Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 422, 2014 г.

А. П. Качалов

РЕШЕНИЕ ЛУЧЕВОГО ТИПА ДЛЯ ВОЛН КОНЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

1. Формулировка задачи. Рассмотрим нелинейную неоднородную изотропную упругую среду. Такая среда может быть охарактеризована свободной энергией $\mathcal{A}(I_1, I_2, I_3, \mathbf{x})$, которая является гладкой функцией всех своих параметров и I_α, $\alpha = 1, 2, 3,$– три инварианта тензора деформации D_{ik} вектора смещения $\mathbf{u}$,

$$D_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_k + \partial_k u_i + \partial_i u_l \cdot \partial_k u_l\right), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &I_1 = \operatorname{tr} D, \\ &I_2 = D_{11}D_{22} - D_{12}^2 + D_{22}D_{33} - D_{23}^2 + D_{33}D_{11} - D_{31}^2, \\ &I_3 = \det D. \end{aligned} \tag{2}$$

Для случая физически линейной среды (ФЛС) свободная энергия имеет вид:

$$\mathcal{A} = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2. \tag{3}$$

Тенор напряжений Кирхгофа σ_{ik} [1, 2] для упругой среды может быть выражен через производные от свободной энергии

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial(\partial_k u_i)} = \alpha\rho_{ik} - \beta\rho_{ir}D_{rk} + \gamma\rho_{ir}D_{rs}D_{sk}, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_2} + I_2\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_3}, \quad \beta = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_2} + I_1\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_3}, \quad \gamma = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_3} \tag{5}$$

и

$$\rho_{ir} = \delta_{ir} + \partial_r u_i. \tag{6}$$

Ключевые слова: нелинейная упругая среда, конечные деформации, лучевой метод.

Работа была поддержана грантами РФФИ 11-01-00407А и 14-01-00535.

Для физически линейной среды мы имеем

$$\alpha = \lambda I_1, \quad \beta = -2\mu, \quad \gamma = 0. \tag{7}$$

Уравнения движения произвольной нелинейной упругой могут быть записаны как уравнения Эйлера, соответствующие плотности энергии

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{A} = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x})(\partial_t \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}) + \mathcal{A}(I_1, I_2, I_3),$$

где $\mathcal{K}$ – плотность кинетической энергии среды,

$$\varrho \partial_t^2 u_i = \partial_k \sigma_{ik}. \tag{8}$$

Для физически линейной среды уравнения движения могут быть записаны, как

$$\varrho \partial_t^2 u_i = \partial_k \left(\lambda \rho_{ik} I_1 + 2\mu \rho_{ir} D_{rk}\right). \tag{9}$$

2. Решение лучевого типа. Мы будем искать решение лучевого типа для волн конечной деформации для уравнений упругости в виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t; \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} U^{(k)}(\tau, \mathbf{x}, t)\epsilon^k. \tag{10}$$

Здесь

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \epsilon^{-1}\theta(\mathbf{x}, t), \quad |\nabla\theta| \neq 0 \tag{11}$$

и ϵ – это малый параметр задачи. Для волн малой деформации задача рассматривалась в [3].

Для волн конечной деформации мы должны предположить, что $U^{(0)} = U^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ и не зависит от τ, иначе тензор деформации будет большой величиной.

3. Волна Бленда. В произвольной нелинейной однородной упругой среде в любом направлении распространяется единственная плоская волна, которая называется волной Бленда [4]. Для волны распространяющейся в направлении x_1

$$u_1 = 0, \quad u_2 = U_2(\tau), \quad u_3 = U_3(\tau), \quad \tau = x - vt$$

и

$$U_2(\tau) = M\int_0^{\tau} \cos\Psi(\tau')\,d\tau', \quad U_3(\tau) = M\int_0^{\tau} \sin\Psi(\tau')d\tau',$$

и $\Psi(\tau)$ – произвольная гладкая функция. В этом случае все инварианты тензора деформации и функции α, β, γ являются константами и выражаются через амплитуду M. Например, $I_1 = M^2/2$, $I_2 = -M^2/4$, $I_3 = 0$.

Первое из уравнений нелинейной упругости будет выполняться тождественно ($i = 1$) Два другие уравнения ($i - 2, 3$) для ненулевой амплитуды M эквивалентны и дают нам уравнение для скорости плоской волны.

$$v = \sqrt{[\alpha - 0.5\beta(1 + M^2) + 0.25\gamma(M^4 + 2M^2)]/\varrho}.$$

В частности, для физически линейной среды,

$$v = \sqrt{[\mu + 0.5(\lambda + 2\mu)M^2]/\varrho}.$$

4. Главный член асимптотического разложения. Рассматривая шаг за шагом старшие члены асимптотических разложений всех параметров задачи, мы видим, что главный член асимптотики уравнений (9) будет порядка -1 по параметру ϵ:

$$\varrho \ddot{U}_i^{(1)} \theta_t^2 = \{\lambda(\dot{I}_1^{(0)} \rho_{ik}^{(0)} + I_1^{(0)} \dot{\rho}_{ik}^{(0)}) + 2\mu(\dot{\rho}_{il}^{(0)} D_{lk}^{(0)} + \rho_{il}^{(0)} \dot{D}_{lk}^{(0)})\}\theta_k, \qquad (12)$$

