Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 422, 2014 г.

В. М. Бабич

ПОГРАНСЛОЙНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ТИПА

Методом сращивания асимптотических разложений находятся формулы, описывающие головную волну интерференционного типа (волну Булдырева). Рассматривается модельная плоская задача. Автор весьма благодарен А. П. Киселеву и В. Д. Лукьянову за высказанную ими гипотезу о затухании волны Булдырева.

1. Введение

Пусть гладкая кривая l разделяет две области $\Omega_j \subset \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$. Гладкие положительные функции $c_j(x, y)$ $j = 1, 2$, заданные в Ω_j $j = 1, 2$ – скорости волн в этих областях. Волновой процесс в Ω_j описывается уравнениями Гельмгольца со скоростями $c_j(x, y)$:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_j^2(x,y)}\right) u_j(x,y) = 0, \quad j = 1,2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

Предполагается, что на l выполняются классические краевые условия непрерывности $u(x, y)$ и ее нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, где $u(x, y) = u_j(x, y)$ при $(x, y) \in \Omega_j$:

$$[u]_l = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_l = 0. \tag{1.2}$$

Из области Ω_1 на границу раздела l падает волна u^{inc}, заданная своим геометро-оптическим разложением:

$$u^{\text{inc}} \simeq e^{i\omega\tau_{\text{inc}}(x,y)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^{\text{inc}}(x,y)}{(-i\omega)^j}. \tag{1.3}$$

Предполагается, что точка $O(0, 0) \in l$. Введем в окрестности l классические координаты s, n, где $|s|$ – отмеряемая от O длина дуги кривой

Ключевые слова: пограничный слой, анзац, головная волна, эйконал, шепчущая галерея, функции Эйри.

Работа поддержана грантамим РФФИ 11-01-00407А и 14-01-00535.

l. С одной стороны от O $s > 0$, с другой $s < 0$; $|n|$ – расстояние от кривой l. Считаем, что в Ω_1 $n > 0$, в Ω_2 $n < 0$.

На l пусть $c_2 > c_1$ и

$$\tau_{\rm inc}(x, y) = \tau_{\rm inc}(s) = \alpha_1 s + \frac{\alpha_2}{2} s^2 + O(s^3), \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{c_2(x, y)} = \frac{1}{c_2(s)} = \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 \frac{s^2}{2} + O(s^3), \quad \alpha_1 = \beta_0 = \frac{1}{c_2(0)} \tag{1.5}$$

Будем, исходя из уравнений (1.1) и условий (1.2), искать отраженную и преломленную волны. Эйконал преломленной волны τ_{refr} при $n = 0$ должен совпадать с $\tau_{\rm inc}$, откуда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{refr}}{\partial n}\Big|_{n=0} &= -\sqrt{\frac{1}{c_2^2(s)} - \Big(\frac{\partial \tau_{\rm inc}(s)}{\partial s}\Big)^2} \\ &= -\sqrt{(\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 \frac{s^2}{2} \ldots) - (\alpha_1 + \alpha_2 s + \ldots)^2},\end{aligned} \tag{1.6}$$

поэтому

$$\frac{\partial \tau_{refr}}{\partial n}\Big|_{n=0} = -\sqrt{2\beta_0(\beta_1 - \alpha_2)s + \ldots}. \tag{1.7}$$

Из (1.4)–(1.5) следует, что луч падающей волны, попадающий в точку O, некасателен к l. Соответствующий ему преломленный в область Ω_2 луч, как показывает формула (1.7), касается кривой l. Пусть

$$\beta_1 < \alpha_2, \tag{1.8}$$

тогда при $s < 0$ и $s \to -0$ угол преломления стремится к $\frac{\pi}{2}$. При малых $s > 0$, если выполнено условие (1.8), формула (1.7) дает для $\frac{\partial \tau_{refr}}{\partial n}$ комплексные значения. Это означает, что в соответствующих точках имеет место полное внутреннее отражение.

