Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

Б. П. Харламов

СОХРАНЕНИЕ МАРКОВОСТИ ПРИ ЗАМЕДЛЕННОМ ОТРАЖЕНИИ

§1. Введение

Отражение марковского диффузионного процесса с замедлением, по-видимому, впервые было исследовано в работе [1, с. 197], методом стохастического интегрирования, при котором учитывалось сохранение марковости процесса при отражении. Однако существуют примеры взаимодействия процесса с границей области задания, которые можно интерпретировать как отражение, при котором марковское свойство теряется, хотя и сохраняется свойство непрерывного полумарковского процесса. Приведём простой пример.

Пусть $w(t)$ $(t \geqslant 0)$ – одномерный винеровский процесс. Для данного отрезка $[a, b]$ $(a < w(0) < b)$ рассмотрим усеченный процесс

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} b, & w(t) \geqslant b \\ w(t), & a < w(t) < b \\ a, & w(t) \leqslant a \end{cases}$$

при всех $t \geqslant 0$. Ясно, что этот процесс уже не является марковским. Однако он сохраняет полумарковость. Марковское свойство выполняется относительно момента первого выхода из любого открытого интервала внутри отрезка, а также из любых односторонних окрестностей граничных точек.

Полумарковский подход к проблеме отражения состоит в решении следующей задачи: определить полумарковскую переходную функцию процесса на границе так, чтобы он сохранял заданный диффузионный вид внутри интервала, т.е. до момента первого выхода на границу и в любое время схода с границы внутрь заданной области значений. При этом локально марковский процесс (внутри интервала) в общем случае теряет свою глобальную марковость. Задачи такого рода важны для приложений, где принимается во внимание состояние взаимодействия

Ключевые слова: Диффузионный, марковский, непрерывный полумарковский процесс, отражение, замедление, момент первого выхода, переходная функция, преобразование Лапласа, замена времени, дисконтинуум.

диффундирующей частицы с границей, приводящее к некоторому динамическому равновесию системы. В работе [3] был описан весь класс полумарковских процессов отражения для данного локально марковского диффузионного процесса. В работе [5] были доказаны условия, выделяющие в этом классе подкласс глобально марковских процессов. В настоящей работе мы продолжаем исследование процессов с полумарковским отражением. Целью исследования является получение формул, характеризующих замену времени, превращающую процесс с мгновенным отражением в процесс с замедленным отражением.

В работе [7] при анализе двумерного диффузионного процесса в окрестности плоского экрана фактически была рассмотрена замена времени в тангенциальной составляющей процесса относительно не изменённого хода времени нормальной составляющей. Это разделение процесса на две составляющие облегчило понимание ситуации, но вместе с этим замаскировало истинный механизм преобразования. На самом деле замена времени могла быть изучена на начальном этапе полумарковского подхода к проблеме замедленного отражения [3], а именно – замена времени у преобразованного процесса относительно хода времени у не преобразованного процесса. В настоящей статье устраняется эта недоработка нашей первой статьи на эту тему.

§2. Полумарковская переходная функция на границе

Мы рассмотрим диффузионный процесс $X(t)$ на полупрямой $t \geqslant 0$ с одной границей области значений в нуле. Будем предполагать, что процесс не уходит на бесконечность и из любой положительной начальной точки достигает нуля с вероятностью единица. Этими свойствами обладает, например, диффузионный марковский процесс с отрицательным коэффициентом сноса и ограниченной локальной дисперсией.

Мы обосновали ранее, почему целесообразно рассматривать полумарковское отражение. Операция усечения винеровского процесса в нуле даёт простой пример превращения марковского процесса в непрерывный полумарковский. Полумарковский подход позволяет рассматривать с единой точки зрения как операцию мгновенного отражения, так и операцию усечения. Всё это частные случаи отражения с замедлением.

В рамках полумарковской модели отражения естественно предположить, что $X(t)$ – полумарковский процесс диффузионного типа. Пусть

(P_x) $(x \geqslant 0)$ – согласованное семейство распределение этого процесса, зависящих от начальной точки траектории. На интервале $(0,\infty)$ полумарковские переходные производящие функции процесса (преобразования Лапласа от моментов первого выхода)

$$g_{(a,b)}(\lambda,x) := \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda\sigma_{(a,b)}};\, X(\sigma_{(a,b)}) = a\right);$$
$$h_{(a,b)}(\lambda,x) := \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda\sigma_{(a,b)}};\, X(\sigma_{(a,b)}) = b\right)$$

$(a < x < b, \lambda \geqslant 0)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\, f'' + A(x) f' - B(\lambda,x) f = 0, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$g_{(a,b)}(\lambda, a+) = h_{(a,b)}(\lambda, b-) = 1; \quad g_{(a,b)}(\lambda, b-) = h_{(a,b)}(\lambda, a+) = 0;$$

будем предполагать, что коэффициенты уравнения – кусочно-непрерывные функции от $x > 0$ и при любом x функция $B(\lambda,x)$ неотрицательна и имеет вполне монотонную частную производную по λ. Здесь и далее индексы у E (математическое ожидание) совпадают с индексами соответствующего P (вероятностная мера).

