Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

А. Е. Михайлов

ОЦЕНКИ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ НА $\mathbb{Q}_p$

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, B_n – последовательность p-адических чисел, $|B_n|_p \to \infty$. В [2] доказано, что распределения сумм $\frac{X_1+\ldots+X_n}{B_n}$ могут в качестве предельных распределений иметь распределения, характеристические функции которых имеют вид

$$\exp \int\limits_{\mathbb{Q}_p} (\chi(tv) - 1)\, dM(v),$$

где мера M конечна на любом множестве $\mathbb{Q}_p \setminus B(0, R)$ и $M(uA) = \gamma M(A)$, для некоторого $u \in \mathbb{Q}$, $|u|_p > 1$ и числа γ, $0 < \gamma < 1$, $\chi(\cdot)$ – характер на $\mathbb{Q}_p$. Такого рода распределения мы далее будем называть устойчивыми (их также называются полуустойчивыми, см., например, [5]). В этом случае функция $\psi(t) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} (\chi(tv) - 1)\, dM(v)$ обладает следующим свойством

$$\psi(u^k t) = |u|_p^{\alpha k} \psi(t), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma = |u|_p^{-\alpha}.$$

Распределения с характеристическими функциями $\exp \psi(t)$ естественно рассматривать как p-адические аналоги α-устойчивых распределений на $\mathbb{R}$. В [1] распределения такого рода появлялись в связи с p-адическим броуновским движением. Аналогичные распределения на алгебраическим расширении поля p-адических чисел возникают при изучении процессов Леви (см. [5]). В отличие от вещественного случая, невозможно подобрать B_n так, чтобы последовательность распределений $\frac{X_1+\cdots+X_n}{B_n}$ имела единственную предельную точку и предельное распределение было бы невырожденным. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о скорости сближения распределения случайной величины $S_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{B_n}$ с распределением случайной величины $Z_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{B_n}$, где величины Y_i имеют устойчивые распределения. Далее мы будем предполагать, что $\varphi_1(t) = 1 + \psi(t) + o(|t|_p^\alpha)$ и

Ключевые слова: p-адические устойчивые распределения, оценки скоростей сходимости, нормированные суммы.

$\varphi_2(t) = \exp\psi(t)$, где φ_1, φ_2 – характеристические функции X_i и Y_i, а $B_n = u^{m(n)}$. В этом случае характеристическая функция Z_n имеет вид $\exp\left(\frac{n}{|B_n|_p^\alpha}\psi(t)\right)$.

Обозначения

Будем обозначать

$$|P-Q|_{TV} = \sup_{A\in\mathfrak{B}(\mathbb{Q}_p)} |P(A)-Q(A)|$$

– расстояние по вариации между мерами P и Q на $\mathbb{Q}_p$;

$B(a,r) = \{x\in\mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leqslant R\}$ – замкнутый шар с центром a радиуса $r = p^n$, $n\in\mathbb{Z}$;

U_r – равномерное распределение на шаре $B(0,r)$ (т.е. нормированную меру Хаара на $B(0,r)$).

Интегрирование по мере Хаара на $\mathbb{Q}_p$ будем обозначать dt. Под плотностью далее подразумеваются плотность по мере Хаара.

В дальнейшем $\chi(x) = \exp(2\pi i\,\{x\})$ – характер на $\mathbb{Q}_p$ ($\{x\}$ – дробная часть x). Функция $\chi(x)$ является локально постоянной, она постоянна на каждом шаре $B(a,1)$. Произвольный характер на $\mathbb{Q}_p$ имеет вид $\chi(tx)$ для некоторого $t\in\mathbb{Q}_p$.

Подробные сведения об анализе на $\mathbb{Q}_p$ можно найти в [1,3,4].

Характеристическую функцию вероятностной меры P обозначим

$$\varphi_P(t) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(tx)dP(x).$$

В частности, $\varphi_{U_r}(t) = I_{B(0,\frac{1}{r})}(t)$.

Имеют место следующие равенства

$$P(B(0,r)) = r\int\limits_{B(0,1/r)} \varphi_P(t)\,dt,$$

$$1-P(B(0,r)) = r\int\limits_{B(0,1/r)} (1-\varphi_P(t))\,dt$$

(интегрирование ведется по мере Хаара на $\mathbb{Q}_p$).