Преломленные лучи при малых $|s|$ ($s < 0$) почти касательны к l. Они порождают волну шепчущей галлереи (ШГ), которая будет распространяться в области Ω_2 вблизи l, если соответствующий эффективный радиус кривизны P (см. [1, Гл. 4]) – положителен:

$$\frac{1}{P} := \Big(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{c_2}\frac{\partial c_2}{\partial n}\Big)\Big|_{n=0} > 0. \tag{1.9}$$

Распространяясь в области Ω_2 вблизи l ШГ волна будет просачиваться в область Ω_1 и распространяться далее в Ω_1 вдоль лучей геометрической оптики. Эта просочившаяся волна и есть искомая головная волна интерференционного типа – волна Булдырева. (В. С. Булдырев в шестидесятые годы рассматривая такую волну см. [2]. В работе [3] в связи с этой тематикой им использовалась погранслойная техника (вариант ее отличный от применяемого в настоящей работе). Из недавних публикаций, посвященной волне Булдырева, укажем работу [4].

Лучи волны Булдырева состоят из трех частей: первая часть – это луч l' падающей волны, кончающийся в точке O, вторая часть – отрезок l'' линии l и третья часть (l''') – луч геометрической оптики, уходящий от кривой l под углом к l, равным $\arccos \frac{c_1(M)}{c_2(M)}$ ($M \in l$ – начальная точка l'''). Лучи волны Булдырева удовлетворяют принципу Ферма (на что обратил наше внимание И. В. Андронов).

ШГ волны в области Ω_2 вблизи l мы будем строить, используя метод пограничного слоя. Это дает нам возможность получить аналитические формулы, описывающие головную волну Булдырева. Другие подходы к ее построению см. в работах [2–4].

Волна Булдырева уносит энергию ШГ волны, поэтому с ростом s ШГ волна должна затухать. При выводе уравнений переноса в работе [5] не были учтены некоторые слагаемые, поэтому там множитель, описывающий затухание, отсутствует, что является ошибкой. Нуждается в исправлении и аналитическое выражение для волны Булдырева в работе [5].

В заключение заметим, что в отличии от классической головной волны (возникающей при $c_1, c_2 = \text{const}$, $c_1 < c_2$, когда l – прямая), волна Булдырева структурно устойчива: при малом "шевелении" $c_j(M)$, кривой l, падающей волны u^{inc} структура формул, описывающих волну Булдырева, сохраняется (только функции, входящие в эти формулы, немного изменяются).

2. Анзац для волны шепчущей галлереи

Вид формального асимптотического разложения для волны шепчущей галереи – основа всех построений. Предлагается следующий анзац – вид асимптотического ряда, описывающего волну шепчущей галереи. (Этот анзац – обобщение формулы (14) работы [5]

$$u^2 \simeq e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^2(\nu, s)}{\omega^{i/3}}. \tag{2.1}$$

Здесь

$$\tau_0(s) = \tau_{inc}(O) + \int\limits_0^s \frac{ds}{c_0(s)}, \quad c_0(s) = c_2(s,n)\big|_{n=0}, \tag{2.2}$$

(в дальнейшем мы считаем, что $\tau_{\text{inc}}(O) = 0$),

$$\nu = \left(\frac{2}{c_0^2 P}\right)^{1/3} \nu_1 = \eta(s)\nu_1,\ \nu_1 = \omega^{2/3} n, \tag{2.3}$$

P – эффективный радиус кривизны кривой l

$$u_j^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \frac{e^{i\omega^{1/3}\tau_1(s)\zeta} U_j^2(s,\nu,\zeta)}{v(\zeta)}\, d\zeta. \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем $v(\zeta)$, $w_1(\zeta)$, $w_2(\zeta)$ – решения уравнения Эйри $\frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} - \zeta w(\zeta) = 0$ в определении В. А. Фока (см. например, [1, Дополнение 1]). Функции U_j имеют следующую структуру

$$U_j(\zeta,\nu,s) = \mathcal{P}_j(\zeta,\nu) v(zeta - \nu) + Q_j(\zeta,\nu) v^1(\zeta - \nu), \tag{2.5}$$

где $\mathcal{P}_j$ и Q_j – полиномы по ζ и ν, коэффициенты которых – гладкие функции от s.

Контур Γ (см. формулу (2.4) “рогатый” – состоит из трех лучей

$$L_1 = (+\infty e^{\frac{2\pi i}{3}}, 0), L_2(+\infty e^{\frac{4\pi i}{3}}, 0), L_3 = (0, +\infty e^{\frac{\pi i}{3}}) \tag{2.6}$$

При интегрировании по L_1 (в подинтегральном выражении функции Эйри v, v' следует заменить на w_2, w_2', при интегрировании по L_2 – из подинтегрального выражения следует вычесть подинтегральное выражение интеграла $\int_{L_1}$.