где $\dot{a} = \partial_\tau a$. После простых вычислений эта система уравнений может быть преобразована в линейную систему уравнений по отношению к $\ddot{\mathbf{U}}^{(1)}$:

$$A_{is} \ddot{U}_s^{(1)} = 0, \qquad (13)$$

где коэффициенты A_{is} этой системы являются функциями $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{U}}^{(1)}$, и первых производных $\partial_k \theta$, $\partial_t \theta$, $\partial_k U_i^{(0)}$.

$$\begin{aligned} A_{is} = \delta_{is}[(\lambda I_1^{(0)} (\nabla\theta)^2 + 2\mu D_{kl}^{(0)} \theta_k \theta_l - \varrho \theta_t^2] + (\lambda + \mu)\rho_{il}^{(0)} \theta_l \rho_{sk}^{(0)} \theta_k \\ + \mu \rho_{il}^{(0)} \rho_{sl}^{(0)} (\nabla\theta)^2 = -a\delta_{is} + (\lambda + 2\mu) b_i b_s + \mu R_{is}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Здесь

$$\rho_{ik}^{(0)} = \delta_{ik} + \partial_k U_i^{(0)} + \dot{U}_i^{(1)} \theta_k = S_{ik} + \dot{U}_i^{(1)} \theta_k,$$

$$b_i = \rho_{ik}^{(0)} \theta_k = S_{ik} \theta_k + \dot{U}_i^{(1)} (\nabla\theta)^2,$$

$$S^t \cdot S = I + 2\widetilde{D}^{(0)}, \quad \widetilde{D}_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2}(\partial_k U_i^{(0)} + \partial_i U_k^{(0)} + \partial_i U_s^{(0)} \partial_k U_s^{(0)}),$$

$$D_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2}(\rho_{si}^{(0)} \rho_{sk}^{(0)} - \delta_{ik}), \quad I_1^{(0)} = D_{kk}^{(0)} = \frac{1}{2}(\rho_{sk}^{(0)} \rho_{sk}^{(0)} - 3), \qquad (15)$$

$$a = \varrho(\partial_t \theta)^2 - \lambda I_1^{(0)} (\nabla\theta)^2 - 2\mu D_{rk}^{(0)} \theta_r \theta_k,$$

$$R = SR^{(0)}S^t, \quad R_{ik}^{(0)} = (\nabla\theta)^2\delta_{ik} - \theta_i\theta_k.$$

Заметим, что симметричная матрица R не зависит от τ.

Используя формулу (15) мы видим, что

$$D_{ik}^{(0)}\theta_i\theta_k = \frac{1}{2}((\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\nabla\theta)^2) = I_1^{(0)}(\nabla\theta)^2 + r, \tag{16}$$

где

$$r = (\partial_k U_i^{(0)} + \frac{1}{2}\partial_i U_s^{(0)}\partial_k U_s^{(0)})(\theta_i\theta_k - \delta_{ik}(\nabla\theta)^2) = \operatorname{tr}(\widetilde{D}^{(0)}R^{(0)}).$$

Прежде всего мы отметим некоторые соотношения, которые нам потребуются в дальнейшем.

$$\dot{D}_{ik}^{(0)}\theta_i\theta_k = b_s\dot{b}_s = \dot{I}_1^{(0)}(\nabla\theta)^2, \quad \dot{a} = -(\lambda+2\mu)\dot{I}_1^{(0)}(\nabla\theta)^2. \tag{17}$$

Тогда уравнение (13) Может быть переписано, как

$$\frac{d}{d\tau}\left([R_{is} - \delta_{is}a/\mu]\, b_s\right) = 0. \tag{18}$$

Следовательно, мы имеем интегралы

$$[R_{is} - \delta_{is}a/\mu]\, b_s = \Psi_i(\mathbf{x}, t). \tag{19}$$

Мы видим, что важную роль в исследовании имеют матрицы R и S. Рассмотрим некоторые свойства матрицы R.

5. Свойства матриц R и S. 1. Матрица R – это вещественная симметричная матрица. Таким образом, имеется ортонормальный базис $X_i^{(m)}$, $m = 0, 1, 2$, вещественных собственных векторов матрицы R, соответствующих собственным числам $\Lambda^{(m)}$. Так как R не зависит от τ, тогда эти собственные числа тоже не зависят от τ. Мы можем также выбрать собственные вектора $X_i^{(m)}$ независимыми от τ.

ii. Одно из собственных чисел R, скажем $\Lambda^{(0)}$ равно нулю. В самом деле, если $\det S \neq 0$, тогда мы можем взять $\mathbf{X}^{(0)} = (S^t)^{-1}\nabla\theta$. В противном случае мы можем взять в качестве $\mathbf{X}^{(0)}$ собственный вектор S^t соответствующий нулевому собственному числу.