Введем семейство полуметрик на множестве вероятностных распределений на $\mathbb{Q}_p$

$$\nu_r(P_1,P_2) = \left|P_1 * U_r - P_2 * U_r\right|_{TV}, \quad r = p^k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку шары радиуса r образуют разбиение $\mathbb{Q}_p$, имеет место следующее равенство

$$\nu_r(P_1,P_2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}|P_1(B(a_i,r))-P_2(B(a_i,r))|,$$

где последовательность a_i выбрана так, чтобы $B(a_i,r)\cap B(a_j,r)=\varnothing$ при $i\neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B(a_i,r)=\mathbb{Q}_p$.

Слабая сходимость последовательности вероятностных мер P_n к мере P равносильна условию

$$\lim_{n\to\infty}\nu_r(P_n,P)=0$$

для каждого $r=p^k, k\in\mathbb{Z}$.

Для оценки $\nu_r(P_1,P_2)$ можно использовать характеристические функции мер P_1, P_2.

Лемма 1. *Для любых вероятностных мер P_1 и P_2 на $\mathbb{Q}_p$ и любого $R=p^N>r$ имеет место неравенство*

$$2\nu_r(P_1,P_2)\leqslant\sqrt{R}\Biggl(\int\limits_{B(0,1/r)}|\varphi_{P_1}(t)-\varphi_{P_2}(t)|^2\,dt\Biggr)^{1/2}$$
$$+R\Biggl(\int\limits_{B(0,1/R)}(1-\varphi_{P_1}(t))\,dt+\int\limits_{B(0,1/R)}(1-\varphi_{P_2}(t))\,dt\Biggr).$$

Доказательство. Обозначим $f_{1,r}, f_{2,r}$ плотности мер P_1*U_r и P_2*U_r по мере Хаара на $\mathbb{Q}_p$. Получаем

$$2\nu_r(P_1,P_2)=2|P_1*U_r-P_2*U_r|_{TV}=\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|f_{1,r}(x)-f_{2,r}(x)|\,dx$$

$$\leqslant\int\limits_{B(0,R)}|f_{1,r}(x)-f_{2,r}(x)|\,dx+\int\limits_{\mathbb{Q}_p\setminus B(0,R)}f_{1,r}(x)\,dx+\int\limits_{\mathbb{Q}_p\setminus B(0,R)}f_{2,r}(x)\,dx$$

$$\leqslant\sqrt{R}\Biggl(\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|f_{1,r}(x)-f_{2,r}(x)|^2\,dx\Biggr)^{1/2}+(1-P_1(B(0,R)))+(1-P_2(B(0,R))$$

$$= \sqrt{R}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{Q}_p} |\varphi_{P_1 * U_r}(t) - \varphi_{P_2 * U_r}(t)|^2\,dt\Bigg)^{1/2}$$

$$+ R \int\limits_{B(0,1/R)} (1-\varphi_{P_1}(t))\,dt + R \int\limits_{B(0,1/R)} (1-\varphi_{P_2}(t))\,dt$$

$$= \sqrt{R}\Bigg(\int\limits_{B(0,1/r)} |\varphi_{P_1}(t) - \varphi_{P_2}(t)|^2\,dt\Bigg)^{1/2}$$

$$+ R\Bigg(\int\limits_{B(0,1/R)} (1-\varphi_{P_1}(t))\,dt + \int\limits_{B(0,1/R)} (1-\varphi_{P_2}(t))\,dt\Bigg). \quad \square$$

В частности, если носители мер P_1 и P_2 находятся внутри шара $B(0,R)$, то $\nu_r(P_1,P_2)=0$ при $r \geqslant R$ и

$$\nu_r(P_1,P_2) \leqslant \frac{\sqrt{R}}{2}\Bigg(\int\limits_{B(0,1/r)} |\varphi_{P_1}(t) - \varphi_{P_2}(t)|^2\,dt\Bigg)^{1/2} \quad \text{при} \quad r < R.$$

Лемма 2. *Для каждого $t \in \mathbb{Q}_p$, $|t|_p \leqslant 1/r$, имеет место неравенство*

$$|\varphi_{P_1}(t) - \varphi_{P_2}(t)| \leqslant 2\nu_r(P_1,P_2).$$

Доказательство. $\varphi_{U_r}(t) = 1$ при $|t|_p \leqslant 1/r$. Следовательно

$$|\varphi_{P_1}(t) - \varphi_{P_2}(t)| = |\varphi_{P_1 * U_r}(t) - \varphi_{P_2 * U_r}(t)| \leqslant 2|P_1 * U_r - P_2 * U_r|_{TV} = 2\nu_r(P_1,P_2). \quad \square$$