Отражение процесса от точки $x = 0$ означает прежде всего присоединение краевой точки к области значений процесса. Далее, рассматриваются все полузамкнутые интервалы $[0,r)$, из которых процесс может выйти только через открытую границу. Соответствующие полумарковские переходные производящие функции процесса обозначаются стандартным образом как $h_{[0,r)}(\lambda,x)$, где допускается $h_{[0,r)}(\lambda,0) > 0$. Функция $K(\lambda,r) := h_{[0,r)}(\lambda,0)$ играет важную роль при описании свойств отраженного процесса. Пользуясь полумарковским свойством процесса, получаем

$$h_{[0,r)}(\lambda,x) = h_{(0,r)}(\lambda,x) + g_{(0,r)}(\lambda,x)\, K(\lambda,r),$$

а также

$$K(\lambda,r) = K(\lambda,r-\epsilon)(h_{(0,r)}(\lambda,r-\epsilon) + g_{(0,r)}(\lambda,r-\epsilon) K(\lambda,r)).$$

Предполагая, что существуют производные по второму аргументу

$$g_{(a,b)}(\lambda,x) = 1 + g'_{(a,b)}(\lambda,a+)\,(x-a) + o(x-a),$$
$$g_{(a,b)}(\lambda,x) = -g'_{(a,b)}(\lambda,b-)\,(b-x) + o(b-x),$$
$$h_{(a,b)}(\lambda,x) = h'_{(a,b)}(\lambda,a+)\,(x-a) + o(x-a),$$
$$h_{(a,b)}(\lambda,x) = 1 - h'_{(a,b)}(\lambda,b-)\,(b-x) + o(b-x),$$

мы получаем дифференциальное уравнение

$$K'(\lambda,r)+K(\lambda,r)\,h'_{(0,r)}(\lambda,r-)+K^2(\lambda,r)\,g'_{(0,r)}(\lambda,r-)=0$$

и его общее решение

$$K(\lambda,r)=\frac{h'_{(0,r)}(\lambda,0+)}{C(\lambda)-g'_{(0,r)}(\lambda,0+)},$$

где произвольная постоянная $C(\lambda)$ может зависеть от λ. Для того, чтобы $K(\lambda,r)$ было преобразованием Лапласа достаточно, чтобы функция $C(\lambda)$ была неотрицательной и неубывающей, а производная её была вполне монотонной функцией [5]. Как показано в [3], при наших предположениях справедливо

$$K(\lambda,r)=1-C(\lambda)\,r+o(r)\quad(r\to 0).$$

Наша очередная задача состоит в изучении замены времени в процессе с мгновенным отражением, при которой возникает процесс с замедленным отражением.

§3. Замена времени относительно хода времени при мгновенном отражении

Обозначим θ_t оператор временно́го сдвига на множестве выборочных траекторий процесса – пространство Скорохода $\mathcal{D}$ с соответствующей сигма-алгеброй подмножеств $\mathcal{F}$, σ_Δ оператор на этом пространстве момента первого выхода траектории из множества Δ. Для любых марковских моментов τ_1, τ_2 (относительно натуральной фильтрации) на множестве $\{\tau_1<\infty\}$ определим операцию

$$\tau_1\dot{+}\tau_2:=\tau_1+\tau_2\circ\theta_{\tau_1}.$$

Известно [4], что для любых открытых (в относительной топологии) множеств Δ_1, Δ_2, если $\Delta_1\subset\Delta_2$, то

$$\sigma_{\Delta_2}=\sigma_{\Delta_1}\dot{+}\sigma_{\Delta_2}.$$

При этом $\sigma_\Delta(\xi)=0$, если $\xi(0)\notin\Delta$.

Введём специальные обозначения для некоторых моментов первого выхода и их комбинаций (при $\epsilon>0$), а также для случайных интервалов

$$\alpha:=\sigma_{[0,\epsilon)},\quad \beta:=\sigma_{(0,\infty)},\quad \gamma(0):=\beta,$$
$$\gamma:=\alpha\dot{+}\beta,\quad \gamma(n):=\gamma(n-1)\dot{+}\gamma\quad(n\geqslant 1),$$
$$b(0):=[0,\beta),\quad a(n):=[\gamma(n-1),\,\gamma(n-1)\dot{+}\alpha),$$

$$b(n) := [\gamma(n-1)\dot{+}\alpha,\ \gamma_n).$$

Случайные времена α, $\gamma(n)$, и интервалы $a(n)$, $b(n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ зависят от ϵ. Эту зависимость мы будем обозначать, при необходимости, нижним индексом.

Заметим, что последовательность $(\gamma(n))$ образует моменты скачков процесса восстановления. Кроме того для любого $t > 0$, если $X(t) > 0$, то существуют $\epsilon > 0$ и $n \geqslant 1$ такие, что $t \in b_\epsilon(n)$. Отсюда следует, что при $\epsilon \to 0$ случайное множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} b_\epsilon(k)$ с вероятностью 1 покрывает всё множество положительных значений процесса X. На долю дополнительного множества – предела множества $\cup_{k=1}^{\infty} a_\epsilon(k)$ – остаются возможные интервалы постоянства процесса X на оси времени, а также дисконтинуум точек (замкнутое множество с мощностью континуума, не содержащее интервалов, [2, с. 158]), состоящий из нулей процесса X, линейная мера которого может быть больше или равна 0. Эта мера входит составной частью в меру задержки процесса при отражении.