Разложим вектор b_i по базису:

$$b_i = \kappa^{(m)}X_i^{(m)}. \tag{20}$$

Тогда (19) может быть переписано в виде

$$(\Lambda^{(m)} - a/\mu)\kappa^{(m)} = \Psi_i X_i^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2. \tag{21}$$

Если $a \neq \Lambda^{(m)}\mu$ мы можем выразить κ_m через a.

$$\kappa^{(m)} = \Psi_i X_i^{(m)} / \left(\Lambda^{(m)} - a/\mu\right). \tag{22}$$

Лемма 1. *Пусть все собственные значения R имеют кратность* 1. *Тогда имеются только постоянные по τ периодические решения $\mathbf{U}^{(1)}$ системы* (13).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $a \not\equiv \Lambda^{(m)}$, $m = 0, 1, 2$. Тогда из формул (15), (16), (20) и (22) следует, что

$$a = \varrho(\partial_t \theta)^2 - \frac{(\lambda + 2\mu)}{2} \left[\sum_{m=0}^{2} \frac{(\Psi_i X_i^{(m)})^2}{(\Lambda^{(m)} - a/\mu)^2} - (\nabla\theta)^2 \right] + \lambda r$$

так, что a не зависит от τ как корень полиномиального уравнения с коэффициентами, которые не зависят от τ. Тогда из уравнения (22) следует, что все $\kappa^{(m)}$ независимы от τ. В результате мы имеем, что $\mathbf{U}^{(1)}$ не зависит от τ. Это противоречит нашим предположениям.

Пусть теперь

$$a = \Lambda^{(M)}(\mathbf{x}, t) \tag{23}$$

для некоторого M в окрестности точки $(\mathbf{x}, t)$. Тогда, во первых a независима от τ в этой окрестности. Следовательно $\kappa^{(m)}$, $m \neq M$, не зависят от τ. Так, что $I^{(0)}$ и, следовательно, a зависит от τ только через $\kappa^{(M)}$. Тогда из уравнения (23) мы получаем полиномиальное уравнение для $\kappa^{(M)}$ с коэффицинтами, зависящими только от $(\mathbf{x}, t)$. Таким образом $\kappa^{(m)}$, $m = 0, 1, 2$, не зависит от τ. В результате приходим к противоречию.

Далее мы будем рассматривать только случай невырожденной матрицы S. Тогда $R^{(0)}$ и $R \neq 0$ имеет тоже самое число нулевых собственных значений ($\equiv 1$). Таким образом, имеется только одна возможность построить непостоянное периодическое решение. В дальнйшем мы будем предполагать, что матрица R имеет одно нулевое собственное значение ($\Lambda^{(0)} = 0$) и два совпадающих собственных значения $\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)} = \Lambda \neq 0$. Собственный вектор $\mathbf{X}^{(0)}$, который соответствует нулевому собственному значению получается посредством нормализации вектора $(S^t)^{-1}\nabla\theta$. Двумерное собственное пространство, соответствующее ненулевому собственному значению Λ может быть представлено как линейная оболочка собственных векторов $\mathbf{Y}^{(1)} = S\mathbf{n}^1$, $\mathbf{Y}^{(2)} = S\mathbf{n}^2$. Возьмем ортонормальный базис векторов $\mathbf{X}^{(m)}$,

$m = 1, 2$, в этой плоскости. Легко видеть, что

$$\Lambda = (\nabla\theta)^2(1+2\beta), \quad \beta = (\nabla\theta)^2(S\mathbf{n}^m, S\mathbf{n}^m) = (\widetilde{D}^{(0)}\mathbf{n}^m, \mathbf{n}^m), \quad m = 1, 2.$$

Заметим, также, что $(\widetilde{D}^{(0)}\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)) = 0$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\Lambda\delta^{lm} &= (\Lambda\mathbf{n}^l, \mathbf{n}^m) = (R^{(0)}S^tS\mathbf{n}^l, \mathbf{n}^m) = ((I + 2\widetilde{D}^{(0)})\mathbf{n}^l, R^{(0)}\mathbf{n}^m) \\ &= (\nabla\theta)^2(\delta^{lm} + 2(\widetilde{D}^{(0)}\mathbf{n}^l, \mathbf{n}^m)), \quad m, l = 1, 2. \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 2. *Если матрица S – невырождена, тогда матрица R имеет собственное значение кратности 2 в том, и только в том случае, если*

$$(\widetilde{D}^{(0)}\mathbf{n}^l, \mathbf{n}^m) = \beta\delta^{lm}$$

с некоторым скаляром β. Ненулевое собственное значение кратности 2 равно $(\nabla\theta)^2(1+2\beta)$.

Доказательство. Если R имеет собственное значение кратности 2, тогда мы доказали формулу леммы 2. В ортонормальном базисе $\nabla\theta/|\nabla\theta$, $\mathbf{n}^m$, $m = 1, 2$, собственные значения R совпадают с собственными значениями $(I + 2\widetilde{D}^{(0)})R^{(0)}$. Последние равняются 0 и $(\nabla\theta)^2(1+2\beta)$ кратности 2. Лемма доказана. $\square$

Условие на собственные значения эквивалентно соотношению

$$(\operatorname{tr} R)^2 - 4J_2 = 0. \tag{24}$$

Здесь

$$\operatorname{tr} R = \sum_{i,l}((\nabla\theta)^2 S_{il}S_{il} - S_{il}\theta_l S_{im}\theta_m) = \frac{1}{2}\sum_i\sum_{k\neq l}(S_{ik}\theta_l - S_{il}\theta_k)^2, \tag{25}$$

и J_2 второй инвариант матрицы R.

