Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 422, 2014 г.

.

М. Н. Демченко

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ

§1. Введение

В работе изучаются преобразования M, N соответственно на соленоидальных и потенциальных векторных полях на римановом многообразии с краем Ω. Преобразование M возникло при исследовании обратной задачи электродинамики [1], [2], [5]. Под действием M соленоидальное поле y отображается в поле, касательное к эквидистантам границы $\Gamma^s := \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = s\}$, $s > 0$. Значение образа My на Γ^s определяется как след на этой поверхности проекции поля y на подпространство соленоидальных полей, локализованных в приграничном слое $\Omega^s := \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < s\}$. В работах [2], [3] оператор M рассматривался в предположении, что эквидистанты Γ^s гладкие, что имеет место для $s < T_0$, где T_0 зависит от Ω. Это позволило рассматривать оператор M на полях, сосредоточенных в слое Ω^{T_0}; была доказана унитарность M в соответствующих пространствах с L_2-нормой.

В работе [4] ограничение гладкости эквидистант было заменено на более слабое – предполагалось, что слои Ω^s являются областями с липшицевой границей при почти всех s. Было показано, что в таком предположении M коизометричен (сопряженный оператор изометричен), но может иметь ядро бесконечной размерности. Работа [4] была нацелена на изучение (и корректное определение) оператора M на всем Ω, а не только на Ω^{T_0}, однако, полученные в ней результаты применимы при указанном условии липшицевости. В данной работе мы снимем это ограничение и получим аналогичные результаты в случае произвольного Ω.

Ключевые слова: разложение Вейля, обратные задачи.

Работа поддержана грантами СПбГУ 6.38.670.2013, и грантами РФФИ 12-01-31446, 11-01-00407А и 14-01-00535.

В работе [3] помимо преобразования M вводится оператор N, отображающий потенциальные поля в поля, нормальные к эквидистантам. Определение оператора N сходно с определением M: значение образа Nh на эквидистанте Γ^s равно следу проекции h на подпространство потенциальных полей, сосредоточенных в Ω^s. В работе [3] было доказано, что N имеет унитарное сужение на пространство полей, сосредоточенных в Ω^{T_0}. Преобразование N наряду с M используется в обратной задаче для некоторых модельных уравнений теории упругости. Конструкции, которые используются в этой работе, позволяют для оператора N получить те же результаты, что и для M, среди которых коизометричность.

Автор благодарен М. И. Белишеву за внимание к работе.

§2. Обозначения

• Ω – гладкое[1] компактное связное ориентированное риманово многообразие размерности три с непустым связным краем $\Gamma := \partial\Omega$.
• $\langle\,\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $T\Omega$ (риманова структура на Ω).
• $|\cdot| := \langle\,\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$.
• $\tau(x) := \operatorname{dist}(x,\Gamma)$ – эйконал. Выполнено $\tau \in \operatorname{Lip}(\Omega)$, так как τ является функцией расстояния до множества.
• $T := \max\limits_{x\in\Omega}\tau(x)$.
• $\Omega^s := \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) < s\}$.
• $\Gamma^s := \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) = s\}$.
• X^s – оператор умножения на характеристическую функцию множества Ω^s.
• Отнесем точку $x \in \Omega$ к множеству ω_0, если x соединяется с Γ более, чем одной кратчайшей. Множество ω_0 называют *множеством кратных точек*, а $\omega := \overline{\omega_0}$ – *множеством раздела* (*cut locus*). Известно, что

$$T_0 := \operatorname{dist}(\omega,\Gamma) > 0,$$

а также что мера Лебега этого множества равна нулю. Вне множества ω функция τ является гладкой и удовлетворяет уравнению эйконала:

$$|\nabla\tau(x)| = 1 \quad \forall x \in \Omega\setminus\omega. \tag{1}$$

Из сказанного следует, что при $0 \leqslant s < T_0$ эквидистанты Γ^s являются гладкими, тогда как для произвольного $0 \leqslant s < T$ эквидистанты,

[1] Всюду в работе “гладкость” означает C^∞-гладкость

вообще говоря, имеют особенности в точках пересечения с ω; поверхности $\Gamma^s \setminus \omega$ при этом являются гладкими. Отметим также, что Γ^s имеют нулевую меру Лебега. Каждой точке $x \in \Omega \setminus \omega$ можно сопоставить пару

$$x \mapsto (\gamma(x), \tau(x)) \in \Gamma \times [0, T), \tag{2}$$

где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка границы. Такое отображение является гладким диффеоморфизмом из $\Omega \setminus \omega$ в некоторое подмножество цилиндра $\Gamma \times [0, T)$. Из этого с помощью теоремы Фубини легко вывести следующую формулу:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi\, dx = \int\limits_{0}^{T} ds \int\limits_{\Gamma^s \setminus \omega} \varphi\, d\sigma, \quad \varphi \in L_1(\Omega). \tag{3}$$

Здесь и всюду далее dx – мера на Ω, индуцированная римановой структурой, $d\sigma$ – соответствующая поверхностная мера на гладкой поверхности $\Gamma^s \setminus \omega$.

• $\nu := \nabla\tau$ – векторное поле, определенное в $\Omega \setminus \omega$. Из уравнения эйконала (1) следует, что $|\nu| = 1$ в $\Omega \setminus \omega$. Поле ν совпадает с единичными нормалями к $\Gamma^s \setminus \omega$, внешними по отношению к Ω^s.

Определим операции curl и div на векторных полях. Пусть d – внешний дифференциал, $*$ – звезда Ходжа (многообразие Ω предполагается ориентированным). Используя канонический изоморфизм векторов и 1-форм на римановом многообразии, для векторного поля u положим

$$\operatorname{curl} u := *d\, u, \quad \operatorname{div} u := *d(*u)$$

(напомним, что $\dim \Omega = 3$). Пусть $\widetilde{\wedge}$ – внешнее произведение на формах. Символом $\wedge$ мы будем обозначать векторное произведение векторов:

$$u \wedge v := *(u \,\widetilde{\wedge}\, v).$$

Приведем некоторые формулы векторного анализа:

$$\operatorname{div}(\varphi u) = \langle \nabla\varphi, u \rangle + \varphi \operatorname{div} u, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}(u \wedge v) = \langle \operatorname{curl} u, v \rangle - \langle u, \operatorname{curl} v \rangle, \tag{5}$$

$$\operatorname{curl}(\varphi u) = \nabla\varphi \wedge u + \varphi \operatorname{curl} u. \tag{6}$$

В (4) и (6) функция φ липшицева; векторное поле u локально интегрируемо и имеет локально интегрируемую дивергенцию. В (5) одно из полей u и v липшицево, а другое локально интегрируемо вместе со своим ротором.