Известно, что непрерывный однородный полумарковский процесс является марковским тогда и только тогда, когда он не содержит внутренних интервалов постоянства (однако, возможен интервал окончательной остановки), [4]. Отсюда не следует, что процесс с замедленным отражением не может быть глобально марковским. Его замедление может происходить исключительно за счёт дисконтинуума. Процессом с мгновенным отражением мы назовём процесс, у которого с вероятностью 1 нет интервалов постоянства в нуле и линейная мера дисконтинуума нулей равна нулю.

Мы построим неубывающую последовательность непрерывных неубывающих функций $V_\epsilon(t)$ $(t \geqslant 0)$, сходящуюся к некоторому пределу $V(t)$ при $\epsilon \to 0$ равномерно на каждом ограниченном интервале. Пусть $X(0) > 0$. Положим $V_\epsilon(t) = t$ на интервале $b(0)$ и $V_\epsilon(t) = \beta$ на интервале $a(1)$. На интервале $b(1)$ функция V_ϵ линейно возрастает с коэффициентом 1. На интервале $a(2)$ функция V_ϵ постоянна. Потом снова линейно возрастает с коэффициентом 1 на интервале $b(2)$ и так далее, сохраняя постоянство на интервалах $a(k)$ и линейно возрастая с коэффициентом 1 на интервалах $b(k)$. Замечая, что при $\epsilon_1 > \epsilon_2$ для каждого интервала $a_{\epsilon_2}(k)$ существует n такое, что этот интервал принадлежит интервалу $a_{\epsilon_1}(n)$, убеждаемся, что последовательность построенных функций не убывает, ограничена и, следовательно, стремится к пределу с $P_{X(0)}$-вероятностью 1.

Определим процесс с мгновенным отражением, получаемый из исходного процесса X, как процесс, получаемый путём выбрасывания всех его интервалов постоянства в нуле и придания дисконтинууму меры нуль. Такой процесс может быть представлен как предел (в метрике Скорохода) последовательности процессов $X_\epsilon(t)$, определяемых для всех t формулой

$$X_\epsilon(t) = X(V_\epsilon^{-1}(t)),$$

где $V_\epsilon^{-1}(y)$ определяется как момент первого достижения процессом $V_\epsilon(t)$ уровня y. Замена времени в процессе X сводится к выбрасыванию из каждой выборочной траектории процесса отрезков кривой, приходящихся на интервалы $a_\epsilon(k)$ $(k = 1, 2, \dots)$. Таким образом $X_\epsilon(t)$ имеет скачки величиной ϵ в момент первого достижения нуля и в каждый момент первого достижения нуля после достижения уровня ϵ. Обозначим процесс с мгновенным отражением $X_0(t)$. Такой процесс измерим относительно исходной сигма-алгебры подмножеств и непрерывен. Пусть (P_x^0) – согласованное семейство мер такого процесса.

Тогда, очевидно, что V является обратной заменой времени, превращающей процесс X_0 в процесс X, т. е. $X = X_0 \circ V$. При этом выполняется условие: для любого открытого интервала $\Delta = (a, b)$ $(0 < a < b)$ или $\Delta = [0, r)$ $(r > 0)$ справедливо

$$\sigma_\Delta(X_0 \circ V) = V^{-1}(\sigma_\Delta(X_0)).$$

Отображение V^{-1} мы называем прямой заменой времени, которая каждому "внутреннему" марковскому моменту времени "исходного" процесса сопоставляет аналогичный момент преобразованного процесса (в данном случае исходный процесс – это $X_0(t)$).

Заметим, что при $\epsilon_1 > \epsilon_2$ множество $\{\gamma_{\epsilon_1}(n),\ n = 0, 1, 2, \dots\}$ входит составной частью в множество $\{\gamma_{\epsilon_2}(n),\ n = 0, 1, 2, \dots\}$. Поэтому каждый марковский момент $\gamma_\epsilon(n)$ является моментом марковской регенерации процесса V, что позволяет в принципе рассчитать конечномерные распределения этого процесса. С другой стороны, этот процесс однозначно характеризуется его обращением – процессом $V^{-1}(y) := \inf\{t \geqslant 0 : V(t) \geqslant y\}$ $(y > 0)$. Этот процесс удобен тем, что преобразование Лапласа его значения в точке y может быть найдено в качестве предела последовательности легко вычисляемых лапласовых образов величин $V_\epsilon^{-1}(y)$ при $\epsilon \to 0$.

Теорема 1. *Прямая замена времени $V^{-1}(y)$, отображающая процесс с мгновенным отражением в процесс с замедленным отражением подчиняется соотношению*

$$\mathbb{E}_0 \exp(-\lambda V^{-1}(y)) = \mathbb{E}_0^0 \exp(-\lambda\, y - C(\lambda) W(y)), \tag{2}$$

где $W^{-1}(t)$ – неубывающий процесс с независимыми приращениями, для которого

$$\mathbb{E}_0 \exp(-\lambda W^{-1}(t)) = \exp(g'_{(0,\infty)}(\lambda, 0+)\, t). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть (без потери общности) $X(0)=0$ и $N_\epsilon(y)=n$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n-1} |b(k)| < y \leqslant \sum_{k=1}^{n} |b(k)|$ ($|a(k)|$, $|b(k)|$ – длины интервалов $a(k)$, $b(k)$). Тогда