6. Уравнение эйконала. Пусть уравнение (24) выполнено. Тогда мы можем разложить вектор $\mathbf{b}$ по ортонормальному базису $\mathbf{X}^{(m)}$, $m = 0, 1, 2$,

$$\mathbf{b} = \sum_m \kappa^{(m)}\mathbf{X}^{(m)}. \tag{26}$$

Уравнение (19) можт быть переписано как система уравнений по отношению к $\kappa^{(m)}$, $m = 0, 1, 2$:

$$a\kappa^{(0)} = -\mu\Psi_i X_i^{(0)}, \tag{27}$$

$$(a - \Lambda\mu)\kappa^{(m)} = -\mu\Psi_i X_i^{(m)}, \quad m = 1, 2.$$

Чтобы иметь нетривиальное решение этого уравнения, мы должны удовлетворить уравнению эйконала

$$(a - \Lambda\mu) = 0. \tag{28}$$

7. Условия разрешимости. Из уравнения (28) мы можем видеть, что скаляр a и, следовательно, $I_1^{(0)}$ не зависят от τ. Используя (16), мы получаем, что

$$(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \sum_m (\kappa^{(m)})^2$$

также не зависит от τ. Из первого уравнения (27) следует, что $\kappa^{(0)}$ не зависит от τ и, тем самым,

$$(\kappa^{(1)})^2 + (\kappa^{(2)})^2 = M^2(\mathbf{x}, t). \tag{29}$$

Для того, чтобы удовлетворить два последних уравнения (27), мы должны выполнить условия разрешимости

$$\Psi_i X_i^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2,$$

так, что

$$\Psi_i = \psi X_i^{(0)}. \tag{30}$$

Из уравнения

$$\dot{\mathbf{U}}^{(1)} = (\mathbf{b} - S\nabla\theta)(\nabla\theta)^{-2}$$

следует, что

$$\langle \mathbf{b} \rangle = S\nabla\theta; \quad \langle \kappa^{(m)} \rangle = (\mathbf{X}^{(m)}, S\nabla\theta), \quad m = 0, 1, 2. \tag{31}$$

В частности

$$\kappa^{(0)} \equiv (\nabla\theta)^2 / |(S^t)^{-1}\nabla\theta|, \tag{32}$$

так, что

$$\psi = -\Lambda(\nabla\theta)^2 / |(S^t)^{-1}(\nabla\theta)|.$$

8. Вид решения нулевого приближения. Уравнения (29) приводят к

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)} &= M(\mathbf{x}, t)\cos\Phi(\tau; \mathbf{x}, t), \\ \kappa^{(2)} &= M(\mathbf{x}, t)\sin\Phi(\tau; \mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{33}$$

где $M(\mathbf{x}, t)$ – произвольная положительная функция на этом шаге исследования и

$$\Phi(\tau; \mathbf{x}, t) = N\tau + \Phi^{(0)}(\tau; \mathbf{x}, t), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

с периодической функцией $\Phi^{(0)}$ по τ.

Из (31) следует, что

$$M\langle\cos\Phi\rangle = (\mathbf{X}^{(1)}, S\nabla\theta); \quad M\langle\sin\Phi\rangle = (\mathbf{X}^{(2)},\ S\nabla\theta). \tag{35}$$

Таким образом, мы должны удовлетворить условия разрешимости (31), условия кратности (24) и уравнение эйконала (28). Последнее уравнение может быть переписано в терминах M,

$$\Lambda\mu = \varrho(\partial_t\theta)^2 - \frac{\lambda+2\mu}{2}\left[M^2 + (\kappa^{(0)})^2 - (\nabla\theta)^2\right] + \lambda r. \tag{36}$$

Если эти условия удовлетворены, тогда для любого целого N мы имеем

$$\mathbf{U}^{(1)}(\tau;\mathbf{x},t) = \mathbf{W}(\mathbf{x},t)$$

$$+(\nabla\theta)^{-2}M\int\limits_0^\tau\Big((\cos\Phi - \langle\cos\Phi\rangle)\cdot\mathbf{X}^{(1)} + (\sin\Phi - \langle\sin\Phi\rangle)\cdot\mathbf{X}^{(2)}\Big)\,d\tau'. \tag{37}$$

9. Уравнения первого приближения. Рассмотрим теперь следующее по $\sim\epsilon^0$ приближение нелинейной системы (9). Оно имеет вид

$$\varrho\left[\ddot{U}_i^{(2)}\theta_t^2 + 2\partial_t\dot{U}_i^{(1)}\theta_t + \dot{U}_i^{(1)}\theta_{tt} + \partial_t^2 U_i^{(0)}\right] = \partial_k(\lambda\rho_{ik}^{(0)}I_1^{(0)} + 2\mu\rho_{ir}^{(0)}D_{rk}^{(0)})$$

$$+\partial_\tau\left[\lambda(\rho_{ik}^{(1)}I_1^{(0)} + \rho_{ik}^{(0)}I_1^{(1)}) + 2\mu(\rho_{ir}^{(1)}D_{rk}^{(0)} + \rho_{ir}^{(0)}D_{rk}^{(1)})\right]\theta_k. \tag{38}$$