Теперь введем обозначения для функциональных пространств (все пространства в работе вещественны).

Норму в пространстве $L_2(U), U \subset \Omega$, мы будем обозначать $\|\cdot\|_U$. Мы также будем рассматривать пространство векторных полей $\vec{L}_2(U)$,

$$\|u\|_U := \left(\int\limits_U dx \, \langle u(x), u(x) \rangle \right)^{1/2}.$$

Скалярное произведение в этих пространствах будет обозначаться $(\cdot,\cdot)_U$, для $U = \Omega$ мы будем опускать нижний индекс: $(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_\Omega$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\Omega$. Положим также

$$\mathcal{H} := \vec{L}_2(\Omega), \quad \mathcal{H}^s := \vec{L}_2(\Omega^s).$$

Через $H^1(U)$ мы будем обозначать стандартное соболевское пространство в U с нормой

$$\|h\|_{H^1(U)} := \left(\int\limits_U dx \, \left(|\nabla h(x)|^2 + h(x)^2 \right) \right)^{1/2}.$$

Соответствующее векторное пространство $\vec{H}^1(U)$ состоит из полей, компоненты которых в локальных координатах попадают в соболевское пространство H^1, при этом мы считаем зафиксированной одну из (эквивалентных) норм в таком пространстве, которая с помощью некоторого разбиения единицы на многообразии выражается через H^1-нормы в локальных координатах.

Множество гладких векторных полей в U будем обозначать $\vec{C}^\infty(U)$.

Введем операторы в $\mathcal{H}$:

$$P_\theta u := u - \langle u, \nu \rangle \nu, \quad P_\nu u := \langle u, \nu \rangle \nu,$$

являющиеся ортгональными пректорами в $\mathcal{H}$ соответственно на подпространства поперечных и продольных полей:

$$\mathcal{H}_\theta := \{ u \in \mathcal{H} \,|\, \langle u(x), \nu(x) \rangle = 0 \ a.e. \ x \in \Omega \},$$
$$\mathcal{H}_\nu := \{ u \in \mathcal{H} \,|\, u(x) \wedge \nu(x) = 0 \ a.e. \ x \in \Omega \}.$$

Введем подпространства

$$\mathcal{H}^s_\theta := \{ u \in \mathcal{H}^s \,|\, \langle u(x), \nu(x) \rangle = 0 \ a.e. \ x \in \Omega^s \},$$
$$\mathcal{H}^s_\nu := \{ u \in \mathcal{H}^s \,|\, u(x) \wedge \nu(x) = 0 \ a.e. \ x \in \Omega^s \}.$$

Введем также пространства соленоидальных полей:

$$\mathcal{C} := \operatorname{clos}_{\mathcal{H}}\{\operatorname{curl} u \,|\, u \in \vec{C}^{\infty}(\Omega)\},$$
$$\mathcal{C}^s := \operatorname{clos}_{\mathcal{H}}\{\operatorname{curl} u \,|\, u \in \vec{C}^{\infty}(\Omega),\, \operatorname{supp} u \subset \Omega^s\} \subset \mathcal{C}.$$

Заметим, что в определении $\mathcal{C}^s$ носитель u может содержать точки границы Γ. Поле $y \in \mathcal{C}^s$ удовлетворяет равенству[2] в Ω^s

$$\operatorname{div} y = 0.$$

Определим пространства потенциальных полей:

$$\mathcal{E} := \operatorname{clos}_{\mathcal{H}}\{\nabla\varphi \,|\, \varphi \in C^{\infty}(\Omega),\, \varphi|_{\Gamma} = \mathrm{const}\},$$
$$\mathcal{E}^s := \operatorname{clos}_{\mathcal{H}}\{\nabla\varphi \,|\, \varphi \in C^{\infty}(\Omega),\, \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^s,\, \varphi|_{\Gamma} = \mathrm{const}\} \subset \mathcal{E}.$$

Для $h \in \mathcal{E}^s$ в Ω^s выполнено

$$\operatorname{curl} h = 0.$$

Подпространства $\mathcal{C}^s$ и $\mathcal{E}^s$ ортогональны. Подпространства $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ являются членами разложения Вейля–Ходжа

$$\mathcal{H} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{E} \oplus \Phi, \tag{7}$$

где конечномерное подпространство Φ состоит из гладких полей на Ω, имеющих нулевой ротор и дивергенцию (гармонические поля) и нулевую касательную составляющую на границе Γ [6]. Нам также понадобится разложение в Ω^s:

$$\mathcal{H}^s = \mathcal{C}^s \oplus \mathcal{E}^s \oplus \Phi^s. \tag{8}$$

Пространство Φ^s имеет бесконечную размерность. В п. 3 будут описаны некокотрые свойства полей из Φ^s.

§3. Проекторы P^s, Q^s

Обозначим через P^s, $0 < s \leqslant T$, ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{C}^s$, действующий в $\mathcal{H}$. Для $s > T$ положим, что P^s равно проектору на $\mathcal{C}$, и $P^s = 0$ для $s \leqslant 0$. Проекторы P^s сильно непрерывны слева по параметру s.

Аналогичным образом обозначим через Q^s, $0 < s \leqslant T$, ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{E}^s$, действующий в $\mathcal{H}$. Для $s > T$ положим, что Q^s равно проектору на $\mathcal{E}$, и $Q^s = 0$ для $s \leqslant 0$. Проекторы Q^s также сильно непрерывны слева по параметру s.

