0}(\theta) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_0)p\}, \quad (47)$$

$$\bar{V}_{0,1}(\theta, p) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{V}_{2l,1}(\theta) \exp\{ik(x_{2l} - x_1)p\}, \quad (48)$$

$$\bar{V}_{1,1}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l+1,1}(\theta) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_1)p\} \quad (49)$$

для

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_{m,n}(\theta) \\ &= -\exp\{ik(x_m - x_n)\theta^2/2\} \int_{-\infty}^{y_m} v_n(x_m - 0, y) \exp\{-ik\theta(y - y_n)\} dy, \quad m > n, \\ & \tilde{V}_{m,m}(\theta) \equiv 1, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\tilde{V}_{m,n}(\theta) \equiv 0, \quad m < n,$$

а p — произвольный комплексный параметр с неотрицательной мнимой частью.

Величины $\bar{V}_{0,0}(\theta, p)$ связаны с диаграммами направленности следующим образом:

$$V_0(\theta) = \bar{V}_{0,0}(\theta, 0) + \bar{V}_{1,0}(\theta, 0), \quad V_1(\theta) = \bar{V}_{0,1}(\theta, 0) + \bar{V}_{1,1}(\theta, 0). \quad (51)$$

Данные соотношения следуют из формулы аналогичной формуле (28) статьи [5], которая в данном случае имеет вид:

$$V_m(\theta) = 1 - \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp \left\{ ik \frac{\theta^2}{2} (x_n - x_m) \right\} \int_{-\infty}^{y_n} v_m(x_n - 0, y) \exp \{ ik\theta(y_m - y) \} dy. \quad (52)$$

Смысл величин, введенных выше, можно пояснить следующим образом. Формула (52) выражает диаграмму направленности краевой функции Грина через интегралы от поля на поверхностях экранов. Первый член, не содержащий интеграл (единица) представляет собой вклад непосредственно от точечного источника. Вклады от различных экранов можно рассматривать отдельно. Эти вклады тесно связаны с диаграммами направленности на многолистной поверхности, введенной в [5]. Параметр p не имеет физического смысла и представляет собой переменную дискретного преобразования Фурье по номеру экрана. При $p = 0$ из (45) следует спектральное уравнение (36).

Таким образом, если бы была построена матрица $C(\theta, y^*)$, можно было бы определить диаграммы направленности V_0, V_1 путем непосредственного интегрирования спектрального уравнения (36) с начальными условиями (37).

Формулы (40), (41), (42), (43) не могут быть использованы для непосредственного построения коэффициента $C(\theta)$, поскольку входящие в них ряды сходятся медленно. Ниже используется другая техника (основанная на ОЕ-уравнении или на эволюционном уравнении) для определения C .

7. ОЕ-УРАВНЕНИЕ

Введем обозначение для решения матричного линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau) = X(\tau)K(\tau). \quad (53)$$

Будем решать его вдоль контура h с начальной точкой τ_1 и конечной точкой τ_2 . Пусть начальное условие имеет следующий вид:

$$X(\tau_1) = I.$$

Тогда, по определению

$$OE_h [K(\tau) d\tau] \equiv X(\tau_2). \quad (54)$$

Теорема 5. *Функция $C(\theta, y^*)$ удовлетворяет следующему уравнению:*

$$OE_\gamma [\Pi(\theta y^*) C(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \Pi^{-1}(\theta y^*) d\theta] = T(p) \quad (55)$$

для любого p при $\text{Im}[p] \geq 0$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{ikap\} \\ -\exp\{ikap\} & 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

контур γ представляет собой действительную ось, проходимую в отрицательном направлении. В левой части θ рассматривается как независимая переменная, а p как параметр.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения из [5].

8. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ 1 ТИПА

Введем матрицу:

$$D(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} D_{0,0} & D_{0,1} \\ D_{1,0} & D_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$D_{0,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} z_{0,2m} \exp\{ik(x_{2m} - x_0)\theta^2/2\}, \quad (58)$$

$$D_{1,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} z_{0,2m+1} \exp\{ik(x_{2m+1} - x_0)\theta^2/2\}, \quad (59)$$

$$D_{0,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} z_{1,2m+2} \exp\{ik(x_{2m+2} - x_1)\theta^2/2\}, \quad (60)$$

$$D_{1,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} z_{1,2m+1} \exp\{ik(x_{2m+1} - x_1)\theta^2/2\}. \quad (61)$$

Легко видеть, что

$$C = \frac{1}{ik\theta} \frac{\partial D}{\partial \theta}. \quad (62)$$

Теорема 6. Вектор-строка из диаграмм направленности $(V_0(\theta), V_1(\theta))$ удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению по параметру y^* :

$$\frac{d}{dy^*}(V_0, V_1) = (V_0, V_1)\Pi(\theta y^*)\tilde{D}(\theta, y^*)\Pi^{-1}(\theta y^*), \quad (63)$$

где

$$\tilde{D}(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & D_{0,1} \\ -D_{1,0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Для доказательства этой теоремы воспользуемся формулой (30). В качестве параметра α возьмем y^* . Получим

$$\frac{\partial v_m(x, y)}{\partial y^*} = - \sum_{n=m+1}^{\infty} (\psi_n - \psi_m) z_{m,n} v_n(x, y) - \psi_m \frac{\partial v_m(x, y)}{\partial y},$$

где $\psi_n = 1$ для нечетных n и $\psi_n = 0$ для четных n . В частности,

$$\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y^*} = - \sum_{l=0}^{\infty} z_{0,2l+1} v_{2l+1}(x, y), \quad (65)$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y^*} = \sum_{l=0}^{\infty} z_{1,2l+2} v_{2l+2}(x, y) - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y}. \quad (66)$$

Переходя к диаграммам направленности, получим:

$$\frac{\partial V_0}{\partial y^*} = -V_1 \exp\{-ik\theta y^*\} \sum_{l=0}^{\infty} z_{0,2l+1} \exp\left\{ik(x_{2l+1} - x_0) \frac{\theta^2}{2}\right\}, \quad (67)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y^*} = V_0 \exp\{ik\theta y^*\} \sum_{l=0}^{\infty} z_{1,2l+2} \exp\left\{ik(x_{2l+2} - x_1) \frac{\theta^2}{2}\right\}. \quad (68)$$

Последняя пара уравнений может быть переписана в виде (63). Теорема доказана.

Как и в случае спектрального уравнения, эволюционное уравнение может быть записано в более общем виде для величин $\bar{V}_{m,n}(\theta, p)$.

Теорема 7. Справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \Pi(\theta y^*) \tilde{D}(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \Pi^{-1}(\theta y^*), \quad (69)$$

Для доказательства данного утверждения вернемся к (65)–(66). Домножим правую и левую часть на

$$-\exp\{ik(x_m - x_n)\theta^2/2 - ik\theta(y - y_n)\}, \quad n = 0, 1$$

и проинтегрируем по линии $x = x_m - 0$, $-\infty < y < y_m$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,0}(\theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} z_{0,2l+1} \exp\{ik(x_{2l+1} - x_0)\theta^2/2 - ik\theta y^*\} \tilde{V}_{m,2l+1} \quad (70)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,1}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} z_{1,2l+2} \exp\{ik(x_{2l+2} - x_1)\theta^2/2 + ik\theta y^*\} \tilde{V}_{m,2l+2} \quad (71)$$

Введем величины:

$$a_{l,n}(\theta) = z_{n,l} \exp\{ik(x_l - x_n)\theta^2/2\}. \quad (72)$$

Уравнения (70)–(71) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,0}(\theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,0} \tilde{V}_{m,2l+1}(\theta) \exp\{-ik\theta y^*\} \quad (73)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,1}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+2,1} \tilde{V}_{m,2l+2}(\theta) \exp\{ik\theta y^*\} \quad (74)$$

Заметим, что функции $\tilde{V}_{m,n}$ и коэффициенты $a_{l,n}$ удовлетворяют условиям периодичности

$$\tilde{V}_{m,n}(\theta) = \tilde{V}_{m+2,n+2}(\theta), \quad a_{m,n}(\theta) = a_{m+2,n+2}(\theta)$$