Здесь

$$\rho_{ik}^{(1)} = \dot{U}_i^{(2)}\theta_k + \partial_k U_i^{(1)},$$

$$\begin{aligned} D_{ik}^{(1)} = \frac{1}{2}\Big\{&(\dot{U}_i^{(2)}\theta_k + \dot{U}_k^{(2)}\theta_i) + (\partial_k U_i^{(1)} + \partial_i U_k^{(1)}) \\ &+ (\dot{U}_s^{(2)}\theta_i + \partial_i U_s^{(1)})(\dot{U}_s^{(1)}\theta_k + \partial_k U_s^{(0)} \\ &+ (\dot{U}_s^{(2)}\theta_k + \partial_k U_s^{(1)})(\dot{U}_s^{(1)}\theta_i + \partial_i U_s^{(0)})\Big\}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$I_1^{(1)} = \dot{U}_l^{(2)}\theta_l + \partial_l U_l^{(1)} + (\dot{U}_s^{(2)}\theta_l + \partial_l U_s^{(1)})(\dot{U}_s^{(1)}\theta_l + \partial_l U_s^{(0)}).$$

После простых преобразований эта система может быть приведена к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{d\tau}\left[A_{is}\frac{d}{d\tau}U_s^{(2)}\right] = d_i, \tag{40}$$

где правая часть этой системы записывается как:

$$d_i = \varrho\left[2\partial_t\dot{U}_i^{(1)}\theta_t + \dot{U}_i^{(1)}\theta_{tt} + \partial_t^2 U_i^{(0)}\right] - \partial_k\left[\lambda\rho_{ik}^{(0)}I_1^{(0)} + 2\mu\rho_{ir}^{(0)}D_{rk}^{(0)}\right]$$

$$-\partial_\tau \left\{ \lambda[\partial_k U_i^{(1)} I_1^{(0)} + \rho_{ik}^{(0)} \rho_{sl}^{(0)} \partial_l U_s^{(1)}]\theta_k \right. \tag{41}$$

$$\left. + \mu[2\partial_r U_i^{(1)} D_{rk}^{(0)} \theta_k + \rho_{ir}^{(0)} (\partial_k U_s^{(1)} \rho_{sr}^{(0)} + \partial_r U_s^{(1)} \rho_{sk}^{(0)})\theta_k] \right\}.$$

10. Условия разрешимости первого приближения. Среднее значение вектора должно быть равно нулю,

$$\langle d_i \rangle = \varrho \partial_t^2 U_i^{(0)} - \partial_k[\lambda S_{ik} I_1^{(0)} + 2\mu \langle \rho_{ir}^{(0)} D_{rk}^{(0)} \rangle] = 0, \tag{42}$$

где

$$\langle \rho_{ir}^{(0)} D_{rk}^{(0)} \rangle = \frac{1}{2} S_{ir}(S_{sk}S_{sr} - \delta_{kr}) + \frac{1}{2} S_{ir} \langle \dot{U}_s^{(1)} \dot{U}_s^{(1)} \rangle \theta_r \theta_k$$

$$+ \frac{1}{2}(S_{sk}(\nabla\theta)^2 + S_{sr}\theta_r\theta_k) \langle \dot{U}_i^{(1)} \dot{U}_s^{(1)} \rangle + \frac{1}{2} \langle \dot{U}_i^{(1)} \dot{U}_s^{(1)} \dot{U}_s^{(1)} \rangle \theta_k (\nabla\theta)^2. \tag{43}$$

Умножая слева уравнения (40) на базисные вектора $\mathbf{X}^{(m)}$, $m = 0, 1, 2$, мы получаем эквивалентную систему дифференциальных уравнений для коэффициентов $\sigma^{(l)}$, $l = 0, 1, 2$, разложения

$$\frac{d\mathbf{U}^{(2)}}{d\tau} = \sum_{l=0}^{2} \sigma^{(l)} \mathbf{X}^{(l)}, \quad \langle \sigma^{(l)} \rangle = 0. \tag{44}$$

Если $m = 0$, тогда соответствующее уравнение имеет вид:

$$-\Lambda\mu \frac{d\sigma^{(0)}}{d\tau} + (\lambda + 2\mu)\kappa^{(0)} \frac{dM_1}{d\tau} = (\mathbf{d}, \mathbf{X}^{(0)}), \tag{45}$$

где

$$M_1(\tau) = \sum_{m=0}^{2} \sigma^{(m)} \kappa^{(m)}. \tag{46}$$

Уравнения для $m = 1, 2$ могут быть записаны как

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{d\tau}(\kappa^{(m)} M_1) = (\mathbf{d}, \mathbf{X}^{(m)}), \quad m = 1, 2. \tag{47}$$