---

[2]дифференциальные операции в работе понимаются в обобщенном смысле

Проекция $P^s y$ имеет носитель в $\overline{\Omega^s}$. Мы покажем, что для гладкого $y \in \mathcal{C}$ проекция $P^s y$ является гладким полем в Ω^s (при этом она может иметь разрыв на Γ^s). Поле $P^s y$ является решением следующей краевой задачи в Ω^s:

$$\operatorname{curl}(P^s y) = \operatorname{curl} y, \qquad (\nu \wedge P^s y)|_\Gamma = (\nu \wedge y)|_\Gamma, \tag{9}$$

$$\operatorname{div}(P^s y) = 0, \qquad \langle \nu, P^s y \rangle|_{\Gamma^s} = 0. \tag{10}$$

Равенства (9) понимаются как следующее интегральное тождество

$$(P^s y, \operatorname{curl} z)_{\Omega^s} = (y, \operatorname{curl} z)_{\Omega^s} \quad \forall z \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^s) \tag{11}$$

(пробное поле z может быть отлично от нуля на Γ). Равенства (10) имеют смысл:

$$(P^s y, \nabla \psi)_{\Omega^s} = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\Omega), \;\; \psi|_\Gamma = \mathrm{const}.$$

Оба тождества следуют из определения пространства $\mathcal{C}^s$.

Задача (9), (10) может иметь больше одного решения – это зависит от топологии области Ω^s. Пусть x – произвольная точка $\Omega^s \setminus \Gamma$, а $V \subset \Omega^s \setminus \Gamma$ – достаточно малая окрестность x. Выберем область $U \subset \Omega^s \setminus \Gamma$, $\partial U \in C^\infty$, стягиваемую в точку и содержащую $\overline{V}$, и гладкую срезку $\zeta_1 \in C_0^\infty(U)$, равную единице в окрестности множества $\overline{V}$. Поле $w := \zeta_1 P^s y$ является решением следующей задачи в U (также понимаемой в обобщенном смысле):

$$\operatorname{curl} w = \nabla \zeta_1 \wedge P^s y + \zeta_1 \operatorname{curl} y, \quad \operatorname{div} w = \langle \nabla \zeta_1, P^s y \rangle, \quad \langle \nu, w \rangle|_{\partial U} = 0.$$

Данная задача разрешима единственным образом. Более того, в правых частях здесь стоят функции из L_2, поэтому решение w, принадлежит $\vec{H}^1(U)$ [6], а значит, $P^s y|_V \in \vec{H}^1(V)$. Выбрав другую срезку $\zeta_2 \in C_0^\infty(U)$, равную единице в окрестности множества $\overline{V}$ и удовлетворяющую равенству $\zeta_1 \zeta_2 = \zeta_2$, мы получаем краевую задачу на $\zeta_2 P^s y$ с правыми частями на этот раз из $H^1(U)$, а значит, $\zeta_2 P^s y \in \vec{H}^2(U)$, поэтому $P^s y|_V \in \vec{H}^2(V)$. Повторяя эту процедуру, мы можем добиться любой гладкости $P^s y|_V$, следовательно, $P^s y|_V \in \vec{C}^\infty(\overline{V})$.

Аналогично можно поступить, если точка x принадлежит $\Gamma^s \setminus \omega$ (или Γ). В этом случае в качестве U, V нужно брать открытые подмножества $\Omega^s \setminus \Gamma$, замыкания которых не пересекаются с ω, при этом $x \in \overline{V} \subset \overline{U}$. Срезки $\zeta_j \in C^\infty(\overline{U})$ должны быть равны нулю в окрестности множества $\partial U \setminus \Gamma^s$ ($\partial U \setminus \Gamma$) и единице в окрестности множества $\overline{V}$.

Применив разбиение единицы, из наших рассуждений можно сделать следующий вывод: для любого компакта $\mathcal{K} \subset \overline{\Omega^s}$, $\mathcal{K} \cap \omega = \varnothing$, выполнено $P^s y \in \vec{C}^\infty(\mathcal{K})$. В частности, сужение поля $P^s y$ на Ω^s имеет след на (гладкой) поверхности $\Gamma^s \setminus \omega$. След этого сужения мы будем обозначать $P^s y|_{\Gamma^s \setminus \omega}$, несмотря на то, что $P^s y$, рассматриваемое как поле на Ω, имеет разрыв на эквидистанте Γ^s.

Перейдем к описанию преобразования M. В работах [1–3] оператор $M : \mathcal{C}^{T_0} \to \mathcal{H}_\theta^{T_0}$ определялся следующим образом:

$$My\big|_{\Gamma^s} = P^s y\big|_{\Gamma^s}, \tag{12}$$

где s пробегает значения из интервала $(0, T_0)$ (очевидно, что данная формула определяет образ My всюду в Ω^{T_0}). В случае гладкого в Ω^{T_0} поля y эта формула имеет смысл. Из второго равенства в (10) следует, что $P^s y|_{\Gamma^s \setminus \omega}$ имеет нулевую нормальную составляющую, поэтому образ My является поперечным полем. В упомянутых работах было доказано (разными способами) свойство унитарности M.

Из сказанного выше следует, что в случае, когда поле y не обязательно сосредоточено в Ω^{T_0}, имеет смысл следующая модификация представления (12):

$$My\big|_{\Gamma^s \setminus \omega} = P^s y\big|_{\Gamma^s \setminus \omega}, \tag{13}$$

где $s \in (0, T)$. Заметим, что эта формула определяет поле My почти всюду в $\Omega \setminus \omega$, а значит, почти всюду в Ω. Однако, доказательство хотя бы ограниченности такого оператора наталкивается на трудности, связанные с тем, что при $s > T_0$ эквидистанты Γ^s имеют особенности в точках пересечения с ω (см. п. 2). В работе [4] вместо соотношения (13) предложено другое представление, позволившее корректно определить M как ограниченный линейный оператор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{H}_\theta$ и установить его частичную изометричность. Показано, что свойство унитарности M не переносится на общий случай, однако, выполнено

$$\operatorname{Ran} M = \mathcal{H}_\theta.$$

При этом все же предполагалось, что Ω удовлетворяет следующему условию: при почти всех $s \in (0, T)$ множество Ω^s является областью с липшицевой границей. В этой работе мы снимем указанное ограничение.

Опишем действие проекторов Q^s. Поле $Q^s h$ удовлетворяет следующим равенствам в Ω^s:

$$\operatorname{curl}(Q^s h) = 0, \quad (\nu \wedge Q^s h)|_{\partial\Omega^s} = 0, \quad \operatorname{div}(Q^s h) = \operatorname{div} h. \tag{14}$$

Первые два равенства понимаются в следующем смысле:

$$(Q^s h, \operatorname{curl} z)_{\Omega^s} = 0 \quad \forall z \in \vec{C}^\infty(\Omega).$$

Это интегральное тождество следует непосредственно из определения пространства $\mathcal{E}^s$.