Запишем (2.1) в виде

$$u^2 \simeq \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma e^{i\omega\tau_0(s) + i\omega^{1/3}\tau_1(s)\zeta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j^2}{\omega^{1/3}}\, d\zeta \tag{2.7}$$

и потребуем, чтобы подинтегральное выражение формально удовлетворяло уравнению Гельмгольца (1.1) при $j = 2$. Разложение, стоящее под интегралом в формуле (2.7), аналогично анзацу (1.3) главы 3 монографии [6].

Вычисления, приведенные в книге [6], приводят к соотношению

$$\frac{2\tau_1'(s)}{\eta^2 c_0(s)} = 1,$$

откуда

$$\tau_1(s) = \frac{1}{2}\int\limits_0^s \eta^2 c_0(s)\,ds. \tag{2.8}$$

(мы полагаем $\tau_1(0) = 0$. Другой выбор приводит к появлению в анзаце (2.1) дополнительного постоянного множителя). Для нахождения U_j^2 мы получаем рекуррентную систему уравнений

$$\mathfrak{L}_0 U_0^2 = O, \quad \mathfrak{L}_0 U_1^2 + \mathfrak{L}_1 U_0^2 = 0, \quad \mathfrak{L}_0 U_2^2 + \mathfrak{L}_1 U_1^2 + \mathfrak{L}_2 U_0^2 = O. \tag{2.9}$$

Здесь $\mathfrak{L}_j$ – дифференциальные операторы. Дифференцирование не выше второго порядка по s и по ν. Коэффициенты – гладкие функции от s, полиномиально зависящие от ζ и ν.

Выпишем выражения для $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{L}_1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_0 &= \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \nu - \zeta \\ \mathfrak{L}_1 &= i\eta^{-2}\Big(\Big(\frac{d}{ds}\frac{1}{c_0}\Big) + \frac{2}{c_0}\frac{d}{ds}\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\eta = \left(\frac{2}{c_0^2 P}\right)^{\frac{1}{3}}$ (см. формулу (2.3).

3. Нахождение волны шепчущей галереи в первом приближении

Из уравнения $\mathfrak{L}_0 U_0 = 0$ и формулы (2.5) при $j = 0$ следует, что

$$U_0 = \mathcal{A}_0(s,\zeta)v(\zeta - \nu). \tag{3.1}$$

Уравнение для нахождения U_1^2 имеет вид:

$$\mathfrak{L}_0 U_1^2 + \mathfrak{L}_1 U_0^2 = 0. \tag{3.2}$$

Если обратиться к (2.5) и положить там $j = 1$, выражение для U_1 нетрудно найти методом неопределенных коэффициентов. Расчеты показывают, что

$$\begin{aligned} U_1^2 = (-i)\eta^2\Big(\frac{d\frac{1}{c_0}}{ds}\mathcal{A}_0 + \frac{2}{c_0}\mathcal{A}_0^1(s)\Big)v'(\zeta-\nu) \\ - \frac{2}{c_0}\frac{\eta'}{\eta}\mathcal{A}_0\Big(\Big(-\frac{1}{4}\Big)\nu^2 v(\zeta-\nu) + v'(\zeta-\nu)\Big)\frac{1}{2} + \mathcal{A}_1(s,\zeta)v(\zeta-\nu) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_1$ полиномы по ζ с коэффициентами, зависящими от s.

4. Волна Булдырева и анзац Фридлендера–Келлера

Будем искать волну Булдырева в виде

$$u^1(M) = \omega^{-\frac{1}{3}} e^{i\omega\tau(M)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(M,\omega)}{\omega^{j/3}} \quad M \in \Omega_1. \tag{4.1}$$

Здесь

$$u_j(M,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_4} e^{i\omega^{\frac{1}{3}}\tau_1(M)\zeta} U_j(M,\zeta)\, d\zeta. \tag{4.2}$$

Здесь L_4 – прямая $(+\infty e^{\frac{4\pi i}{3}}, +\infty e^{\frac{\pi i}{3}})$.