Используя формулу (33), мы можем переписать систему (47) как систему дифференциальных уравнений первого порядка для амплитудной функции M_1 и фазовой функции Φ:

$$(\lambda + 2\mu) M \frac{dM_1}{d\tau} = (\mathbf{d}, \mathbf{X}^{(1)} \cos\Phi + \mathbf{X}^{(2)} \sin\Phi), \tag{48}$$

$$(\lambda + 2\mu) M_1 M \frac{d\Phi}{d\tau} = (\mathbf{d}, \mathbf{X}^{(2)} \cos\Phi - \mathbf{X}^{(1)} \sin\Phi). \tag{49}$$

Если среднее значение по Φ равно нулю,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\mathbf{d},\mathbf{X}^{(1)}\cos\Phi+\mathbf{X}^{(2)}\sin\Phi)}{(\mathbf{d},\mathbf{X}^{(2)}\cos\Phi-\mathbf{X}^{(1)}\sin\Phi)}d\Phi=0, \tag{50}$$

тогда

$$M_1=\exp\{\chi(\mathbf{x},t)\int\limits_0^{\Phi}\frac{(\mathbf{d},\mathbf{X}^{(1)}\cos\Phi+\mathbf{X}^{(2)}\sin\Phi)}{(\mathbf{d},\mathbf{X}^{(2)}\cos\Phi-\mathbf{X}^{(1)}\sin\Phi)}d\Phi\}. \tag{51}$$

Более того, если среднее значение по τ равно нулю,

$$\frac{1}{2\pi M}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\mathbf{d},\mathbf{X}^{(2)}\cos\Phi-\mathbf{X}^{(1)}\sin\Phi)}{M_1}d\tau'=0, \tag{52}$$

тогда мы можем найти фазовую функцию

$$\Phi=\frac{1}{M}\left[\int\limits_0^{\tau}\frac{(\mathbf{d},\mathbf{X}^{(2)}\cos\Phi-\mathbf{X}^{(1)}\sin\Phi)}{(\lambda+2\mu)M_1}d\tau'\right]+\phi(\mathbf{x},t). \tag{53}$$

Комбинируя предыдущие рассуждения, можно видеть, что для построения двух членов асимптотического разложения лучевого типа, для волн конечной деформации с точностью до векторного поля $W(\mathbf{x},t)$, мы должны прежде всего проверить условие кратности (24). Если эти условия выполнены, тогда мы должны решить

1) уравнение эйконала (36),

ii) условия разрешимости первого приближенияя (42),

iii) условия разрешимости (50).

И сумме здесь имеется 5 уравнений для 5 неизвестных функций (фазовая функция $\theta(\mathbf{x},t)$, амплитудная функция $M(\mathbf{x},t)$ и вектор смещения нулевого приближения $\mathbf{U}^{(0)}(\mathbf{x},t)$). Тогда, решая уравнения (48) и (49), мы получим желаемые члены асимптотического разложения. Замечаем, что 1) эти уравнения есть уравнения на функции переменных $(\mathbf{x},t)$, но не τ, 2) уравнение эйконала дает нам возможность использовать лучевые координаты, соответствующие системе уравнений Гамильтона.

11. Пример. Рассмотрим пример волны лучевого типа, которая зависит от одной декартовой координаты x_1. Эта волна может рассматриваться как плоская волна. Простые вычисления показывают следующееее:

1. Оператор R совпадает с оператором $R^{(0)}$.

2. $r = 0$, $D_{ik}^{(0)}\theta_i\theta_k = I_1^{(0)}\theta_1^2$, где

$$I_1^{(0)} = \frac{1}{2}\Big\{2\partial_1 U_1^{(0)} + (\partial_1 U_s^{(0)} + \dot{U}_s^{(1)}\theta_1)(\partial_1 U_s^{(0)} + \dot{U}_s^{(1)}\theta_1)\Big\}. \tag{54}$$

3. Базисные вектора – $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{e}_3$.

4. Уравнение эйконала имеет вид:

$$\varrho(\partial_t\theta)^2 - (\lambda + 2\mu)I_1^{(0)}\theta_1^2 - \mu\theta_1^2 = \varrho\left[(\partial_t\theta)^2 - H^2\right] = 0, \tag{55}$$

где

$$H = \sqrt{a^2(x_1)I_1^{(0)} + b^2(x_1)}|\theta_1|.$$

5. Условие кратности выполняется без ограничений.

6. Вектор смещения первого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= W_1(x_1, t), \\ U_2^{(1)} &= W_2(x_1, t) + M(x_1, t)\theta_1^{-2}\int\limits_0^\tau (\cos\Phi - \langle\cos\Phi\rangle)\,d\tau', \\ U_3^{(1)} &= W_3(x_1, t) + M(x_1, t)\theta_1^{-2}\int\limits_0^\tau (\sin\Phi - \langle\sin\Phi\rangle)\,d\tau' \end{aligned} \tag{56}$$

и $\Phi(\tau, x_1, t) = \tau + \Phi_0(\tau, x_1, t)$, где Φ_0 – 2π периодическая функция по τ.