Соотношения (14) и рассуждения, аналогичные проведенным для P^s, приводят к тому, что для гладкого поля $h \in \mathcal{E}$ сужение поля $Q^s h$ на Ω^s является гладким и имеет след на $\Gamma^s \setminus \omega$. Кроме того, след $Q^s h|_{\Gamma^s \setminus \omega}$ имеет нулевую касательную составляющую, что следует из второго равенства в (14). Это позволяет по аналогии с (13) определить оператор N, переводящий поля из $\mathcal{E}$ в продольные поля по правилу:

$$Nh\big|_{\Gamma^s \setminus \omega} = Q^s h\big|_{\Gamma^s \setminus \omega}, \tag{15}$$

где $s \in (0, T)$. Такой оператор изучался в работе [3], однако, как и в случае с M, рассматривалось сужение N на $\mathcal{E}^{T_0}$. Были доказаны свойства, аналогичные тем, которыми обладает M. В этой работе мы поступим аналогично [4], предложив представление оператора N, отличное от (15), с помощью которого докажем его частичную изометричность, а также равенство

$$\operatorname{Ran} N = \mathcal{H}_\nu.$$

Нам понадобится описание подпространств $\mathcal{H}^s \ominus \mathcal{C}^s$. Для β из этого подпространства из определения $\mathcal{C}^s$ получаем соотношение, аналогичное (11),

$$(\beta, \operatorname{curl} z)_{\Omega^s} = 0 \quad \forall z \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^s). \tag{16}$$

Обратимся к пространству Φ^s в разложении (8). Поле $\beta \in \Phi^s$ удовлетворяет равенствам

$$\operatorname{curl} w = 0, \quad (\nu \wedge w)\big|_\Gamma = 0, \quad \operatorname{div} \beta = 0, \tag{17}$$

первые два из которых понимаются в смысле интегрального тождества (16), а третье следует из $\beta \perp \mathcal{E}^s$. Таким образом, поле β является гармоническим. Используя краевое условие на Γ, с помощью локализации можно доказать, что $\beta \in \vec{C}^\infty(\Omega^s)$ (подобные рассуждения были проведены выше для $P^s y$). В частности, поле β является гладким вплоть до границы Γ, и равенства (17) для него можно понимать в классическом смысле.

§4. Оператор K

Пусть $0 < s \leqslant T$. Определим в пространстве $\mathcal{H}$ оператор K^s

$$K^s := \int_0^s d\xi \, (X^\xi - P^\xi).$$

Мы будем понимать K^s как оператор, отвечающий билинейной форме

$$(K^s u, w) = \int_0^s d\xi \, \left((X^\xi - P^\xi) \, u, w\right), \quad u, w \in \mathcal{H}. \tag{18}$$

Данный интеграл существует, так как подинтегральное выражение можно представить в виде линейной комбинации монотонных функций. Очевидно, что введенная билинейная форма симметрична и ограничена, следовательно, отвечающий ей оператор K^s является ограниченным и самосопряженным. Положим

$$K := K^T.$$

Выведем следующее соотношение

$$\int_0^s d\xi \, (X^\xi \, u, w) = ((s - \tau)u, w)_{\Omega^s}, \quad u, w \in \mathcal{H}. \tag{19}$$

По теореме Фубини имеем

$$\int_0^s d\xi \, (X^\xi \, u, w) = \int_0^s d\xi \int_\Omega dx \, \chi_{\Omega^\xi} \langle u, w \rangle = \int_\Omega dx \, \langle u, w \rangle \int_0^s d\xi \, \chi_{\Omega^\xi}(x).$$

Поскольку внутренний интеграл равен $\max\{s - \tau(x), 0\}$ мы получаем (19).

Лемма 1. *Пусть $0 < s \leqslant T$, $\beta \in \mathcal{H}^s$ – гладкое поле в Ω^s (в частности, гладкое вплоть до границы Γ), ортогональное $\mathcal{C}^s$. Тогда для любого $z \in \vec{C}^\infty(\Omega)$ справедливо*

$$(\beta, K^s \operatorname{curl} z)_{\Omega^s} = (\beta, \nu \wedge z)_{\Omega^s}.$$

Доказательство. Пусть $0 < s' < s$. По абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем

$$(\beta, K^{s'} \operatorname{curl} z)_{\Omega^{s'}} \to (\beta, K^s \operatorname{curl} z)_{\Omega^s}, \quad s' \to s - 0. \tag{20}$$

Очевидно, что β ортогонально $\mathcal{C}^\xi$ при $\xi \leqslant s$; поэтому

$$(\beta, K^{s'} \operatorname{curl} z)_{\Omega^{s'}} = \int_0^{s'} d\xi\, (\beta, (X^\xi - P^\xi) \operatorname{curl} z)_{\Omega^\xi} = \int_0^{s'} d\xi\, (\beta, X^\xi \operatorname{curl} z)_{\Omega^\xi}$$
$$= (\beta, (s' - \tau) \operatorname{curl} z)_{\Omega^{s'}} = ((s' - \tau)\, \beta, \operatorname{curl} z)_{\Omega^{s'}}$$

(в третьем переходе мы воспользовались (19)). Определим липшицеву функцию $h^{s'}$ в Ω:

$$h^{s'}(x) := \max\{s' - \tau(x), 0\}$$

Имеем

$$((s' - \tau)\, \beta, \operatorname{curl} z)_{\Omega^{s'}} = (h^{s'} \beta, \operatorname{curl} z) \tag{21}$$