Кроме того, правые части уравнений имеют сверточный характер. Эти обстоятельства позволяют применить к уравнениям (73) и (74) дискретное преобразование Фурье. Домножим (73) и (74) на $\exp\{ik(x_m - x_n)p\}$ для произвольного p с $\text{Im}[p] \geq 0$ и просуммируем по всем m . В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \Pi(\theta y^*) \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_{0,1} \\ -\bar{a}_{1,0} & 0 \end{pmatrix} \Pi^{-1}(\theta y^*), \quad (75)$$

где

$$\bar{a}_{1,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,0}(\theta) \exp \{ik(x_{2l+1} - x_0)p\}, \quad (76)$$

$$\bar{a}_{0,1}(\theta, p)^* = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+2,1}(\theta) \exp \{ik(x_{2l+2} - x_1)p\}. \quad (77)$$

Кроме того, сравнивая (59)–(60) с (76)–(77), получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_{0,1} \\ -\bar{a}_{1,0} & 0 \end{pmatrix}(\theta, p) = \tilde{D}(\sqrt{\theta^2 + 2p}), \quad (78)$$

откуда и следует (63). Теорема доказана.

9. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ 2 ТИПА

Теорема 8. *Матрица $D(\theta, y^*)$ удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial D}{\partial y^*} \right) = -k^2 y^* \theta [\tilde{D}, \Xi] + \left[\frac{\partial D}{\partial \theta}, \tilde{D} \right], \quad (79)$$

где

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Будем называть (79) эволюционным уравнением 2 типа.

Для доказательства рассмотрим уравнения (45) и (69), выписанные относительно матрицы $(\bar{V}_{m,n})$ при $p = 0$ и воспользуемся очевидным свойством:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y^*} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Раскрывая скобки в данном равенстве и исключая величины $\bar{V}_{m,n}$, получим матричное уравнение

$$\frac{1}{ik\theta} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\Pi \frac{\partial D}{\partial \theta} \Pi^{-1} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Pi \tilde{D} \Pi^{-1} \right) + \frac{1}{ik\theta} \Pi \left[\frac{\partial D}{\partial \theta}, \tilde{D} \right] \Pi^{-1}. \quad (82)$$

Домножая уравнение слева на Π^{-1} и справа на Π , а также учитывая, что

$$\Pi^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial y^*} = -ik\theta \Xi, \quad \frac{\partial \Pi^{-1}}{\partial y^*} \Pi = ik\theta \Xi, \quad (83)$$

получаем (79). Теорема доказана.

Интегрируя эволюционное уравнение 2-го типа при $y^* = 0$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{D}(\theta, 0)}{\partial y^*} = \begin{pmatrix} (D_{0,1})^2 & 0 \\ 0 & -(D_{0,1})^2 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Выражение для $D_{0,1}(\theta, 0)$ может быть определено с помощью (60):

$$D_{0,1}(\theta, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} z_{0,2m+1} \exp \{ ik(x_{2m+1})\theta^2/2 \}, \quad (85)$$

Величины $z_{0,n}$ при $y^* = 0$ представляется следующими вложенными интегралами:

$$z_{0,n} = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} g(a, y_1) g(a, y_2 - y_1) \dots g(a, y_n - y_{n-1}) g(x - x_n, y - y_n) dy_1 \dots dy_n. \quad (86)$$

Интегралы вида (86) вычислены явно в [6]. Получаем

$$D_{0,1}(\theta, 0) = \sqrt{\frac{k}{2\pi ai}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{inka\theta^2/2}}{n^{3/2}} - \frac{e^{inka\theta^2}}{(2n)^{3/2}} \right) \quad (87)$$

Из (84) следует, что

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial y^*}(\theta, 0) = 0. \quad (88)$$

Таким образом матрица $\tilde{\mathbf{D}}$ при $y^* \sqrt{k/a} \ll 1$ дается следующим выражением:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\theta, y^*) = \tilde{\mathbf{D}}(\theta, 0) + O\left(\left(y^* \sqrt{k/a}\right)^2\right), \quad (89)$$

где

$$\tilde{\mathbf{D}}(\theta, 0) = \begin{pmatrix} 0 & D_{0,1}(\theta, 0) \\ -D_{0,1}(\theta, 0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

10. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА R_0

Введем следующее обозначение:

$$\eta = y^* \sqrt{k/a}. \quad (91)$$

Вернемся к рассмотрению эволюционного уравнения 1 типа (63). Будем искать решение в виде разложения по малому параметру η :

$$V_m(\theta, y^*) = V^{(0)}(\theta) + \eta V_m^{(1)}(\theta) + \eta^2 V_m^{(2)}(\theta) + \dots, \quad m = 0, 1, \quad (92)$$

где $V^{(0)}$ – решение классической задачи Вайнштейна (случай $y^* = 0$), которое вычисляется явно и имеет следующий вид [4]:

$$V^0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\theta \sqrt{-in/2ka})}{n} \right\}, \quad (93)$$

где $\operatorname{erfc}(z)$ – дополнительная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Подставляя (89) и (92) в (63) и приравнявая члены при одинаковых степенях η , получим в первом приближении:

$$V_m = V^0 - (-1)^m D_{0,1}(\theta, 0) V^0(\theta) \eta + \dots \quad (94)$$

Подставляя (94) в формулу расщепления (31), легко видеть, что линейный член по η не дает вклада в коэффициент отражения R_0 . Такой результат представляется очевидным с точки зрения симметрии задачи.

Чтобы определить квадратичную поправку по η к диаграммам направленности, необходимо воспользоваться соотношением (88), полученным с помощью эволюционного уравнения второго типа. А именно, в силу (63),

$$\frac{\partial^2}{\partial (y^*)^2} (V_0, V_1) = (V_0, V_1) \Pi \left(\tilde{D}^2 + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial y^*} + ik\theta [\tilde{D}, \Xi] \right) \Pi^{-1}. \quad (95)$$

Заметим, что нас интересует значение второй производной при $y^* = 0$, что дает $\Pi = I$. Кроме того,

$$\tilde{D} = [D, \Xi].$$

Учитывая (95) и (88), во втором приближении имеем

$$\begin{aligned} V_m &= V^0 - (-1)^m D_{0,1}(\theta, 0) V^0(\theta) \eta \\ &\quad - \frac{a}{k} \frac{\eta^2}{2} \left((D_{0,1}(\theta, 0))^2 - ik\theta D_{0,1}(\theta, 0) \right) V^0(\theta) + \dots \end{aligned} \quad (96)$$

Подставляя выражение для диаграмм направленности в формулу расщепления, получим следующее выражение для коэффициента отражения R_0 :

$$R_0 = \frac{(V^0(\theta))^2 (1 + ia\theta D_{0,1}(\theta, 0)\eta^2)}{2ika\theta^2} + o(\eta^2). \quad (97)$$

При малых θ формула (97) принимает следующий вид:

$$R_0 = -1 - \zeta \left(\frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{ka}{\pi}} (1-i)\theta - \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{ka}{\pi}} (1+i) 2^{-5/2} (2\sqrt{2}-1) \theta \eta^2 + o(\eta^2). \quad (98)$$

Аналогично результату Вайнштейна, из (98) следует, что высокочастотные моды, близкие к частоте отсечки, в волноводе со смещенными стенками при $y^* \sqrt{k/a} \ll 1$ имеют коэффициент отражения от торца волновода близкий к -1 . Это следует из того, что поправка, содержащая η^2 , пропорциональна θ .

Авторы полагают, что коэффициент $R_0(\theta, y^*)$ стремится к -1 при произвольных y^* в пределе $\theta \rightarrow 0$. Однако это утверждение доказывается иными средствами, и авторы планируют посвятить этому вопросу отдельную статью.

11. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим коэффициенты $C(\sqrt{\theta^2 + 2p})$ непосредственно решив ОЕ-уравнение (55).

Введем новые переменные

$$\tau = ka\theta^2 + \beta, \quad \beta = 2kap.$$

ОЕ-уравнение принимает следующий вид:

$$\text{ОЕ}_{\gamma'(\beta)} \left[\frac{B(\tau, \beta) d\tau}{2\sqrt{ka(\tau - \beta)}} \right] = T'(\beta), \quad \text{Im}[\beta] \geq 0, \quad (99)$$

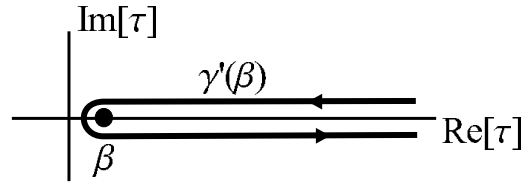
где

$$\begin{aligned} B(\tau, \beta) &= \Pi \left(\sqrt{\frac{\tau - \beta}{ka}} \right) C'(\tau) \Pi^{-1} \left(\sqrt{\frac{\tau - \beta}{ka}} \right), \\ T'(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{i\beta/2\} \\ -\exp\{i\beta/2\} & 1 \end{pmatrix}, \\ C'(\tau) &= C \left(\sqrt{\tau/(ka)} \right). \end{aligned} \quad (100)$$

а τ изменяется вдоль контура γ , изображенного на рис. 4.