Применим полученные выше неравенства для оценки скоростей сходимости распределений сумм $\frac{X_1+\ldots+X_n}{B_n}$ к предельным распределениям.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – характеристические функции X_i и Y_i соответственно. Тогда*

$$2\nu_r(P_{S_n},P_{Z_n}) \leqslant n\sqrt{R}\Bigg(\int\limits_{B(0,1/r)} \left|\varphi_1\left(\frac{t}{B_n}\right) - \varphi_2\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^2 dt\Bigg)^{1/2}$$

$$+ nR\Bigg(\int\limits_{B(0,1/R)} \left(1-\varphi_1\left(\frac{t}{B_n}\right)\right) dt + \int\limits_{B(0,1/R)} \left(1-\varphi_2\left(\frac{t}{B_n}\right)\right) dt\Bigg)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu_r\left(P_{\frac{X_i}{B_n}}, P_{\frac{Y_i}{B_n}}\right) = n\nu_r\left(P_{\frac{X_1}{B_n}}, P_{\frac{Y_1}{B_n}}\right).$$

Применив лемму 1, получим требуемое неравенство. □

Выберем $B_n = u^{m(n)}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < c \leqslant \frac{n}{|B_n|_p^\alpha} \leqslant C < \infty$$

для некоторых констант c, C, например, можно взять

$$m(n) = \left[\frac{1}{\alpha}\log_{|u|_p} n\right].$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1(t) = 1 + \psi(t) + o(|t|_p^\alpha)$ *и* $\varphi_2(t) = \exp\psi(t)$ *– характеристические функции* X_i *и* Y_i, *соответственно.* $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \beta(t)|t|_p^\alpha$, *где* $\beta(t) = o(1)$. $R = p^N > r$. *Тогда существуют константы* K_1, K_2, *такие что*

$$\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) \leqslant K_1\sqrt{R} \sup_{B(0,\frac{1}{r|B_n|_p})} |\beta(t)| \frac{1}{r^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \frac{K_2}{R^\alpha}.$$

Доказательство. Заметим, что существует константа K, такая что

$$|1 - \varphi_1(t)| \leqslant K|t|_p^\alpha, \quad |1 - \varphi_2(t)| \leqslant K|t|_p^\alpha.$$

Применив теорему 1, получим

$$\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n})$$

$$\leqslant \frac{1}{2} n\sqrt{R}\left(\int\limits_{B(0,1/r)} \left|\beta\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^2 \left|\frac{t}{B_n}\right|_p^{2\alpha} dt\right)^{1/2} + nRK \int\limits_{B(0,1/R)} \left|\frac{t}{B_n}\right|_p^\alpha dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\frac{n}{|B_n|_p^\alpha}\sqrt{R} \sup_{B(0,\frac{1}{r|B_n|_p})} |\beta(t)| \left(\int\limits_{B(0,1/r)} |t|_p^{2\alpha}\, dt\right)^{1/2} + \frac{n}{|B_n|_p^\alpha} RK \int\limits_{B(0,1/R)} |t|_p^\alpha\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n}{|B_n|_p^\alpha}\sqrt{R}\sup_{B(0,\frac{1}{r|B_n|_p})}|\beta(t)|\frac{1}{r^{\alpha+\frac{1}{2}}}\left(\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-2\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n}{|B_n|_p^\alpha}\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}}\frac{K}{R^\alpha}$$

$$\leqslant K_1\sqrt{R}\sup_{B(0,\frac{1}{r|B_n|_p})}|\beta(t)|\frac{1}{r^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \frac{K_2}{R^\alpha},$$

где $K_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-2\alpha-1}}\right)^{1/2}C$, $K_2 = CK\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}}$ и $C = \sup \frac{n}{|B_n|_p^\alpha}$. □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и $|\beta(t)| \leqslant L|t|_p^\delta$. Тогда существуют константы V_1 и V_2, такие что*

$$\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) \leqslant (V_1 r^{-\delta-\alpha-\frac{1}{2}} + V_2)|B_n|_p^{-\frac{\alpha\delta}{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

при $n \geqslant n_0(r) = \inf\left\{n \in \mathbb{N} \middle| \left[\frac{\delta}{\alpha+\frac{1}{2}}\log_p |B_n|_p\right] \geqslant \log_p r\right\}$.