(поле $h^{s'}\beta$ определено в Ω, поскольку $h^{s'}$ аннулируется вне $\Omega^{s'} \subset \Omega^s$). Поле $h^{s'}\beta$ липшицево, поскольку функция $h^{s'}$ липшицева, и поле β является гладким в окрестности $\operatorname{supp} h^{s'}$, поэтому мы можем применить к правой части (21) формулу интегрирования по частям. Поле β ортогонально пространству $\mathcal{C}^s$, поэтому выполнено тождество (16), из которого для гладкого β следуют равенства, понимаемые в классическом смысле:

$$\operatorname{curl} \beta\,|_{\Omega^s} = 0, \quad (\nu \wedge \beta)|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Из второго равенства получаем $\nu \wedge (h^{s'}\beta)|_\Gamma = 0$. Поэтому при интегрировании по частям интеграл по Γ равен нулю. Применив первое равенство в (22) и формулу (6), получим:

$$(h^{s'}\beta, \operatorname{curl} z) = (\operatorname{curl}(h^{s'}\beta), z) = (\nabla h^{s'} \wedge \beta, z) = ((-\nabla\tau) \wedge \beta, z)_{\Omega^{s'}}$$
$$= (\beta, \nabla\tau \wedge z)_{\Omega^{s'}} = (\beta, \nu \wedge z)_{\Omega^{s'}}.$$

Полученное выражение стремится к $(\beta, \nu \wedge z)_{\Omega^s}$ при $s' \to s$. Учитывая (20), мы получаем требуемое равенство. $\square$

Лемма 2. *Для любого поля $z \in \vec{C}^\infty(\Omega)$ справедливо соотношение*

$$(K \operatorname{curl} z, K \operatorname{curl} z) = 2\, (K \operatorname{curl} z, \nu \wedge z). \tag{23}$$

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
(K\operatorname{curl} z, K\operatorname{curl} z) &= \int_0^T ds\,((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, K\operatorname{curl} z)\\
&= \int_0^T ds \int_0^T d\xi\,((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, (X^\xi - P^\xi)\operatorname{curl} z)\\
&= 2\int_0^T ds \int_0^s d\xi\,((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, (X^\xi - P^\xi)\operatorname{curl} z)\\
&= 2\int_0^T ds\,((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, K^s\operatorname{curl} z)_{\Omega^s}. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Очевидно, что поле $\beta := (X^s - P^s)\operatorname{curl} z$ ортогонально пространству $\mathcal{C}^s$. Оно также ортогонально $\mathcal{E}^s$, поскольку для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^s)$, $\varphi|_\Gamma =$ const, имеет место

$$((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, \nabla\varphi) = (X^s\operatorname{curl} z, \nabla\varphi) = (\operatorname{curl} z, \nabla\varphi)_{\Omega^s} = 0$$

(в первом переходе мы воспользовались ортогональностью $\mathcal{C}^s \perp \mathcal{E}^s$). Таким образом, β^s принадлежит Φ^s (см. (8)), а значит, $\beta \in \vec{C}^\infty(\Omega^s)$. Поэтому мы можем применить к подинтегральному выражению лемму 1:

$$((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, K^s\operatorname{curl} z)_{\Omega^s} = ((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, \nu\wedge z)_{\Omega^s}.$$

Подставив это в (24), мы получим

$$(K\operatorname{curl} z, K\operatorname{curl} z) = 2\int_0^T ds\,((X^s - P^s)\operatorname{curl} z, \nu\wedge z)_{\Omega^s} = 2\,(K\operatorname{curl} z, \nu\wedge z).$$

□

Для $z \in \vec{C}^\infty(\Omega)$ согласно (23) имеем

$$\|K\operatorname{curl} z\|^2 = 2\,(K\operatorname{curl} z, \nu\wedge z) \leqslant 2\,\|K\operatorname{curl} z\|\cdot\|z\|.$$

Поэтому

$$\|K\operatorname{curl} z\| \leqslant 2\,\|z\|. \qquad (25)$$

Лемма 3. *Для любого поля $u \in \mathcal{C}$ справедливо*

$$\|\operatorname{curl}(Ku)\| \leqslant 2\,\|u\| \tag{26}$$

(ротор понимается в обобщенном смысле).

Доказательство. Пусть $z \in \vec{C}^\infty(\Omega)$. Из самосопряженности K и оценки (25) мы получаем

$$|(Ku, \operatorname{curl} z)| = |(u, K \operatorname{curl} z)| \leqslant \|u\| \cdot \|K \operatorname{curl} z\| \leqslant 2\,\|u\| \cdot \|z\|. \tag{27}$$

Тогда существует поле $w \in \mathcal{H}$, такое что

$$(Ku, \operatorname{curl} z) = (w, z) \qquad \forall z \in \vec{C}^\infty(\Omega). \tag{28}$$

Это означает, что выполнено равенство (в обобщенном смысле)

$$\operatorname{curl}(Ku) = w.$$

Более того, неравенство (27) означает, что

$$\|\operatorname{curl}(Ku)\| = \|w\| \leqslant 2\,\|u\|. \qquad \square$$

§5. Оператор M

Как и в работе [4] вместо (13) мы примем другое определение оператора M, а затем докажем его согласованность с определением (13) (теорема 4). Итак, для $u \in \mathcal{H}$ положим

$$Mu := P_\theta u - \nu \wedge \operatorname{curl}(Ku). \tag{29}$$

Здесь, как и в оценке (26), ротор понимается в обобщенном смысле, причем в силу той же оценки оператор M ограничен.

Опишем сопряженный оператор M^*. Пусть $u \in \mathcal{H}$, $v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega \setminus \Gamma \setminus \omega)$, тогда

$$\begin{aligned}(\nu \wedge \operatorname{curl}(Ku), v) &= -(\operatorname{curl}(Ku), \nu \wedge v) = -(Ku, \operatorname{curl}(\nu \wedge v)) \\ &= -(u, K \operatorname{curl}(\nu \wedge v)).\end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь тем, что поле $\nu \wedge v$ – гладкое и финитное в $\Omega \setminus \Gamma$. Отсюда

$$M^* v = P_\theta v + K \operatorname{curl}(\nu \wedge v). \tag{30}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ran} M \subset \mathcal{H}_\theta. \tag{31}$$

Покажем теперь, что

$$\operatorname{Ran} M^* \subset \mathcal{C}. \tag{32}$$

Вновь мы выберем поле $v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega \setminus \Gamma \setminus \omega)$ и положим $z := -\nu \wedge v$. Заметим, что множество

$$(\mathcal{H} \ominus \mathcal{C}) \cap \vec{C}^\infty(\Omega) \tag{33}$$

плотно в пространстве $\mathcal{H} \ominus \mathcal{C}$, так как последнее совпадает с $\mathcal{E} \oplus \Phi$ (см. (7)), пространство $\mathcal{E}$ по определению является замыканием некоторого множества гладких полей, а Φ состоит из гладких гармонических полей. Выберем произвольный элемент β из (33). По (30) имеем

$$\begin{aligned}(\beta, M^*v) &= (\beta, P_\theta v + K \operatorname{curl}(\nu \wedge v)) = (\beta, \nu \wedge z - K \operatorname{curl} z) \\ &= (\beta, \nu \wedge z) - (\beta, K \operatorname{curl} z) = 0.\end{aligned}$$

Равенство нулю следует из леммы 1 для $s = T$. Мы получили, что $M^*v \in \mathcal{C}$. В силу ограниченности M^* это включение можно распространить на $v \in \mathcal{H}$.