Для расчета коэффициентов генерации R_m необходимо определить $C'(\tau)$ на положительном участке действительной оси. Однако, матрица $C'(\tau)$ является периодической на отрезке $(0, 2\pi)$:

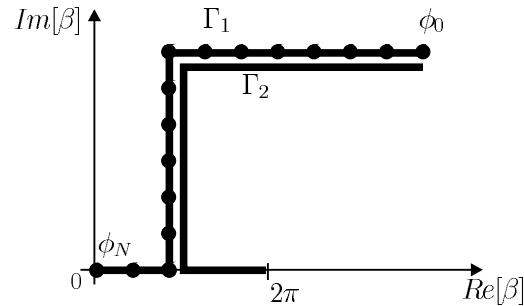
$$C'(\tau + 2\pi n) = \Pi_n C'(\tau) \Pi_n^{-1}, \quad (101)$$

Рис. 4. Контур $\gamma'(\beta)$.

где

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{-i\pi n\} \end{pmatrix}, \quad (102)$$

поэтому достаточно решить ОЕ-уравнение лишь на этом отрезке. На рис. 5 изображены контуры Γ_1 и Γ_2 вдоль которых решается ОЕ-уравнение. Будем решать ОЕ-уравнение градиентным методом. На-

Рис. 5. Контуры Γ_1 и Γ_2 .

чальная точка ϕ_0 имеет достаточно большую мнимую часть, такую что мы можем положить

$$C'(\phi_0) = 0.$$

Разобьем контур Γ_1 на маленькие отрезки с помощью достаточного количества узлов ϕ_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Пусть $\phi_N = \epsilon$, где ϵ — малое положительное число. Такой выбор узлов обусловлен тем, что ОЕ-уравнение имеет особенности в точках $\beta = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Определим шаг за шагом S в точках $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N$. Для этого на n -ом шаге решим ОЕ-уравнение (99) на отрезке (ϕ_n, ϕ_0) с параметром $\beta = \phi_n$.

В процессе решения будем полагать, что коэффициент $C'(\tau)$ известен в узлах $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{n-1}$. Коэффициент в точке ϕ_n находится градиентным подбором так, чтобы на выбранном контуре выполнялось ОЕ-уравнение. В качестве начального значения выбирается значение в предыдущей точке:

$$C'(\tau)(\phi_0) = C'(\tau)(\phi_{n-1}). \quad (103)$$

Далее вычисляется невязка:

$$\text{ОЕ}_\gamma \left[\frac{B(\tau, \phi_n)}{2\sqrt{ka(\tau - \phi_n)}} \right] - T(\phi_n) \quad (104)$$

Если невязка не равна нулю, будем уменьшать невязку до тех пор, пока не достигнем нужной точности. После этого переходим к шагу $n + 1$ и так далее.

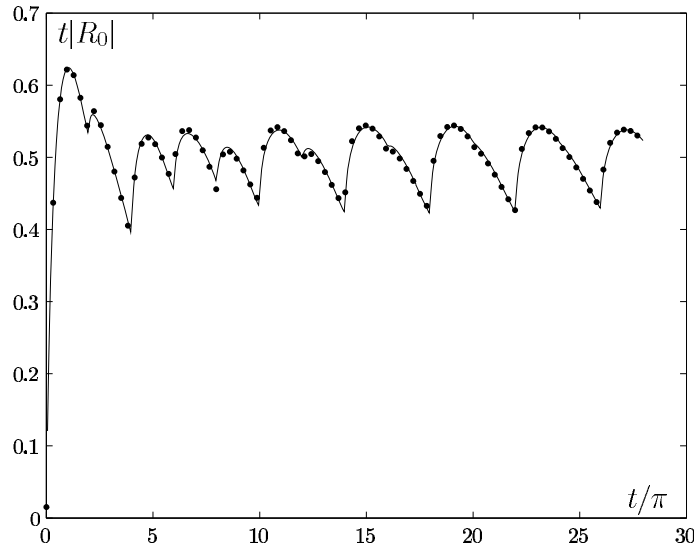


Рис. 6. Значения $t|R_0(t)|$, при $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/4$. Сплошная линия соответствует методу спектрального уравнения, а точки соответствуют прямому счету.