Доказательство. Выберем $R = p^{[\sigma\log_p |B_n|_p]}$, $\sigma = \frac{\delta}{\alpha+\frac{1}{2}}$. При $n \geqslant n_0(r)$ выполняются неравенства $R \geqslant r$ и $\frac{|B_n|_p^\sigma}{p} \leqslant R \leqslant |B_n|_p^\sigma$. Применив предыдущую теорему, получим

$$\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) \leqslant K_1\sqrt{R}L(r|B_n|_p)^{-\delta}\frac{1}{r^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \frac{K_2}{R^\alpha}.$$

Тогда

$$\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) \leqslant (K_1 L r^{-\delta-\alpha-\frac{1}{2}} + K_2 p^\alpha)|B_n|_p^{-\alpha\sigma}. \qquad \square$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть X_i имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{c_\alpha}{|x|_p^{\alpha+1}} I_{\mathbb{Q}_p\setminus B(0,\frac{1}{p})}, \quad \text{где} \quad c_\alpha = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{-1}}.$$

Тогда $\varphi_1(t) = 1 - v_\alpha|t|_p^\alpha$ при $|t|_p \leqslant 1$ и

$$v_\alpha = \frac{p^{-\alpha} - p^{-1-2\alpha}}{1-p^{-1}} \quad \text{и} \quad \varphi_2(t) = \exp(-v_\alpha|t|_p^\alpha).$$

В этом случае $|\beta(t)| \leqslant \frac{v_\alpha^2}{2}|t|_p^\alpha$. Используя предыдущий результат, получим

$$\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) \leqslant \left(V_1 r^{-2\alpha-\frac{1}{2}} + V_2\right)|B_n|_p^{-\frac{\alpha^2}{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Выберем $u = p^{-k_0} \leqslant 1$ так, чтобы $Cv_\alpha\frac{u^\alpha}{r^\alpha} < 1$, где $C = \sup\limits_n \frac{n}{|B_n|_p^\alpha}$. Применим лемму 2 для оценки снизу. Пусть $t \in \mathbb{Q}_p$, $|t|_p = \frac{u}{r}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
2\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) &\geqslant \left|\varphi^n_{S_n}\left(\frac{t}{B_n}\right) - \varphi^n_{Z_n}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \\
&\geqslant \exp\left(-\frac{v_\alpha u^\alpha}{r^\alpha |B_n|_p^\alpha}\right) \frac{v_\alpha^2 u^{2\alpha}}{2r^{2\alpha}|B_n|_p^{2\alpha}} n \left(1 - \frac{v_\alpha u^\alpha}{r^\alpha |B_n|_p^\alpha}\right)^{n-1} \\
&\geqslant Knr^{-2\alpha}|B_n|_p^{-2\alpha} \geqslant Kcr^{-2\alpha}|B_n|_p^{-\alpha},
\end{aligned}
$$

где $K > 0$, $c = \inf\limits_n \frac{n}{|B_n|_p^\alpha}$. Можно показать, что в этом случае Y_i имеет плотность распределения $q(x)$ и $p(x)-q(x) = O\left(\frac{1}{|x|_p^{2\alpha+1}}\right)$ при $|x|_p \to \infty$. Это позволяет улучшить оценку сверху

$$
\nu_r(P_{S_n}, P_{Z_n}) \leqslant \frac{\text{const}}{r^{2\alpha}|B_n|_p^\alpha}.
$$

Можно ли улучшить оценки сверху в общем случае, автору неизвестно.

Литература

1. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-адический анализ и математическая физика.* Физматлит, М. 1994.
2. A. N. Kochubei, *Limit theorems for sums of p-adic random variables.* — Exposition. Math. **16** (1998), 425–439.
3. A. M. Robert, *A course in p-adic analysis.* Springer, 2000.
4. W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
5. K. Yasuda, *Semi-stable processes on local fields.* — Tohoku Math. J. **58** (2006), 419–431.

Mikhailov A. E. Estimating rates of convergence to stable distributions on $\mathbb{Q}_p$.

This paper deals with estimating rates of convergence of distributions of normalized sums of i.i.d. p-adic random variables to stable distributions.

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный унверситет,
ул. 2-я Красноармейская 4,
Санкт-Петербург 190005, Россия
E-mail: `event_horizon@inbox.ru`

Поступило 21 октября 2013 г.