$$\mathbb{E}_0 \exp(-\lambda V^{-1}(y)) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}_0 \exp(-\lambda V_\epsilon^{-1}(y)) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}_0 \left(-\lambda y - \lambda \sum_{k=1}^{N_\epsilon(y)} |a(k)|\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0 \exp(-\lambda(V_\epsilon^{-1}(y) - y)) &= \mathbb{E}_0 \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{N_\epsilon(y)} |a(k)|\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_0 \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)};\, N_\epsilon(t) = n\right) \\
= P_\epsilon(\beta \geqslant y) + \sum_{n=1}^{\infty} &\mathbb{E}_0\left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right);\, \sum_{k=1}^{n-1} |b(k)| < y \leqslant \sum_{k=1}^{n} |b(k)|\right) \\
&= P_\epsilon(\beta \geqslant y) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_0 \left(\exp\left(-\lambda\alpha - \lambda \sum_{k=2}^{n} \alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right);\right. \\
&\left.\beta\circ\theta_\alpha + \sum_{k=2}^{n-1} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)} < y \leqslant \beta\circ\theta_\alpha + \sum_{k=2}^{n} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right) \\
&= P_\epsilon(\beta \geqslant y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y \mathbb{E}_0 \left(\exp\left(-\lambda\alpha - \lambda \sum_{k=2}^{n} \alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right);\right. \\
&\left.\beta\circ\theta_\alpha \in dx,\ \sum_{k=2}^{n-1} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)} < y - x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right)
\end{aligned}$$

$$= P_\epsilon(\beta \geqslant y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y \mathbb{E}_0(e^{-\lambda\alpha};\, \beta\circ\theta_\alpha \in dx)\mathbb{E}_0 \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=2}^{n} \alpha\circ\theta_{\gamma(k-2)}\right);\right.$$

$$\left.\sum_{k=2}^{n-1} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-2)} < y - x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-2)}\right)$$

$$= P_\epsilon(\beta \geqslant y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y P_\epsilon(\beta \in dx)\mathbb{E}_0(e^{-\lambda\alpha})\mathbb{E}_0 \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} \alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right);\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n-2} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)} < y - x \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \beta\circ\theta_\alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right)$$

$$= P_\epsilon(\beta \geqslant y) + \int_0^y P_\epsilon(\beta \in dx)\mathbb{E}_0(e^{-\lambda\alpha}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_0 \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha\circ\theta_{\gamma(k-1)}\right);\, N_\epsilon(y-x) = n\right)$$

$$= P_\epsilon(\beta \geqslant y) + \int_0^y P_\epsilon(\beta \in dx)\mathbb{E}_0(e^{-\lambda\alpha})\mathbb{E}_0 \exp(-\lambda(V_\epsilon^{-1}(y-x) - (y-x))).$$

Обозначим $Z(y) := \mathbb{E}_0 \exp(-\lambda(V_\epsilon^{-1}(y) - y))$,
$F(x) := P_x(\beta < x)$, $\quad \overline{F}(x) := 1 - F(x)$, $\quad A := \mathbb{E}_0(e^{-\lambda\alpha})$.

Мы получили интегральное уравнение

$$Z(y) = \overline{F}(x) + A \int_0^y Z(y-x)\, dF(x),$$

решение которого может быть записано в виде

$$Z(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n (F^{(n)}(y) - F^{(n+1)}(y)),$$

где $F^{(n)}$ – n-кратная свертка функций распределения F. Рассмотрим последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $|b(n)|$ $(n = 1, 2, \dots)$. Пусть P_ϵ^* – распределение процесса восстановления $N_\epsilon(y)$ с этой последовательностью длин интервалов и $\mathbb{E}_\epsilon^*$ – соответствующее математическое ожидание. Тогда

$$\mathbb{E}_\epsilon^* A^{N_\epsilon(y)} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n P_\epsilon^*(N_\epsilon(y) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n (F^{(n)}(y) - F^{(n+1)}(y)),$$

Итак

$$\mathbb{E}_0 \exp(-\lambda V_\epsilon^{-1}(y)) = e^{-\lambda y}\, \mathbb{E}_\epsilon^*(\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\alpha})^{N_\epsilon(y)}.$$

С другой стороны, очевидно, что можно рассмотреть версию процесса $N_\epsilon(y)$, измеримую относительно основной сигма-алгебры подмножеств $\mathcal{F}$, согласованную с натуральной фильтрацией исходного процесса и имеющую то же распределение относительно меры P_0. Сохраняя обозначения неизменными, можно записать

$$\mathbb{E}_\epsilon^*(\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\alpha})^{N_\epsilon(y)} = \mathbb{E}_0(\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\alpha})^{N_\epsilon(y)}.$$

Более того, пусть P_0^0 – распределение процесса с мгновенным отражением, соответствующего процессу X. Меры этих процессов совпадают на сигма-алгебре $\mathcal{F}^*$, порожденной всеми случайными величинами $\beta_\epsilon \circ \theta_{\alpha_\epsilon} \circ \theta_{\gamma_\epsilon(k)}$ ($\epsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots$). Отсюда

$$\mathbb{E}_0(\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\alpha})^{N_\epsilon(y)} = \mathbb{E}_0^0(\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\alpha})^{N_\epsilon(y)}.$$

Учитывая зависимость α от ϵ и возвращаясь к прежним обозначениям, можно записать

$$\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\alpha} = K(\lambda, \epsilon) = 1 - C(\lambda)\,\epsilon + o(\epsilon).$$