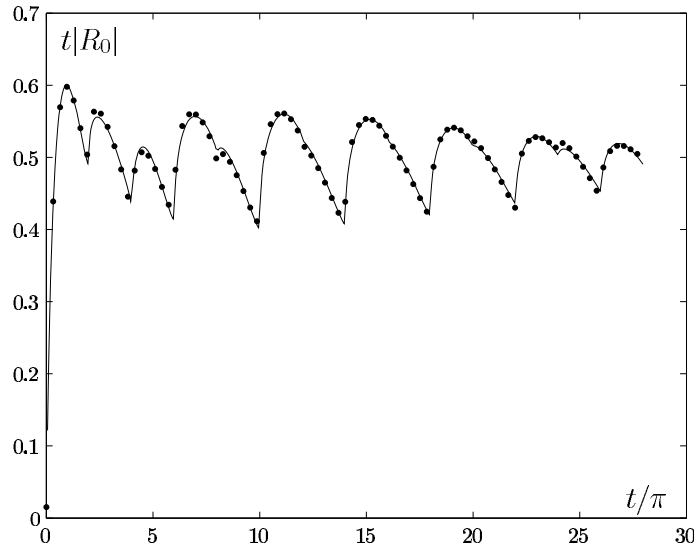


Рис. 7. Значения $t|R_0(t)|$, при $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/3$. Сплошная линия соответствует методу спектрального уравнения, а точки соответствуют прямому счету.

Аналогичная процедура повторяется с контуром Γ_2 . После этого все коэффициенты $C(\tau)$ становятся известными. Далее решается спектральное уравнение (36) вдоль контуров $\Gamma_{1,2}$, $\Gamma_{1,2} + 2\pi$, $\Gamma_{1,2} + 4\pi$ и так далее. Таким образом становятся известными диаграммы направленности V_0, V_1 . Наконец, применяя формулу расщепления (31), получаем коэффициенты генерации дифракционных порядков R_m . Для проверки корректности вычисления коэффициентов генерации использовался прямой счет на основе интегральных формул вида (28). На рис. 8 и рис. 9 изображены графики зависимости $t|R_0(t)|$, где $t = ka\theta_{in}^2$ при следующих значениях параметров:

$$\eta = 1/4, \quad \text{и} \quad \eta = 1/3.$$

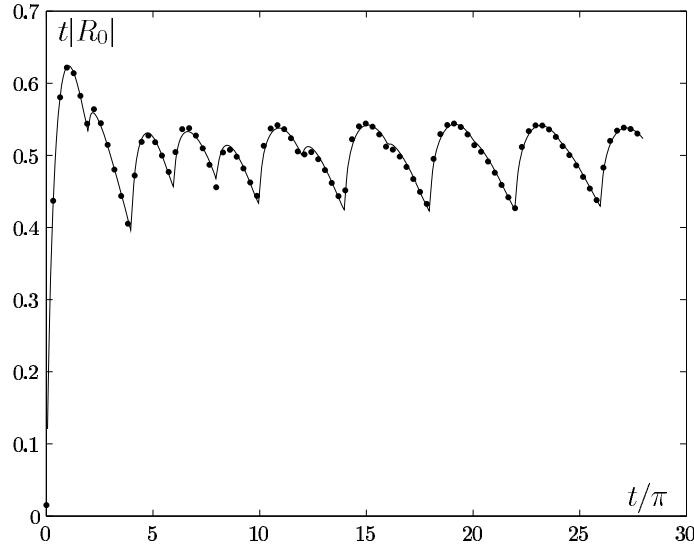


Рис. 8. Значения $t|R_0(t)|$, при $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/4$. Сплошная линия соответствует методу спектрального уравнения, а точки соответствуют прямому счету.