Вполне аналогичными рассуждениями можно обобщить (32):

$$\operatorname{Ran} M^* X^s \subset \mathcal{C}^s \quad \forall s > 0 \tag{34}$$

(для доказательства при $0 < s \leqslant T$ вместо разложения (7) нужно использовать (8)).

Включение (32) означает, что M аннулирует поля, ортогональные $\mathcal{C}$. Учитывая также (31), естественно рассматривать сужение оператора M на подпространство $\mathcal{C}$ и сужение M^* на $\mathcal{H}_\theta$:

$$M : \mathcal{C} \to \mathcal{H}_\theta, \quad M^* : \mathcal{H}_\theta \to \mathcal{C}.$$

За этими сужениями мы сохраним прежние обозначения.

Теорема 1. *Оператор M частично изометрический, причем*

$$\operatorname{Ran} M = \mathcal{H}_\theta.$$

Доказательство. Мы докажем эквивалентное утверждение: оператор M^* изометричен.

Для произвольного поля $v \in \mathcal{H}_\theta \cap \vec{C}_0^\infty(\Omega \setminus \omega)$, полагая $z := \nu \wedge v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega \setminus \omega)$, по (30) имеем

$$\begin{aligned}(M^*v, M^*v) &= (v,v) + 2\,(K \operatorname{curl}(\nu \wedge v), v) + (K \operatorname{curl}(\nu \wedge v), K \operatorname{curl}(\nu \wedge v)) \\ &= (v,v) - 2\,(K \operatorname{curl} z, \nu \wedge z) + (K \operatorname{curl} z, K \operatorname{curl} z) = (v,v).\end{aligned}$$

Последний переход сделан на основании (23). Полученное равенство по непрерывности распространяется на все $v \in \mathcal{H}_\theta$. $\square$

Теперь мы установим сплетающее свойство оператора M.

Теорема 2. *Для любого $s > 0$ выполнены (эквивалентные) равенства*

$$MP^s = X^s M, \quad P^s M^* = M^* X^s. \tag{35}$$

Доказательство. Мы докажем второе равенство. Ясно, что его достаточно проверить лишь на плотном множестве, так что пусть $v \in \mathcal{H}_\theta \cap \vec{C}_0^\infty(\Omega \setminus \Gamma^s \setminus \omega)$. Такой выбор v обеспечивает:

$$\nu \wedge v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega \setminus \omega), \quad \nu \wedge X^s v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^s \setminus \omega). \tag{36}$$

Второе сплетающее тождество на элементе v эквивалентно двум отношениям:

$$M^* X^s v \in \mathcal{C}^s, \quad M^* v - M^* X^s v \perp \mathcal{C}^s. \tag{37}$$

Первое следует из (34). Для того, чтобы доказать второе, положим $z = \nu \wedge v$, возьмем какой-нибудь элемент $y \in \mathcal{C}^s$ и рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}(M^* v - M^* X^s v, y) &= (v + K\operatorname{curl} z - X^s v - K\operatorname{curl}(X^s z), y) \\ &= (K\operatorname{curl} z - K\operatorname{curl}(X^s z), y).\end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь формулой (30). Из (36) следует, что в последнем выражении роторы можно понимать в классическом смысле. Обращаясь теперь к (18), получаем

$$\begin{aligned}&(K\operatorname{curl} z - K\operatorname{curl}(X^s z), y) \\ &\quad = \int_0^T d\xi\, ((X^\xi - P^\xi)\operatorname{curl} z, y) - \int_0^T d\xi\, ((X^\xi - P^\xi)\operatorname{curl}(X^s z), y) \\ &\quad = \int_0^s d\xi\, ((X^\xi - P^\xi)\operatorname{curl}(X^s z), y) + \int_s^T d\xi\, ((X^\xi - P^\xi)\operatorname{curl} z, y) \\ &\quad - \int_0^T d\xi\, ((X^\xi - P^\xi)\operatorname{curl}(X^s z), y) \\ &\quad = \int_s^T d\xi\, (\operatorname{curl} z, (X^\xi - P^\xi)\, y) - \int_s^T d\xi\, (\operatorname{curl}(X^s z), (X^\xi - P^\xi)\, y).\end{aligned}$$

Однако для $\xi \geqslant s$ будет $X^\xi y = P^\xi y$. Поэтому рассмотренное нами скалярное произведение равно нулю. Тем самым, ортогональность в (37) доказана. $\square$

Установим следующий результат о ядре оператора M.

Теорема 3. *Рассмотрим P^s как проекторы на $\mathcal{C}^s$, действующие в пространстве $\mathcal{C}$. Тогда P^s образуют спектральное семейство в $\mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{C}_{\rm sng} \subset \mathcal{C}$ – его сингулярное подпространство (см. [7]). Верно следующее включение*

$$\mathcal{C}_{\rm sng} \subset \operatorname{Ker} M.$$

Доказательство. Мы докажем эквивалентное соотношение

$$\operatorname{Ran} M^* \perp \mathcal{C}_{\rm sng}. \tag{38}$$

Для произвольного $v \in \mathcal{H}_\theta$ положим $y = M^* v$; тогда по сплетающему свойству и по изометричности M^* имеем

$$(P^s y, y) = (P^s M^* v, M^* v) = (M^* X^s v, M^* v) = (X^s v, v).$$

Правая часть полученного тождества абсолютно непрерывна по s, что следует из формулы (3) для $\varphi = \langle v, v\rangle$, и свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Поэтому y принадлежит абсолютно непрерывному подпространству спектральной меры P^s, а значит, $y \perp \mathcal{C}_{\rm sng}$. Тем самым, (38) доказано. $\square$

Следующая теорема устанавливает связь между определением (29) оператора M и его послойным представлением (13).