Как мы покажем ниже, процесс $W_\epsilon(y) := \epsilon\, N_\epsilon(y)$ слабо сходится к пределу $W(y)$ при $\epsilon \to 0$, который является обращённым процессом с независимыми приращениями с известными характеристиками, измеримому относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}^*$. Действительно, процесс $W_\epsilon(y)$ не убывает и полностью характеризуется процессом $W_\epsilon^{-1}(t)$. Последний процесс имеет независимые положительные скачки на решетке с шагом ϵ и, следовательно, является процессом с независимыми приращениями. Очевидно, предел таких процессов, если он существует, также является процессом с независимыми приращениями. То, что он существует, вытекает из оценки преобразования Лапласа его приращения. Имеем

$$\mathbb{E}_0^0 e^{-\lambda W_\epsilon^{-1}(t)} = \mathbb{E}_0^0 \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{[t/\epsilon]} |b(k)|\right)$$

$$= (\mathbb{E}_\epsilon e^{-\lambda\beta})^{[t/\epsilon]} = (1 + g'_{(0,\infty)}(\lambda, 0)\,\epsilon + o(\epsilon))^{[t/\epsilon]} \to e^{g'_{(0,\infty)}(\lambda,0)\,t} \quad (\epsilon \to 0).$$

Используя достаточное условие слабой сходимости процессов в терминах сходимости их точек первого выхода из открытых множеств

([4, с. 287]), окончательно получаем

$$\mathbb{E}_0 \exp(-\lambda V^{-1}(y)) = \mathbb{E}_0^0 \exp(-\lambda y - C(\lambda)W(y)),$$

что можно рассматривать как описание прямой замены времени в терминах распределения процесса с мгновенным отражением и основной характеристики замедления – функции $C(\lambda)$. □

Мы используем эту формулу для вывода преобразования Лапласа от разности между моментами первого выхода из заданной односторонней окрестности граничной точки для процессов с замедленным и мгновенным отражением.

Обозначим

$$\beta^r := \sigma_{(0,r)}, \quad \gamma^r(0) = 0,$$
$$\gamma^r := \alpha \dot{+} \beta^r, \quad \gamma^r(n) := \gamma^r(n-1) \dot{+} \gamma^r \quad (n \geqslant 1),$$
$$b^r(n) = [\gamma^r(n-1) \dot{+} \alpha, \gamma^r(n)) \quad (n \geqslant 1),$$
$$M_\epsilon^r := \inf\{n \geqslant 0 : X(\gamma^r(n)) \geqslant r\}.$$

Следовательно,

$$P_0(M_\epsilon^r = n) = P_0(X(\gamma^r(1)) = 0, \ldots, X(\gamma^r(n-1)) = 0, X(\gamma^r(n-1)) = r)$$
$$= (p(\epsilon, r))^{n-1}(1 - p(\epsilon, r)),$$

где $p(\epsilon, r) := P_0(X(\gamma_\epsilon^r(1)) = 0)$.

Теорема 2. *Разность между моментами первого выхода из замкнутого слева интервала $[0, r)$ для процессов с замедленным и мгновенным отражением подчиняется соотношению*

$$\mathbb{E}_0 \exp\Big(-\lambda\Big(\sigma_{[0,r)} - \sigma_{[0,r)}^0\Big)\Big) = \frac{H'_{(0,r)}(0+)}{C(\lambda) + H'_{(0,r)}(0+)}, \tag{4}$$

где $H_{(0,r)}(x) = h_{(0,r)}(0, x)$.

Доказательство. Имеем

$$\sigma_{[0,r)} = \gamma^r(M_\epsilon^r) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^r(n) I(M_\epsilon^r = n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (|a_\epsilon(k)| + |b_\epsilon(k)|) + |a_\epsilon(n)| + |b_\epsilon^r(1)| \right) I(M_\epsilon^r = n);$$
$$\sigma_{[0,r)}^o = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (|a_\epsilon^o(k)| + |b_\epsilon(k)|) + |a_\epsilon^o(n)| + |b_\epsilon^r(1)| \right) I(M_\epsilon^r = n);$$

где $a^o_\epsilon(k)$ – момент первого достижения уровня ϵ процессом с мгновенным отражением после очередного первого достижения уровня 0. По определению, суммарное время таких моментов до момента первого достижения уровня r стремится к нулю при $\epsilon \to 0$ P_0-почти наверное. Отсюда справедливо

$$\sigma_{[0,r)} - \sigma^o_{[0,r)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_\epsilon(n)| \, I(M^r_\epsilon = n).$$

Отсюда

$$E_0 e^{-\lambda(\sigma_{[0,r)} - \sigma^o_{[0,r)})} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_0 \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} |a_\epsilon(n)| \, I(M^r_\epsilon = n)\right).$$

С другой стороны,

$$F_\epsilon(\lambda) := E_0 \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{M^r_\epsilon} |a_\epsilon(k)|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_0 \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} |a_\epsilon(k)|;\ M^r_\epsilon = n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_0 \exp\Bigg(- \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha \circ \theta_{\gamma^r(k-1)};$$

$$X(\gamma^r(1)) = 0, \ldots, X(\gamma^r(n-1)) = 0, X(\gamma^r(n)) = r\Bigg)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_0 \exp\Bigg(-\lambda\alpha - \lambda \left(\sum_{k=2}^{n} \alpha \circ \theta_{\beta^r \dot{+} \gamma^r(k-2)}\right) \circ \theta_\alpha;$$

$$\theta^{-1}_\alpha \left(X(\beta^r) = 0, \ldots, X(\beta^r \dot{+} \gamma^r(n-2)) = 0, X(\beta^r \dot{+} \gamma^r(n-1)) = r\right)\Bigg)$$

$$= E_0 e^{-\lambda\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} P_\epsilon(X(\beta^r) = 0) E_0 \exp\Bigg(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} \alpha \circ \theta_{\gamma^r(k-1)};$$

$$X(\gamma^r(1)) = 0, \ldots, X(\gamma^r(n-2)) = 0, X(\gamma^r(n-1)) = r\Bigg)$$

$$= E_0 e^{-\lambda\alpha}\, P_\epsilon(X(\beta^r) = r) + E_0 e^{-\lambda\alpha}\, P_\epsilon(X(\beta^r) = 0) E_0 \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{M^r_\epsilon} |a_\epsilon(k)\right).$$