Следует отметить, что численно определяются лишь диаграммы направленности краевых функций Грина. Формула расщепления не проверяется. Это не делается, так как метод формулы расщепления хорошо изучен (см. например [7]).

12. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе развивается метод формулы расщепления и спектрального уравнения в приложении к задачам дифракции на периодических решетках, предложенный в [5]. Данный подход позволил получить важные аналитические результаты. Основным результатом статьи является асимптотическая формула для коэффициента генерации главного дифракционного максимума (98), полученная с помощью эволюционного уравнения. С помощью (98) можно рассчитывать добротность резонаторов Фабри-Перо с зеркалами разной длины или с параллельно смещенными зеркалами при условии малости смещений ($y^* \sqrt{k/a} \ll 1$).

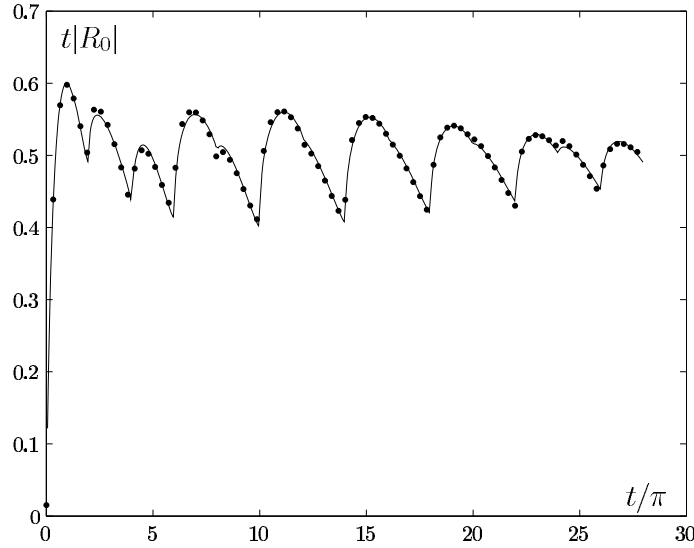


Рис. 9. Значения $t|R_0(t)|$, при $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/3$. Сплошная линия соответствует методу спектрального уравнения, а точки соответствуют прямому счету.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы*. М., Сов. радио (1966).
2. Л. А. Вайнштейн, *Теория диффракции и метод факторизации*. М., Сов. радио (1966).
3. E. D. Shabalina, N. V. Shirgina, and A. V. Shanin, *High Frequency Modes in a Two Dimensional Rectangular Room with Windows*. — *Acoustical Physics* **56** (2010), 525–536.
4. A. V. Shanin, *Weinstein's Diffraction Problem: Embedding Formula and Spectral Equation in Parabolic Approximation*. — *SIAM J. Appl. Math.* (2009), 1201–1218.
5. А. В. Шанин, *Диффракция высокочастотной волны на решетке со сложным периодом при скользющем падении*. — *Зап. науч. сем. ПОМИ* **409** (2012), 212–239.
6. J. Boersma, *On certain multiple integrals occurring in a waveguide scattering problem*. — *SIAM J. Math. Anal.* **9** (1978), 377–393.
7. C. M. Linton, P. Mciver, *Handbook of Mathematical Techniques for Wave/Structure Interactions*. Chapman & Hall/CRC (2001).

Korol'kov A. I., Shanin A. V. Diffraction by grating consisting of screens with different height: new equations.

A 2D problem of diffraction of a plane wave by a grating consisting of screens of different heights is studied. The incident wave travels at a grazing incidence angle. The consideration is held in the parabolic approximation. Screens are supposed to be perfectly absorbing. Edge Green's functions of the problem are introduced. Embedding formula and a spectral equation are proven. An OE-equation for the unknown coefficient of spectral equation is derived. An evolution equation which describes dependence of the edge Green's functions on geometrical parameter of problem (screen height) is derived. An asymptotic estimation of the reflection coefficient is obtained by using the evolution equation.

Физический Факультет,
МГУ им. М.В.Ломоносова,
Дом 1, строение 2,
Ленинские горы,
119991, ГСП-2, Москва, Россия
E-mail: korolkov@physics.msu.ru
a.v.shanin@gmail.com

Поступило 8 декабря 2013 г.