7. Условия разрешимости нулевого приближения могут быть записаны в виде:

$$\kappa^{(0)} = (1 + \partial_1 U_1^{(0)})\theta_1,$$

$$\langle\kappa^{(1)}\rangle = \partial_1 U_2^{(0)}\theta_1 = M\langle\cos\Phi\rangle, \langle\kappa^{(2)}\rangle = \partial_1 U_3^{(0)}\theta_1 = M\langle\sin\Phi\rangle.$$

8. Инвариант $I_1^{(0)}$ связан с амплитудной функцией соотношением

$$I_1^{(0)} = \frac{1}{2}\left[M^2\theta_1^{-2} + 2\partial_1 U_1^{(0)} + (\partial_1 U_1^{(0)})^2\right]. \tag{57}$$

9. Условия $\langle \mathbf{d} \rangle = 0$ могут быть переписаны как уравнения на $\mathbf{U}^{(0)}$

$$\langle d_1 \rangle = \varrho \partial_t^2 U_1^{(0)} - \partial_1 \left[(\lambda + 2\mu)(1 + \partial_1 U_1^{(0)}) I_1^{(0)} \right] = 0, \tag{58}$$

$$\langle d_\alpha \rangle = \varrho \partial_t^2 U_\alpha^{(0)} - \partial_1 \left[\partial_1 U_\alpha^{(0)} \left((\lambda + 2\mu) I_1^{(0)} + \mu \right) \right] = 0, \quad \alpha = 2, 3.$$

Если условия $\langle \mathbf{d} \rangle = 0$ выполняются, тогда выражения для d_i, $i = 1, 2, 3$, могут быть упрощены.

$$d_1 = -(\lambda + 2\mu)(1 + \partial_1 U_1^{(0)}) \theta_1 \sum_{\alpha=2}^{3} \partial_\tau (\rho_{\alpha 1}^{(0)} \partial_1 U_\alpha^{(1)}), \tag{59}$$

$$d_\alpha = \varrho \Big[2\partial_t \dot{U}_\alpha^{(1)} \theta_t + \dot{U}_\alpha^{(1)} \theta_{tt} \Big] - \partial_1 \Big[((\lambda + 2\mu) I_1^{(0)} + \mu) \theta_1 \dot{U}_\alpha^{(1)} \Big]$$

$$-((\lambda + 2\mu) I_1^{(0)} + \mu) \theta_1 \partial_1 \dot{U}_\alpha^{(1)} - \partial_\tau \Big[(\lambda + 2\mu) \rho_{\alpha 1}^{(0)} \rho_{s1}^{(0)} \partial_1 U_s^{(1)} \theta_1 \Big]. \tag{60}$$

Уравнения (45) и (47) для разложений (44) и (46) можно перепимать в виде

$$-\mu \theta_1^2 \frac{d\sigma^{(0)}}{d\tau} + (\lambda + 2\mu) \kappa^{(m)} \frac{dM_1}{d\tau} = d_1,$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{d\tau} \left(\kappa^{(m)} M_1 \right) = d_{m+1}, \quad m = 1, 2. \tag{61}$$

Из первого уравнения (61) и уравнения (59) мы можем выразить $\sigma^{(0)}$ через M_1 и функцию $\Theta^0(x_1, t)$

$$\sigma^{(0)} = \frac{1}{\mu \theta_1^2} (\lambda + 2\mu) [\kappa^{(0)} M_1 + (1 + \partial_1 U_1^{(0)}) \theta_1 \sum_{\alpha=2}^{3} \rho_{\alpha 1}^{(0)} \partial_1 U_\alpha^{(1)}] + \Theta^0. \tag{62}$$

Два последние уравнения (61) могут быть переписаны как система дифференциальных уравнений первого порядка по τ от функций M_1 и Φ

$$(\lambda + 2\mu) M \frac{dM_1}{d\tau} = d_2 \cos \Phi + d_3 \sin \Phi,$$

$$(\lambda + 2\mu) M_1 M \frac{d\Phi}{d\tau} = d_3 \cos \Phi - d_2 \sin \Phi. \tag{63}$$

Далее мы вычислим правые части уравнений (63). Здесь мы используем функцию

$$\Psi(\Phi; x_1, t) = 1 - \cos \Phi \langle \cos \Phi \rangle - \sin \Phi \langle \sin \Phi \rangle \tag{64}$$

и ее производные. Простые вычисления показывают, что в переменных Φ, x_1, и t мы имеем

$$d_2 \cos\Phi + d_3 \sin\Phi$$

$$2\left[\varrho\theta_t^{1/2}\bar{\partial}_t(M\theta_1^{-2}\theta_t^{1/2}\Psi) - \varrho^{1/2}H\theta_1^{-1/2}\bar{\partial}_1(M\theta_1^{-2}H\theta_1^{-1/2}\varrho^{1/2}\Psi)\right] \tag{65}$$

$$-(\lambda+2\mu)M\partial_\tau[\rho_{\alpha 1}^{(0)}\partial_1 U_\alpha^{(1)}].$$