Теорема 4. *Для $y \in \vec{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}$ при почти всех $s \in (0, T)$ выполнено равенство* (13).

Доказательство. Пусть $v \in \mathcal{H}_\theta \cap \vec{C}_0^\infty(\Omega \setminus \Gamma \setminus \omega)$. Рассмотрим билинейную форму, отвечающую второму слагаемому оператора M:

$$\begin{aligned}(\nu \wedge \operatorname{curl}(Ky), v) &= -(\operatorname{curl}(Ky), \nu \wedge v) = -(Ky, \operatorname{curl}(\nu \wedge v)) \\ &= -\int_0^T ds\, ((X^s - P^s)\, y, \operatorname{curl}(\nu \wedge v)).\end{aligned} \tag{39}$$

Положим $\beta^s := (X^s - P^s)\, y$. В п. 3 мы показали, что поле $P^s y$ является гладким в Ω^s, и, более того, $P^s y \in \vec{C}^\infty(\mathcal{K})$ для любого компакта $\mathcal{K} \subset \overline{\Omega^s}$, $\mathcal{K} \cap \omega = \varnothing$. Следовательно, то же верно для β^s.

Для каждой точки $x \in \Omega \setminus \Gamma \setminus \omega$ существуют $\delta_x > 0$ и открытая область U_x, $\overline{U}_x \subset \Omega \setminus \Gamma \setminus \omega$, содержащая x, такая что при $|s - \tau(x)| < \delta_x$ множество $\overline{\Omega^s \cap U_x}$ C^∞-диффеоморфно кубу $[0,1]^3$, а множество $\Omega^s \cap U_x$ тем же диффеоморфизмом отображается в $(0,1)^3$. Такое U_x легко построить с помощью отображения (2). Положим

$$V_x := (\Omega^{\tau(x)+\delta_x} \setminus \overline{\Omega^{\tau(x)-\delta_x}}) \cap U_x.$$

Очевидно, что $x \in V_x$. Выберем из покрытия $\{V_x\}_{x \in \operatorname{supp} v}$ носителя v конечное подпокрытие $\{V_{x_j}\}_{j=1}^n$. Положим

$$V_j := V_{x_j}, \quad U_j := U_{x_j}, \quad \delta_j := \delta_{x_j}, \quad \tau_j := \tau(x_j).$$

Фиксируем разбиение единицы $\{\zeta_j\}_{j=1}^n$:

$$\zeta_j \in C_0^\infty(V_j), \quad \sum_j \zeta_j \big|_{\operatorname{supp} v} = 1.$$

Имеем

$$\int_0^T ds \, (\beta^s, \operatorname{curl}(\nu \wedge v)) = \sum_j \int_0^T ds \, (\beta^s, \operatorname{curl}(\nu \wedge (\zeta_j v))). \tag{40}$$

Для скалярного произведения под интегралом имеем

$$(\beta^s, \operatorname{curl}(\nu \wedge (\zeta_j v))) = (\beta^s, \operatorname{curl}(\nu \wedge (\zeta_j v)))_{\Omega^s \cap U_j}.$$

Предположим, что $|s - \tau_j| < \delta_j$. Тогда множество $\overline{\Omega^s \cap U_j}$ диффеоморфно кубу, поле β^s является гладким на этом множестве, поэтому применима формула интегрирования по частям. Возникающий при этом интеграл по границе $\partial(\Omega^s \cap U_j) \subset (\Gamma^s \setminus \omega) \cup \partial U_j$ (напомним, что U_j отделено от $\Gamma \cup \omega$) равен интегралу по $\Gamma^s \setminus \omega$, поскольку $\zeta_j = 0$ на ∂U_j. Кроме того, в силу (16) в Ω^s выполнено $\operatorname{curl} \beta^s = 0$, следовательно,

$$(\beta^s, \operatorname{curl}(\nu \wedge (\zeta_j v)))_{\Omega^s \cap U_j} = - \int_{\Gamma^s \setminus \omega} d\sigma \, \langle \beta^s, \zeta_j v \rangle. \tag{41}$$

Покажем, что полученное соотношение верно и при $|s - \tau_j| \geqslant \delta_j$. В этом случае правая часть равна нулю, поскольку Γ^s не пересекается с V_j (что следует из определения V_x) и $\operatorname{supp} \zeta_j \subset V_j$. Обратимся к левой части. Если $s \leqslant \tau_j - \delta_j$, то Ω^s не пересекается с V_j и левая часть равна нулю. Если же $s \geqslant \tau_j + \delta_j$, то Ω^s содержит V_j, а значит, и носитель ζ_j; тогда по определению пространств $\mathcal{C}^s$ имеем

$$\operatorname{curl}(\nu \wedge (\zeta_j v)) \in \mathcal{C}^s.$$

Так как β^s ортогонально $\mathcal{C}^s$, левая часть в (41) опять же равна нулю.

Выкладки (39)-(41) приводят к соотношению

$$(\nu \wedge \operatorname{curl}(Ky), v) = \int\limits_0^T ds \int\limits_{\Gamma^s \setminus \omega} d\sigma \, \langle \beta^s, v \rangle.$$

Поскольку $\nu \wedge \operatorname{curl}(Ky) \in \mathcal{H}_\theta$ и в силу произвольности поперечного поля v полученное равенство вместе с (3) позволяет написать следующую формулу:

$$(\nu \wedge \operatorname{curl}(Ky))|_{\Gamma^s \setminus \omega} = P_\theta (X^s - P^s)\, y\big|_{\Gamma^s \setminus \omega}.$$

Для завершения доказательства теоремы подставим полученное выражение в (29) и воспользуемся вторым равенством в (10):

$$\begin{aligned} My\big|_{\Gamma^s \setminus \omega} &= P_\theta y\big|_{\Gamma^s \setminus \omega} - P_\theta (X^s - P^s)\, y\big|_{\Gamma^s \setminus \omega} \\ &= P_\theta P^s\, y\big|_{\Gamma^s \setminus \omega} = P^s\, y\big|_{\Gamma^s \setminus \omega}. \end{aligned}$$

□

§6. Оператор N

Техника, использованная в пп. 4, 5, вполне аналогичным образом может быть применена в исследовании преобразования N. Здесь мы приводим без доказательства формулировки соответствующих утверждений, аналогичных леммам 1–3 и теоремам 1–4.