Если в (4.1) поменять формально суммирование и интегрирование, то мы придем к выводу, что анзац (4.1)–(4.2) есть понимаемый формально интеграл от анзаца Фридлендера–Келлера [7]

$$U^1 = \omega^{-\frac{1}{3}} e^{i\omega\tau(M) + i\omega^{1/3}\tau_1(M)\zeta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j^1(M,\zeta)}{\omega^{j/3}} \tag{4.3}$$

Обращает на себя внимание множитель $\omega^{-\frac{1}{3}}$, которого нет в анзаце (2.1)–(2.4).

Подставляя анзац (4.3) в уравнение Гельмгольца (1.1) ($j = 1$) придем к обычному уравнению эйконала $(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{(c_1(M))^2}$ и уравнениям переноса, из которых выпишем главные:

$$\nabla\tau(M)\nabla\tau_1 = 0 \tag{4.4}$$

$$2\nabla\tau\nabla U_0 + U_0\Delta\tau = 0 \tag{4.5}$$

Обратимся к краевым условиям. Сначала заметим, что при $M \in l$ анзац волны шепчущей галереи (2.1)–(2.4) начинается с членов порядка $O(\omega^{-\frac{1}{3}})$. В самом деле, при $\nu = 0$ интеграл по L_2 очевидно равен нулю, а сумма интегралов по L_1 и L_3 пропорциональна интегралу

$$\int\limits_{L_1 \cup L_3} e^{i\omega\tau_1(s)\zeta}\, d\zeta,$$

в силу того, что $\tau_1(s) > 0$ при $s > 0$ (см. (2.8)), равному нулю.

Следующий шаг – удовлетворение краевому условию $\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right]_l = 0$. Первое следствие этого условия – равенства (см. формулы (2.2) и (2.8) для $\tau_0(s)$ и $\tau_1(s)$):

$$\tau(M)|_l = \tau_0(s) \quad \text{и} \quad \tau_1(M)|_l = \tau_1(s). \tag{4.6}$$

Уравнение эйконала, естественное с точки зрения физики неравенство $\frac{\partial\tau(M)}{\partial n}|_l > 0$ и уравнение переноса (4.4) однозначно определяют $\tau(M)$ и $\tau_1(M)$.

Производные от $\frac{\partial u_1}{\partial n}|_l$ и $\frac{\partial u_2}{\partial n}|_l$ имеют одинаковый порядок по большому параметру $\sim \omega^{\frac{2}{3}}$. Приравняем соответствующие выражения. Прежде всего производная $\frac{\partial u_2}{\partial n}$ с точностью до экспоненциальных множителей равна

$$\omega^{2/3}\cdot\frac{1}{2\pi}A_0(s)\int\limits_{L_4} e^{i\tau_1(s)\omega^{1/3}\zeta}\left(\frac{-v'(\zeta)}{v(\zeta)}+\frac{w_2'(\zeta)}{w_2(\zeta)}\right)d\zeta\,\eta(s)$$

$$=\frac{\omega^{2/3}}{2\pi}A_0(s)\eta(s)\int\limits_{L_4} e^{i\tau_1(s)\omega^{1/3}\zeta}\frac{d\zeta}{v(\zeta)w_2(\zeta)}. \tag{4.7}$$

Мы воспользовались известным соотношением

$$v(\zeta)w_2'(\zeta)-w_2(\zeta)v'(\zeta)\equiv 1.$$

Выражение (4.7) должно в силу краевого условия $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]|_l = 0$ совпадать с

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_4} i\omega^{2/3}\frac{\partial\tau(M)}{\partial n}e^{i\omega^{1/3}\tau_1(s)\zeta}U_0(M,\zeta)\big|_l\,d\zeta \tag{4.8}$$

Из совпадения (4.7) и (4.8) следует, что

$$U_0(M,\zeta)|_l=\frac{1}{i(\frac{\partial\tau}{\partial n})_\zeta}A_0(s)\eta(s)\frac{1}{v(\zeta)w_2(\zeta)}. \tag{4.9}$$

Уравнение переноса (4.5) однозначно определяет $U_0(M,\zeta)$:

$$U_0(M,\zeta)=\frac{A_0(s)\eta(s)}{i\sqrt{(\frac{1}{c(s)})^2-(\frac{1}{c_2(s)})^2}}\frac{1}{v(\zeta)w_2(\zeta)}\sqrt{\frac{c_1(M)}{c_1(s)}}\sqrt{\frac{J(s)}{J(M)}}. \tag{4.10}$$

Здесь $J(M)$ и $J(s)$ значения геометрического расхождения лучей (см. [1, глава 1]). Точки с координатами $(s,0)$, лежащие на l и M, соединены лучом, входящим в поле лучей волны Булдырева.