Здесь мы использовали выражения $\bar{\partial}_t$ и $\bar{\partial}_1$ для частных производных по t и x_1 в переменных Φ, x_1 и t. Аналогично

$$\begin{aligned} d_3\cos\Phi - d_2\sin\Phi = 2\varrho\theta_t^{1/2}\partial_t(M\theta_t^{1/2}\theta_1^{-2}\Psi'_\Phi) + 2\varrho M\theta_1^{-2}\partial_t\Phi\theta_t\Psi \\ - 2\varrho^{1/2}H\theta_1^{-1/2}\partial_1(H\theta_1^{-1/2}\varrho^{1/2}M\theta_1^{-2}\Psi'_\Phi) \\ - 2\varrho H^2\theta_1^{-1}\partial_1\Phi M\theta_1^{-2}\Psi - (\lambda+2\mu)M\partial_\tau\Phi\rho_{s1}^{(0)}\partial_1 U_s^{(1)}. \end{aligned} \tag{66}$$

Здесь мы использовали, что

$$\dot{U}_2^{(1)}\cos\Phi + \dot{U}_3^{(1)}\sin\Phi = M\theta_1^{-2}\Psi,$$
$$\dot{U}_3^{(1)}\cos\Phi - \dot{U}_2^{(1)}\sin\Phi = M\theta_1^{-2}\Psi'_\Phi.$$

Используя соотношение

$$\langle\bar{\partial}_t\Psi\rangle = \frac{1}{2}\partial_t\langle\Psi\rangle,$$

условия разрешимости уравнений первого приближения (63) будут иметь вид:

$$\varrho\partial_t(M^2\theta_1^{-4}\theta_t\langle\Psi\rangle) - \partial_1(\varrho M^2H^2\theta_1^{-5}\langle\Psi\rangle) = 0. \tag{67}$$

Второе уравнение (63) можно разрешить при любой правой части и условие разрешимости определяет среднее значение M_1.

Может ли быть решение с $\Phi(\tau; x_1, t) = \tau$?

В этом случае

$$\partial_1 U_3^{(0)} = \partial_1 U_3^{(0)} = 0, \quad \Psi(\tau; x_1, t) \equiv 1. \tag{68}$$

Согласно второму уравнению (58) U_α^0, $\alpha = 2, 3$, являются произвольными линейными функциями t с постоянными коэффициентами. Если условия разрешимости (67) удовлетворяются, тогда

$$M_1 = -\rho_{s1}^{(0)}\partial_1 U_s^{(1)}\theta_1^{-2}. \tag{69}$$

Далее из (62)

$$\sigma^{(0)} = \Theta^0(x_1, t). \tag{70}$$

Функции $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ могут быть выражены через функции T_1 и T_2 по формулам

$$\sigma^{(1)} = T_1 \cos\tau + T_2 \sin\tau, \quad \sigma^{(2)} = T_1 \sin\tau - T_2 \cos\tau, \tag{71}$$

где $T_1 = (M_1 - \sigma^{(0)}\kappa^{(0)})M^{-1}$ и T_2 произвольная функция на на этом шаге исследования.

Пусть $U_\alpha^{(0)} \equiv 0$, $\alpha = 2, 3$, так, что мы решили второе и третье уравнение разрешимости системы (58). Чтобы найти два члена асимптотического разложения вектора смещения с точностью до вектор функции W мы должны решить следующие уравнения:

1) уравнение эйконала (55),
2) условие разрешимости (67),
3) первое уравнение системы (58)

и найти фазовою функцию θ, амплитудную функцию M и компоненту вектора нулевого приближения в направлении распространения $U_1^{(0)}$. Заметим, что у нас есть три уравнения для трех функций.

Как обычно, для решения уравнений 1) и 2) мы можем использовать координаты лучевого типа, которые соответствуют системе уравнений гамильтона с гамильтонианом $H(x^1, p_1, t) = v(x^1, t)p_1$ и начальными данными $x^1(0) = y$, $p_1(0) = q = 1/v(y, 0)$. В качестве лучевых координат мы можем взять начальную координату y и время t. Тогда фазовая функция $\theta = \Theta(y)$. В уравнении 2) для данного случая $\langle\Psi\rangle = 0$, и, следовательно, может рассматриваться как уравнение переноса для амплитуды M. Уравнение 3) тогда превращается в нелинейное уравнение для $U_1^{(0)}$.

Литература

1. В. В. Новожилов, *Основы нелинейной теории упругости.* Гостехиздат, Л.-М., 1948.
2. Л. И. Лурье, *Нелинейная теория упругости.* Наука, М. 1980.
3. А. П. Качалов, *Пространственно-временной лучевой метод для волн малой деформации в нелинейной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 61–72.
4. D. R. Bland, *Nonlinear dynamic elasticity.* Blaisdel Publishing Company, Wolfham, 1969.

Kachalov A. P. The ray type solution for the finite deformation waves in a physically linear nonlinear inhomogeneous medium.

The paper is devoted to the ray types waves of finite deformation in the nonlinear, physically linear elastic media. The waves are a generalization of the Bland plane waves for the isotropic nonlinear media. For the waves the fast oscillation and slow oscillation parts are interacted during the process of propagation. Forms of the waves are adiabatically changed. An example of plane wave in the inhomogeneous media is considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kachalov@pdmi.ras.ru

Поступило 16 января 2014 г.