Отсюда

$$F_\epsilon(\lambda) = \frac{E_0 e^{-\lambda\alpha}\, P_\epsilon(X(\beta^r) = r)}{1 - E_0 e^{-\lambda\alpha}\, P_\epsilon(X(\beta^r) = 0)}.$$

Пользуясь тем, что $\alpha = \alpha_\epsilon$ и

$$E_0 e^{-\lambda\alpha} = K(\lambda,\epsilon) = 1 - C(\lambda)\epsilon + o(\epsilon),$$
$$P_\epsilon(X(\beta^r) = r) := H_{(0,r)}(\epsilon) = h_{(0,r)}(0,\epsilon) = H'_{(0,r)}(0+)\epsilon + o(\epsilon),$$
$$P_\epsilon(X(\beta^r) = 0) := G_{(0,r)}(\epsilon) = 1 - H_{(0,r)}(\epsilon),$$

получаем при $\epsilon \to 0$

$$F_\epsilon(\lambda) \to \frac{H'_{(0,r)}(0+)}{C(\lambda) + H'_{(0,r)}(0+)}. \qquad \square$$

§4. Одно необходимое условие марковости полумарковского процесса

Рассмотрим два функционала

$$R(\lambda_1;\phi_1 \,|\, x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} \phi_1(X_{t_1})\, dt_1,$$
$$R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2 \,|\, x) = E_x \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_2} \phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\, dt_2\, dt_1,$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, ϕ_1, ϕ_2 – непрерывные функции на $[0,\infty)$, $X(t)$ – данный процесс с отражением, $x \geqslant 0$. Из непрерывности решений дифференциального уравнения (1) следует непрерывность по x этих функционалов.

Лемма 1. *Если $X(t)$ – глобально марковский процесс с областью значений $[0,\infty)$, то для любого $x \geqslant 0$*

$$R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2 \,|\, x) = R(\lambda_1;\phi_1 R(\lambda_2;\phi_2) \,|\, x), \qquad (5)$$

где $R(\lambda_2;\phi_2) = R(\lambda_2;\phi_2 \,|\cdot)$.

Доказательство. Используя перестановочность интегралов и марковское свойство имеем

$$E_x \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_2} \phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\, dt_2 dt_1$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_2} E_x(\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2}))\, dt_2 dt_1$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_2} E_x(\phi_1(X_{t_1}) E_{X_{t_1}} \phi_2(X_{t_2}))\, dt_2 dt_1$$

$$= E_x \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_2} \phi_1(X_{t_1}) E_{X_{t_1}} \phi_2(X_{t_2})\, dt_2 dt_1$$

$$= E_x \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} \phi_1(X_{t_1}) E_{X_{t_1}} \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t_2} \phi_2(X_{t_2})\, dt_2 dt_1$$

$$= E_x \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} \phi_1(X_{t_1}) R(\lambda_1; \phi_2 \,|\, X_{t_1})\, dt_1 = R(\lambda_1; \phi_1 R(\lambda_2; \phi_2) \,|\, x) \quad \square$$

Лемма 2. *Если $X(t)$ – полумарковский процесс с областью значений $[0,\infty)$, то*

$$E_0(e^{-\lambda\sigma_y} R(\lambda; \phi \,|\, X(\sigma_y))) = R(\lambda; \phi \,|\, 0) - E_0 \left(\int_0^{\sigma_y} e^{-\lambda t} \phi(X_t)\, dt \right). \tag{6}$$

$$\begin{aligned} E_0(e^{-\lambda_1\sigma_y} R(\lambda_1, \lambda_2; \phi_1, \phi_2 \,|\, X(\sigma_y))) &= R(\lambda_1, \lambda_2; \phi_1, \phi_2 \,|\, 0) \\ -E_0 &\left(\int\limits_{t_1+t_2<\sigma_y} e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_2} \phi_1(X_{t_1}) \phi_2(X_{t_1+t_2})\, dt_2 dt_1 \right) \\ -E_0 &\left(e^{-\lambda_2\sigma_y} R(\lambda_2; \phi_2 \,|\, X(\sigma_y)) \int_0^{\sigma_y} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t_1} \phi_1(X_{t_1})\, dt_1 \right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\sigma_y = \sigma_{[0,y)}$.