5. Уравнение переноса для $\mathcal{A}_0(s)$. Завершение вывода формулы для волны Булдырева в первом приближении

Искомое уравнение переноса для $\mathcal{A}_0(s)$ – следствие краевого условия $[u]_l = 0$. Вернее этого условия в первом приближении.

Как следует из формул (3.3) и (4.8)–(4.10), для выполнения в первом приближении равенства $u_1|_l = u_2|_l$ достаточно, чтобы

$$(-i)\eta^{-2}\left[\left(\frac{d\frac{1}{c_0}}{ds}\mathcal{A}_0 + \frac{2}{c_0}\mathcal{A}_0'\right) - \frac{1}{c_0}\frac{\eta'}{\eta}\mathcal{A}_0\right] = \frac{\mathcal{A}_0\eta(s)}{i\sqrt{\frac{1}{c_1(s)} - \frac{1}{c_2(c)}}}. \tag{5.1}$$

Равенство (5.1) представляет собой обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение, где $\mathcal{A}_0(s)$ – искомая функция. Запишем это уравнение в более приглаженном виде:

$$\frac{2}{c_0}\mathcal{A}_0' + \left(\frac{1}{c_0}\right)'\mathcal{A}_0 - \frac{1}{c_0}\frac{\eta'}{\eta}\mathcal{A}_0 - \frac{\eta^3\mathcal{A}_0}{\sqrt{\frac{1}{c_1(s)} - \frac{1}{c_2(s)}}} = 0. \tag{5.2}$$

Для того, чтобы найти решение уравнения (5.2), нужно начальное условие. Это начальное условие, а именно значение $\mathcal{A}_0$ при $s = 0$, находится как следствие склейки (или сращивания) асимптотики, описываемой анзацем (2.1)–(2.4), и асимптотики волнового поля в окрестности точки O в первом приближении, которое выражается интегралом Пирси. Соответствующие построения были проведены в работе [5]. Мы приведем лишь окончательное выражение для $\mathcal{A}_0(0)$. В результате мы приходим к формуле для $\mathcal{A}_0(s)$:

$$\mathcal{A}_0(s) = \mathcal{A}_0(0)\sqrt{\frac{\eta(c)c_0c_s}{\eta(0)c_0(0)}}\cdot exp\left(-\int\limits_0^s \eta^3\frac{c_0\,ds}{\sqrt{(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0(s)})}}\right) \tag{5.3}$$

Здесь

$$\mathcal{A}_0(0) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \beta_1}}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\omega}{c_2(0)}\right)^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{P(O)}\right)^{2/3}U_0^{\mathrm{inc}}(O), \tag{5.4}$$

где $P(O)$ – эффективный радиус кривизны кривой l в точке O.

Экспоненциальный множитель в формуле (5.3) описывает затухание волны шепчущей галлереи с ростом s.

Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М. (1970).
2. В. С. Булдырев, *Исследование функций Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре.* I. — Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. No. 4. дополнение к No. 4 (1964), 275–286.

3. В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения.* — Изв. ВУЗов **10**, No. 5 (1967), 699–711.
4. А. А. Мацковский, *Коротковолновый точечный источник колебаний вблизи неоднородной полуплоскости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 107–120.
5. V. M. Babich, *Boundary layer approach to describe of an interference head wave.* Wave Motion, Vol. 46, pp. 169–173 (2009).
6. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Л. Изд–во ЛГУ (1974), 125 с.
7. F. G. Friedlander, J. B. Keller, *Asymptotic expansions of solutions of* $(\nabla^2+k^2)u=0$. — Commun. on Pure and Appl. Math. **8**, No. 3 (1955), 387–394.

Babich V. M. Boundary layer approach to describe of an interference head wave.

Boundary layer method is used to construct a mathematical describtion of an interference head wave.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия

E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 5 декабря 2013 г.