Для $0 < s \leqslant T$ положим

$$\widetilde{K}^s := \int\limits_0^s d\xi \, (X^\xi - Q^\xi), \quad \widetilde{K} := \widetilde{K}^T.$$

Лемма 4. *Пусть $s > 0$, $\beta \in \mathcal{H}^s$ – гладкое поле в Ω^s (в частности, гладкое вплоть до границы Γ), ортогональное $\mathcal{E}^s$. Тогда для любого $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi|_\Gamma = 0$, справедливо*

$$(\beta, \widetilde{K}^s \nabla\varphi)_{\Omega^s} = (\beta, \varphi\nu)_{\Omega^s}.$$

Лемма 5. *Для любой функции $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi|_\Gamma = 0$, справедливо соотношение*

$$(\widetilde{K} \nabla\varphi, \widetilde{K} \nabla\varphi) = 2\, (\widetilde{K} \nabla\varphi, \varphi\nu). \tag{42}$$

Из (42) следует

$$\|\widetilde{K}\nabla\varphi\|^2 = 2\,(\widetilde{K}\nabla\varphi, \varphi\nu) \leqslant 2\,\|\widetilde{K}\nabla\varphi\|\cdot\|\varphi\|.$$

Поэтому

$$\|\widetilde{K}\nabla\varphi\| \leqslant 2\,\|\varphi\|. \tag{43}$$

Лемма 6. *Для любого поля $h \in \mathcal{E}$ справедливо*

$$\|\mathrm{div}\,(\widetilde{K}h)\| \leqslant 2\,\|h\| \tag{44}$$

(дивергенция понимается в обобщенном смысле).

Аналогом формулы (29) является соотношение ($u \in \mathcal{H}$)

$$Nu := P_\nu u + \nu\,\mathrm{div}\,(\widetilde{K}u). \tag{45}$$

Оператор N ограничен в силу оценки (44).

Опишем сопряженный оператор N^*. Пусть $u \in \mathcal{H}$, $v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega\setminus\Gamma\setminus\omega)$, тогда

$$(\nu\,\mathrm{div}\,(\widetilde{K}u), v) = (\,\mathrm{div}\,(\widetilde{K}u), \langle\nu, v\rangle) = -(\widetilde{K}u, \nabla\langle\nu, v\rangle) = -(u, \widetilde{K}\nabla\langle\nu, v\rangle).$$

Мы воспользовались здесь тем, что функция $\langle\nu, v\rangle$ – гладкая и финитная в $\Omega\setminus\Gamma$. Отсюда

$$N^*v = P_\nu v - \widetilde{K}\nabla\langle\nu, v\rangle. \tag{46}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{Ran}\,N \subset \mathcal{H}_\nu. \tag{47}$$

Аналогично (32), (34) можно доказать включения

$$\mathrm{Ran}\,N^* \subset \mathcal{E},$$
$$\mathrm{Ran}\,N^*X^s \subset \mathcal{E}^s \quad \forall s > 0.$$

Таким образом, N аннулирует поля, ортогональные $\mathcal{E}$. Как и вслучае с оператором M, имеет смысл рассматривать сужение оператора N на подпространство $\mathcal{E}$ и сужение N^* на $\mathcal{H}_\nu$:

$$N : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_\nu, \quad N^* : \mathcal{H}_\nu \to \mathcal{E},$$

мы сохраним за этими сужениями прежние обозначения.

Теорема 5. *Оператор N частично изометрический, причем*

$$\mathrm{Ran}\,N = \mathcal{H}_\nu.$$

Теорема 6. *Для любого $s > 0$ выполнены (эквивалентные) равенства*

$$NQ^s = X^s N, \quad Q^s N^* = N^* X^s. \tag{48}$$

Теорема 7. *Рассмотрим Q^s как проекторы на $\mathcal{E}^s$, действующие в пространстве $\mathcal{E}$. Тогда Q^s образуют спектральное семейство в $\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{E}_{\text{sng}} \subset \mathcal{E}$ – его сингулярное подпространство. Верно следующее включение*

$$\mathcal{E}_{\text{sng}} \subset \operatorname{Ker} N.$$

Теорема 8. *Для $h \in \vec{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{E}$ при почти всех $s \in (0, T)$ выполнено равенство* (15).

Литература

1. М. И. Белишев, В. М. Исаков, Л. Н. Пестов, В. А. Шарафутдинов, *К реконструкции метрики по внешним электромагнитным измерениям.* — ДАН РАН **372**, No. 3 (2000), 298–300.
2. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод).* — Алгебра и анализ **12**, No. 2 (2000), 279–316.
3. М. И. Белишев, *Об унитарном преобразовании в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, связанном с разложением Вейля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 25–40.
4. М. Н. Демченко, *О частично изометрическом преобразовании соленоидальных векторных полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **370** (2009), 22–43.
5. М. Н. Демченко, *Динамическая трехмерная обратная задача для системы Максвелла.* — Алгебра и анализ **23**, No. 6 (2011), 31–78.
6. G. Schwarz, *Hodge decomposition – a method for solving boundary value problems.* — Lect Notes Math. **1607**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
7. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М., 1972.

Demchenko M. N. On transforms of divergence-free and curl-free fields, connected with inverse problems.

We study M- and N-transform acting correspondingly on divergence-free and curl-free vector fields on Riemannian manifold with boundary. These transforms arise in the study of inverse problems of electrodynamics and elasticity theory. A divergence-free field y is mapped by M to a field that is tangential to equidistants of the boundary. N-transform maps curl-free field to a field that is normal to equidistants. In preceding papers operators M and N were considered in case of smooth equidistants, which is realized in a small enough near-boundary layer. This allows to consider transforms of fields supported in such a layer; it was proved that M and N are unitary in corresponding spaces with L_2-norms. In one of the papers

the case of fields on the whole manifold was considered, but almost all equidistants were supposed to be Lipschitz surfaces. It was proved that M is coisometric (i.e., adjoint operator is isometric). In this paper, we obtain the same result for both transforms in the general case with no constraints on equidistants at all.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Ст.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Старый Петергоф, 198504,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 12 декабря 2013 г.