Доказательство. Имеем

$$E_0(e^{-\lambda\sigma_y} R(\lambda; \phi \,|\, X(\sigma_y))) = E_0 \left(e^{-\lambda\sigma_y} E_{X(\sigma_y)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \phi(X_t)\, dt \right)$$

$$= E_0 \left(e^{-\lambda\sigma_y} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \phi(X_t))\, dt \right) \circ \theta_{\sigma_y} \right) = E_0 \left(e^{-\lambda\sigma_y} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \phi(X_{\sigma_y + t})\, dt \right)$$

$$= E_0\left(\int\limits_{\sigma_y}^{\infty} e^{-\lambda t}\phi(X_t)\,dt\right) = R(\lambda;\phi\,|\,0) - E_0\left(\int\limits_0^{\sigma_y} e^{-\lambda t}\phi(X_t)\,dt\right).$$

А также

$$E_0(e^{-\lambda_1\sigma_y}R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2\,|\,X(\sigma_y)))$$

$$= E_0\left(e^{-\lambda_1\sigma_y}E_{X(\sigma_y)}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_1dt_2\right)$$

$$= E_0\left(e^{-\lambda_1\sigma_y}\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_1dt_2\right)\circ\theta_{\sigma_y}\right)$$

$$= E_0\left(e^{-\lambda_1\sigma_y}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{\sigma_y+t_1})\phi_2(X_{\sigma_y+t_1+t_2})\,dt_1dt_2\right)$$

$$= E_0\left(\int\limits_{\sigma_y}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_2dt_1\right)$$

$$= R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2\,|\,0) - E_0\left(\int\limits_0^{\sigma_y}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_2dt_1\right).$$

Имеем

$$E_0\left(\int\limits_0^{\sigma_y}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_2dt_1\right)$$

$$= E_0\left(\iint\limits_{t_1+t_2<\sigma_y} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_2dt_1\right)$$

$$+E_0\left(\iint\limits_{t_1<\sigma_y\leqslant t_1+t_2} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_2dt_1\right).$$

Сделаем замену переменных в интеграле второго члена $u = t_1+t_2-\sigma_y$. Получаем

$$E_0\left(e^{-\lambda_2\sigma_y}\int\limits_0^{\sigma_y} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t_1}\phi_1(X_{t_1})\,dt_1 \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_2 u}\phi_2(X(\sigma_y+u))\,du\right)$$

$$= E_0\left(e^{-\lambda_2\sigma_y}\int\limits_0^{\sigma_y} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t_1}\phi_1(X_{t_1})\,dt_1 \left(\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_2 u}\phi_2(X_u)\,du\right)\circ\theta_{\sigma_y}\right)$$

$$= E_0\left(e^{-\lambda_2\sigma_y} R(\lambda_2;\phi_2\,|\,X(\sigma_y))\int\limits_0^{\sigma_y} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t_1}\phi_1(X_{t_1})\,dt_1\right) \qquad \square$$

Следствие 1. *Если диффузионный локально марковский процесс $X(t)$ сохраняет марковость при отражении от точки 0, то параметр $C(\lambda)$ отражения имеет вид $k\lambda$, где $k \geqslant 0$ – некоторое число.*

Доказательство. Из формул (5, 6) следует

$$\frac{1}{y}\left(E_0(e^{-\lambda_1\sigma_y}R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2\,|\,X(\sigma_y))) - R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2\,|\,0)\right)$$

$$= \frac{1}{y}\left(E_0(e^{-\lambda_1\sigma_y}R(\lambda_1;\phi_1 R(\lambda_2;\phi_2)\,|\,X(\sigma_y))) - R(\lambda_1;\phi_1 R(\lambda_2;\phi_2)\,|\,0)\right)$$

$$= -\frac{1}{y}\left(E_0\int\limits_0^{\sigma_y} e^{-\lambda_1 t}\phi_1(X_t)R(\lambda_2;\phi_2\,|\,X_t)\,dt\right)$$

$$\to -\phi_1(0)R(\lambda_2;\phi_2\,|\,0)\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{\lambda_1}(1-K(\lambda_1,y))\right)$$

$$= -\phi_1(0)R(\lambda_2;\phi_2\,|\,0)\frac{C(\lambda_1)}{\lambda_1} \quad (y\to 0) \tag{8}$$

Из формулы (7) следует

$$\frac{1}{y}\left(E_0(e^{-\lambda_1\sigma_y}R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2\,|\,X(\sigma_y))) - R(\lambda_1,\lambda_2;\phi_1,\phi_2\,|\,0)\right)$$

$$= -\frac{1}{y}E_0\left(\iint\limits_{t_1+t_2<\sigma_y} e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}\phi_1(X_{t_1})\phi_2(X_{t_1+t_2})\,dt_2 dt_1\right)$$

$$-\frac{1}{y}E_0\left(e^{-\lambda_2\sigma_y}\,R(\lambda_2;\phi_2\,|\,X(\sigma_y))\int\limits_0^{\sigma_y}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t_1}\phi_1(X_{t_1})\,dt_1\right).$$

При $y\to 0$ первое слагаемое стремится к

$$-\phi_1(0)\phi_2(0)\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}E_0\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+e^{-\lambda_1\sigma_y}\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}-e^{-\lambda_2\sigma_y}\frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\right)$$

$$=-\phi_1(0)\phi_2(0)\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+K(\lambda_1,y)\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}-K(\lambda_2,y)\frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\right)$$

$$=-\phi_1(0)\phi_2(0)\frac{1}{y}\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1-C(\lambda_1)y}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{1-C(\lambda_2)y}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\right)$$

$$=-\phi_1(0)\phi_2(0)\frac{C(\lambda_2)\lambda_1-C(\lambda_1)\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}. \tag{9}$$

При $y\to 0$ второе слагаемое стремится к

$$-\phi_1(0)R(\lambda_2;\phi_2\,|\,0)\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}E_0\left(e^{-\lambda_2\sigma_y}\,\frac{1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)\sigma_y}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)$$

$$=-\phi_1(0)R(\lambda_2;\phi_2\,|\,0)\lim_{y\to 0}\frac{K(\lambda_2,y)-K(\lambda_1,y)}{y(\lambda_1-\lambda_2)})$$

$$=-\phi_1(0)R(\lambda_2;\phi_2\,|\,0)\frac{C(\lambda_1)-C(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\quad (y\to 0). \tag{10}$$

Сравнивая (8) и сумму (9) и (10), получаем равенство

$$\left(R(\lambda_2,\phi_2\,|\,0)-\frac{\phi_2(0)}{\lambda_2}\right)\left(\frac{C(\lambda_2)}{\lambda_2}-\frac{C(\lambda_1)}{\lambda_1}\right)=0,$$

которое должно выполняться при любой непрерывной функции ϕ_2. Это возможно только в том случае, когда второй множитель равен нулю при любых $\lambda_1\neq\lambda_2$. □

Замечание. При линейной функции $C(\lambda)=k\lambda$ разность между моментами первого выхода из полуоткрытого интервала $[0,r)$ для замедленного и мгновенного отражений имеет экспоненциальное распределение с параметром $H'_{(0,r)}(0+)/k$. Из доказанного выше следует, что линейная зависимость $C(\lambda)$ от своего аргумента это необходимое условие сохранения марковости процесса при замедленном отражении, см. [5]. В частности, сохраняется марковость при мгновенном отражении, когда функция C тождественно равна нулю.

§5. Пример нелинейной функции C

Рассмотрим стандартный винеровский процесс, усечённый по своим отрицательным значениям

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} 0, & w(t) \leqslant 0 \\ w(t), & w(t) > 0. \end{cases}$$

В рамках полумарковской модели отражения он характеризуется функцией

$$K(\lambda, r) = \frac{h'_{(0,r)}(\lambda, 0+)}{C(\lambda) - g'_{(0,r)}(\lambda, 0+)} = \frac{\sqrt{2\lambda}/\sinh r\sqrt{2\lambda}}{C(\lambda) + \sqrt{2\lambda}\cosh r\sqrt{2\lambda}/\sinh r\sqrt{2\lambda}}.$$

Учитывая происхождение этого процесса, можно записать

$$K(\lambda, r) = \mathbb{E}_0^w \exp(-\lambda \sigma_{(-\infty,r)}) = \exp(-r\sqrt{2\lambda}).$$

Сравнивая производные в нуле этих двух представлений одной функции, получаем

$$C(\lambda) = \sqrt{2\lambda}.$$

Отсюда получаем характеристику замедления этого процесса при отражении, включая длины всех интервалов постоянства от момента первого попадания процесса $\overline{w}(t)$ на уровень 0 до момента первого попадания его на уровень r:

$$\mathbb{E}_0 \exp\Big(-\lambda\big(\sigma_{[0,r)} - \sigma^0_{[0,r)}\big)\Big) = \frac{1/r}{\sqrt{2\lambda} + 1/r},$$

обращение которого, найденное стандартными методами (формула Меллина и нахождение значения интеграла путём решения линейного дифференциального уравнения), имеет вид

$$f_{\sigma-\sigma_o}(t) = \frac{1}{r\sqrt{2\pi t}} - \frac{1}{r^2}\exp\left(\frac{t}{2r^2}\right)\overline{\Phi}\left(\frac{\sqrt{t}}{r}\right),$$

где $\overline{\Phi}(x)$ – "хвост" стандартного нормального распределения.

Литература

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Наукова думка, Киев, 1968.
2. Ф. Хаусдорф, *Теория множеств.* КомКнига, М., 2006.
3. Б. П. Харламов, *Диффузионный процесс с задержкой на краях отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 284–297.
4. B. P. Harlamov, *Continuous semi-Markov processes.* ISTE & Wiley, London, 2008.

5. Б. П. Харламов, *О марковском диффузионном процессе с замедленным отражением на границе отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 231–255.
6. B. P. Harlamov, *Stochastic model of gas capillary chromatography.* — In: Communication in Statistics – Simulation and Computation. Vol.41, Issue 7 (2012), pp. 1023–1031.
7. S. S. Rasova, B. P. Harlamov, *О движении броуновских частиц вдоль задерживающего экрана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 175–194.

Harlamov B. P. Preserving of Markovness whilst delayed reflection.

A one-dimensional locally-Markov diffusion process with positive range of values is considered. This process is assumed to be reflected from the point 0. All variants of reflection preserving the semi-Markov property are described. The reflected process prolongs to be locally-Markov in open intervals, but it can loose the global Markov property. The reflection is characterized by $\alpha(r)$ which is the first exit time from semi-interval $[0, r)$ after the first hitting time at 0 (for any $r > 0$). A distribution of this time-interval is used for deriving a time change a process with instantaneous reflection into a process with delayed reflection. A process which preserves its markovness after the delayed reflection is proved to have a special distribution of the set of time points when the process has zero meaning during the time $\alpha(r)$. This discontinuum set has exponentially distributed Lebesgue measure.

Институт проблем
машиноведения РАН,
В.О., Большой пр. 61, 199178
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: harlamov@random.ipme.ru

Поступило 22 октября 2013 г.